

時変スペクトル信号処理

佐藤 亨
京都大学情報学研究科

1 はじめに

信号処理の基本となる Fourier 解析は、あらゆる信号を正弦波の合成と考え、その振幅および位相分布を調べる解析法である。この方法自体は信号の定常性の有無に関わりなく適用できるが、ランダム信号を取り扱う場合には平均操作が不可欠であり、その際定常性を仮定してアンサンブル平均を時間平均に置き換えることが多い。

しかし、音声解析やレーダー信号処理などの分野においては、信号の性質が時間的・空間的に変化することが普通である。一般には、ある区間の信号を用いて計算したパワースペクトルを異なる区間のものと比較し、統計的ゆらぎから期待されるより大きな差異が検出されればその信号は非定常であるとみなされる。その場合には、周波数スペクトルを時間の関数として扱うことになる。本講ではこのような時変（あるいは非定常）信号の解析法について述べる。

2 予備知識: Fourier 変換とパワースペクトル

ここでは、信号 $s(t)$ の Fourier 変換および逆変換として次の定義を用いる。

$$S(\omega) = \int s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

積分の下限と上限は、特に指定しない限り $-\infty$ および ∞ とする。 $s(t)$ が実関数であっても $S(\omega)$ は複素関数となる。ただし $S(-\omega) = S^*(\omega)$ の関係がある。ここで上添字 $*$ は複素共役を表す。

パワースペクトルは

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T} \quad (3)$$

で定義される。ここに

$$S_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

である。ただし、有限長の離散信号を扱う場合は発散の問題がないので T を無視して

$$P(\omega) = |S(\omega)|^2 \quad (5)$$

とすることが多い。 $P(\omega)$ の逆 Fourier 変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{P(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int S(-\omega)S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= s(-t) * s(t) \\ &= \int s(-x)s(t-x)dx \end{aligned}$$

となる。ここで演算子 $*$ は畳み込みを表す。変数を置き換えると

$$R(\tau) \equiv \mathcal{F}^{-1}[P(\omega)] = \int s(t)s(t + \tau)dt \quad (6)$$

が得られる。 $R(\tau)$ は自己相関関数である。信号 $s(t)$ が複素関数である場合は

$$R(\tau) = \int s(t)^*s(t + \tau)dt \quad (7)$$

と定義される。

3 瞬時周波数と解析信号

周波数が時間と共に変化する信号において、ある瞬間の周波数は信号の位相の時間変化率として定義される。しかし、位相は複素信号に対してのみ考えられるものであるから、実時間信号を対象とするときは、これをまず複素信号に変換することが必要となる。与えられた実関数から、これを実部とする複素関数を定義する方法は無数にあるが、正弦波 $\cos(\omega_0 t)$ が $e^{-j\omega_0 t}$ に対応するように変換を選ぶのが便利である。ここで

$$\cos(\omega_0 t) = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2$$

であることに注目すれば、このための変換は、与えられた信号の Fourier 変換の負の周波数成分を除去し、正の周波数成分を 2 倍すれば得られることがわかる。すなわち、

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int s(t')e^{j\omega(t-t')}dt'd\omega \end{aligned} \quad (8)$$

ここで

$$\int_0^\infty e^{j\omega t}d\omega = \pi\delta(t) + \frac{j}{t} \quad (9)$$

を用いると

$$z(t) = s(t) + \frac{j}{\pi} \int \frac{s(t')}{t-t'}dt' \quad (10)$$

が得られる。この $z(t)$ を解析信号と呼ぶ [1, 2]。

右辺第 2 項は $s(t)$ の Hilbert 変換であるから、解析信号とは与えられた信号にその Hilbert 変換を虚部として加えたもの、と定義できる。ただし離散データの場合は、データを FFT により Fourier 変換し、負周波数成分を 0 に置き換え、正周波数成分を 2 倍してから逆 Fourier 変換するのが簡単である。

この解析信号を用いれば、瞬時周波数は $\frac{d}{dt}\angle z(t)$ で与えられる。また、解析信号の絶対値 $|z(t)|$ は各瞬間の振幅を表し、瞬時包絡線と呼ばれる。図 1 の破線は、実線で与えた信号の瞬時包絡線である。

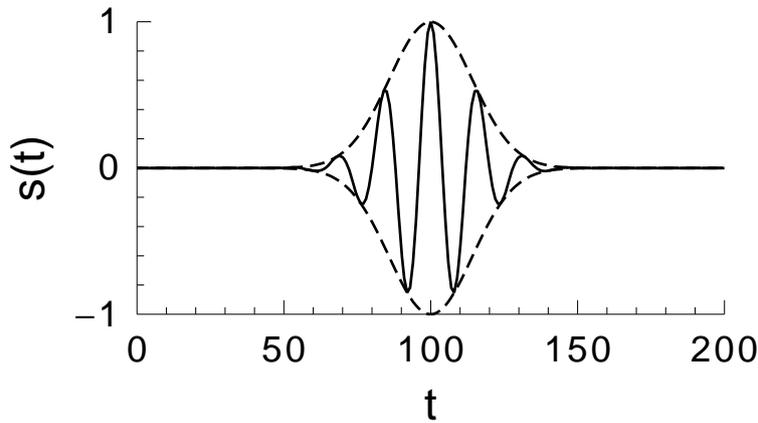


図 1: 解析信号を用いて求めた瞬時包絡線の例 (破線)。

4 短時間 Fourier 変換 (STFT)

前節の方法は、対象とする信号がゆるやかに周波数が変化する正弦波を振幅変調したものなどの場合には有効であり分解能も高いが、信号が複数の周波数成分を持つ場合などには適用できない。

このような場合に最も普通に用いられるのが短時間 Fourier 変換法 (Short-Time Fourier Transform; 以下 STFT 法と略す) である。これは与えられた信号を短い区間毎に離散フーリエ変換する方法であり、時間・周波数スペクトルは次式で与えられる。

$$S(t, \omega) = \int s(t')g^*(t' - t)e^{-j\omega t'} dt' \quad (11)$$

ここに $g(t)$ は窓関数である。STFT 法で得られる時間・周波数スペクトルは複素関数であり、その位相は絶対時間 t に依存して変化する。通常はこれを 2 乗した spectrogram と呼ばれる時変パワースペクトル

$$P(t, \omega) = |S(t, \omega)|^2 \quad (12)$$

が用いられる。

窓関数としては矩形窓が最も簡単であり、その幅を T とすると上式は

$$S(t, \omega) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} s(t')e^{-j\omega t'} dt' \quad (13)$$

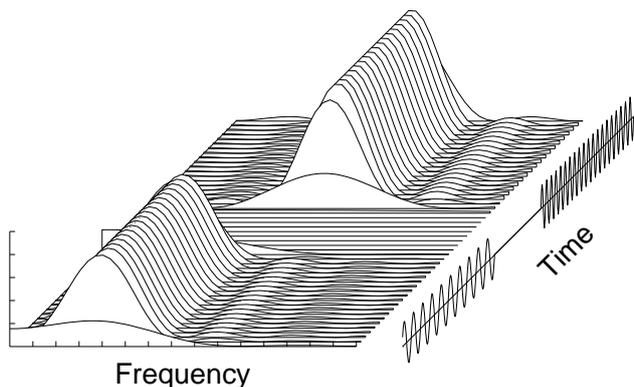
となる。Fourier 変換には FFT (Fast Fourier Transform) を用いる。この方法で得られる周波数分解能は $\Delta\omega = 2\pi/T$ であり、時間分解能 T に反比例する。

図 2 は、異なる周波数の 2 つの正弦波を異なる区間に与えた信号 (以下 two-tone 信号と呼ぶ) の例である。 T が大きくなるに従って周波数分解能は向上するが、時間方向に像が広がって行くのがわかる。ここに示す計算例では、いずれもデータ長は 400 点とし、比較をしやすいように、FFT に用いるデータ長 (= T_0) は 200 点に固定してある¹。図は時間方向の 8 点

¹FFT という 2 のべき乗の点数、という観念が強いが、大きな素数を含まない任意の点数に対するアルゴリズムが古くから知られている [3]。

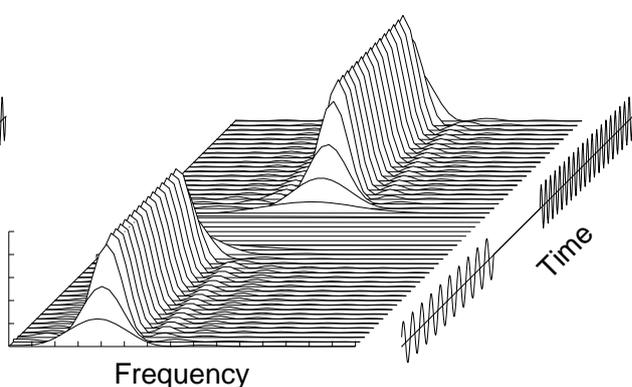
Spectrogram with STFT

$T=0.1T_0$



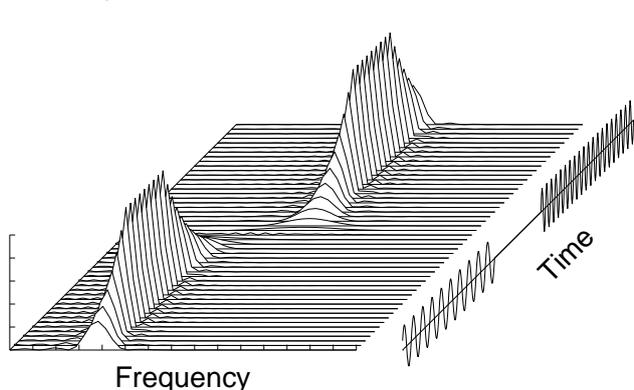
Spectrogram with STFT

$T=0.2T_0$



Spectrogram with STFT

$T=0.5T_0$



Spectrogram with STFT

$T=1.0T_0$

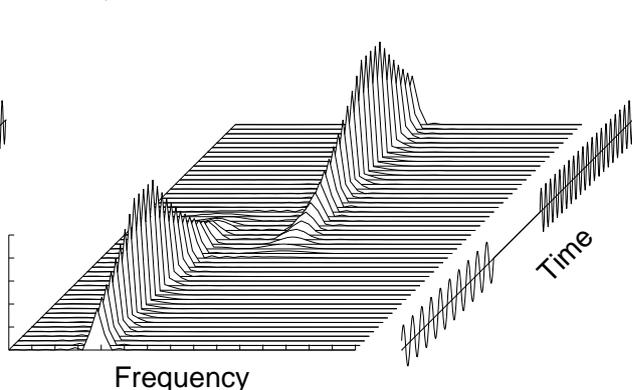


図 2: two-tone 信号から STFT 法により求めた spectrogram。

毎に、その点を中心として求めたパワースペクトルの正の周波数領域に対応する 100 点ずつを描いてある。

図 3 は、chirp 信号 (周波数が時間と共に直線的に変化する信号) の場合について、矩形窓の幅 T を変えて計算を行なった例である。この場合は T が増加すると信号周波数の変化幅もそれに比例して増大するため、周波数分解能は向上しない。特に $T = T_0$ では FM 波特有の多数の側帯波が現れ、周波数分解能はむしろ低下している。

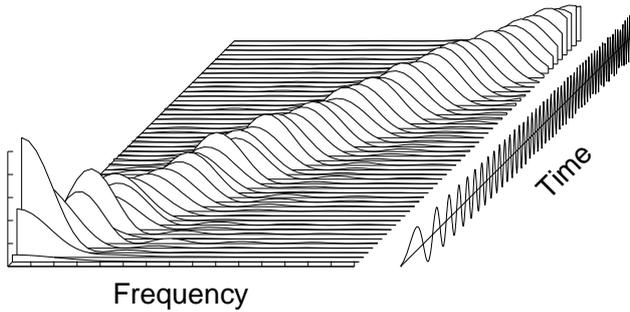
5 Wigner 分布

後にくわしく議論するように、STFT 法における時間分解能と周波数分解能の不確定性は、周波数領域における 2 乗の演算に対応する時間領域での自己相関 (すなわち時間平均) に起因すると考えることができる。Wigner 分布は、時間平均の操作を伴わない時変自己相関関数の Fourier 変換と言うべきもので、次式で与えられる [1]。

$$P(t, \omega) = \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

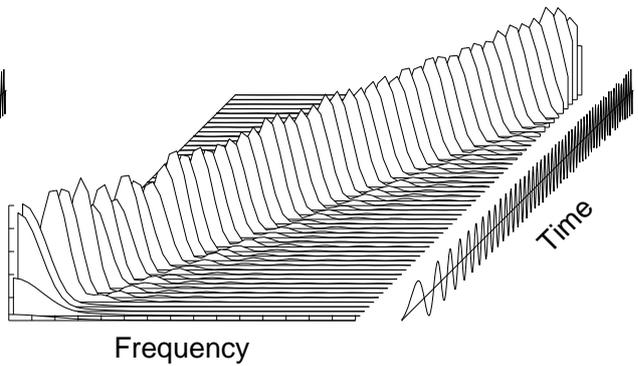
Spectrogram with STFT

$T=0.1T_0$



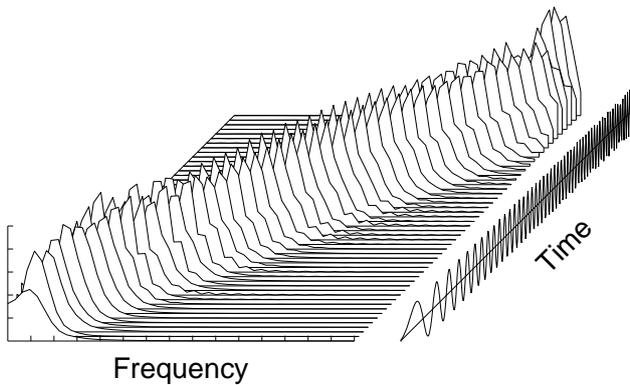
Spectrogram with STFT

$T=0.2T_0$



Spectrogram with STFT

$T=0.5T_0$



Spectrogram with STFT

$T=1.0T_0$

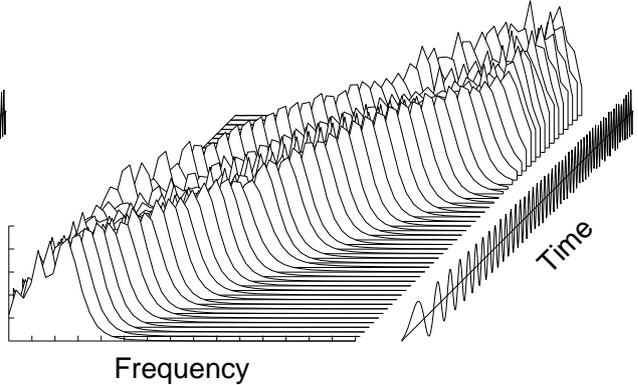


図 3: chirp 信号から STFT 法により求めた spectrogram。

ここで「分布」という名前は、これが本来確率変数に対して考えられたものであるためで、確定的な信号には適切でないが、その場合でも「Wigner 変換」とは呼ばないのが通例である。

(6) 式より、自己相関関数のフーリエ変換としての $P(\omega)$ は、積分の順序を入れ替えると、

$$P(\omega) = \int \int s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau dt \quad (15)$$

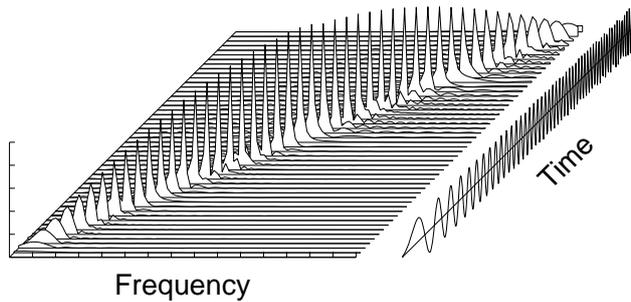
と書くことができる。有限時間長 T のデータについては、これは

$$P(t, \omega) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} \int s(t' + \frac{\tau}{2}) s^*(t' - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau dt' \quad (16)$$

と表すことができる。(14) 式は、ここで $T \rightarrow 0$ とした極限に相当する。これは、Wigner 分布が、平滑化長を 0 とした場合の表現であることを示す。spectrogram が有限時間のデータからフーリエ変換した後 2 乗したものであるのに対して、Wigner 分布は無限長データから求めた自己相関関数をフーリエ変換する際に、時間長を 0 に短縮したものであることに注意を要する。

図 4 は chirp 信号に Wigner 分布を適用した例を示す。STFT 法の場合よりはるかに高い時

Wigner distribution



Wigner distribution (without analytic function)

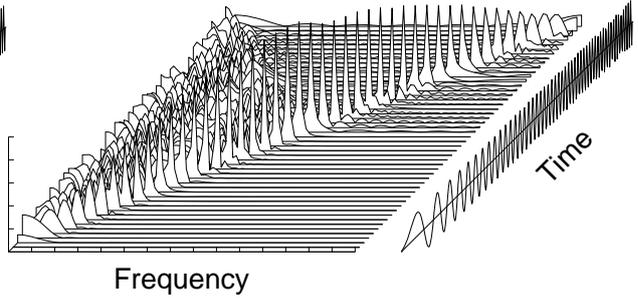


図 4: chirp 信号に Wigner 分布を適用した例。図 5: 解析信号を用いずに Wigner 分布を適用した場合。

間・周波数分解能が得られることがわかる。ここで注意すべきことは、離散信号の場合、 $\tau/2$ に相当するサンプル点が普通は得られないことである。従って、上式を変形して

$$P(t, \omega) = 2 \int s(t + \tau) s^*(t - \tau) e^{-j2\omega\tau} d\tau \quad (17)$$

とし、FFT により得られたスペクトルを 1 点おきにサンプルする方法が取られる。この場合、もとの時系列のサンプル間隔は通常の Nyquist 間隔の半分以下に選んでおく必要がある。

また、(14) 式の Fourier 変換を離散的に行なう場合、そのまま計算を行なうと実信号の正負の周波数成分が干渉して図 5 のように不要成分が現れる。これを回避するため、図 4 では、 $s(t)$ のかわりに解析信号 $z(t)$ を用いている。以下、特にことわらない限り計算例はすべて同様である。

Wigner 分布のもう一つの特徴は、周辺分布を満たす、すなわち

$$\int P(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2 \quad (18)$$

$$\int P(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2 \quad (19)$$

が成り立つ、ということである。これは得られた時間・周波数分布から電力やパワースペクトル密度を定量的に評価する場合には重要な性質である。

Wigner 分布の問題点は、信号に複数の周波数成分が含まれる場合に干渉による偽の成分が現れることである。これは必ずしも同時に 2 つの周波数成分が含まれる場合に限らず、異なる時間に存在する場合にもあてはまることに注意が必要である。図 6 は、図 2 の two-tone 信号に Wigner 分布を適用した例である。信号の存在しない時間に 2 つの信号の中間の周波数を持つ偽像が現れている。

6 ambiguity 関数

Wigner 分布における偽像の問題が、平滑化を全く行なわないことによるのは明白である。これを改善するために、次節に述べるような様々の方法が提案されているが、最適な方法は

Wigner distribution

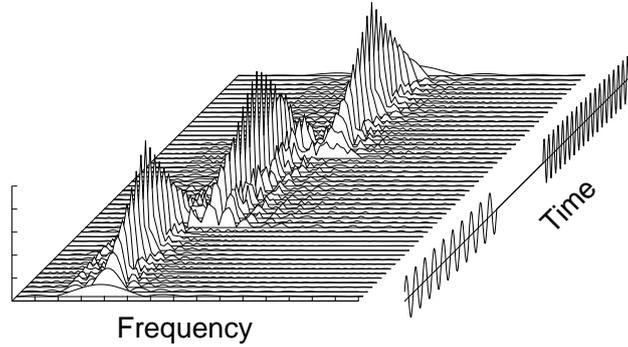


図 6: Wigner 分布による偽像の出現例。

対象とする信号の性質によって異なる。ここでは、時間・周波数領域における信号の性質を調べる方法について検討する。

信号の周波数領域における性質は (3) 式のパワースペクトルが、また時間領域における性質は (6) 式の自己相関関数が表すが、両者は Fourier 変換対の関係にある。自己相関関数を時間・周波数表現に拡張したものとして、次節に述べるように、主にレーダー技術の分野で次式の ambiguity 関数が用いられてきた [4]。

$$A(\theta, \tau) = \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\theta t} dt \quad (20)$$

Wigner 分布と ambiguity 関数の違いは、前者が時間遅れ τ について積分したものであるのに対して、後者は時間 t について積分している点である。

まず (20) 式において $\theta = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} A(0, \tau) &= \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt \\ &= \int s^*(t) s(t + \tau) dt \\ &= R(\tau) \end{aligned} \quad (21)$$

となり、 τ 軸に沿っては自己相関関数を与える。次に $\tau = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} A(\theta, 0) &= \int |s(t)|^2 e^{-j\theta t} dt \\ &= \int S^*(\omega) S(\omega + \theta) d\omega \end{aligned} \quad (22)$$

が得られる。これは周波数領域における自己相関関数に他ならない。 θ は τ と双対の関係にある変数で、周波数遅れと呼ばれる。これらの関係から $A(\theta, \tau)$ が、与えられた信号 $s(t)$ の時間・周波数領域における 2 次元の自己相関を表す関数であることがわかる。

(20) 式の定義から、 $A(-\theta, -\tau) = A^*(\theta, \tau)$ であるので、その特性を調べるには半平面について考えれば十分である。図 7 は、前出の two-tone 信号および chirp 信号に対して、 $|A(\theta, \tau)|$ を $\tau \geq 0$ の領域について描いたものである。two-tone 信号では各周波数の信号の自己相関

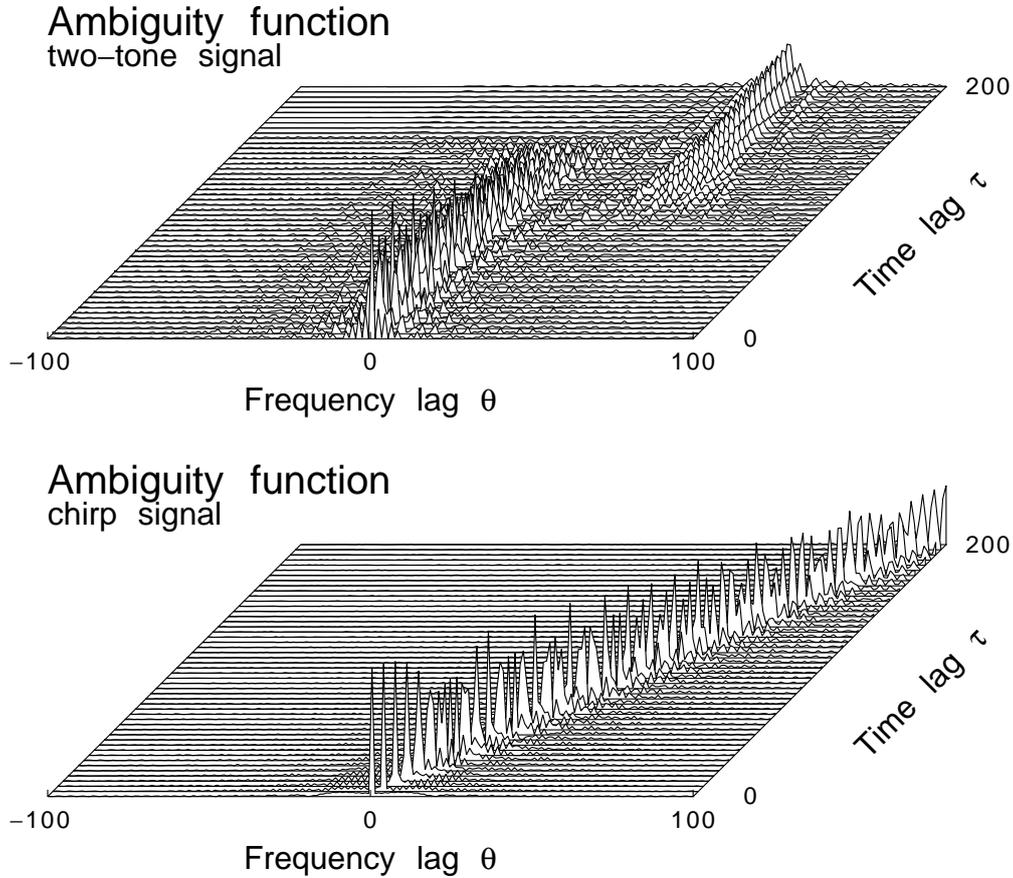


図 7: two-tone 信号および chirp 信号の ambiguity 関数。

成分、すなわち所望信号成分が τ 軸に沿って現れ、両者の干渉項が図の右上付近に現れているのがわかる。chirp 信号の場合は自己相関成分のみが原点から対角線に沿って広がる。

Wigner 分布と ambiguity 関数の間には、

$$A(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \int P(t, \omega) e^{-j(\theta t - \tau \omega)} dt d\omega \quad (23)$$

という関係が成り立つことが知られている [5]。すなわち、ambiguity 関数は Wigner 分布を時間と周波数に関して Fourier 変換したものである。

6.1 整合フィルタと ambiguity 関数

信号と雑音が混在するとき、S/N 比を改善するには受信周波数帯域を信号の周波数帯域に合わせて圧縮することが有効である。ここでは、この考えをさらに進めて、出力 S/N 比を最大化する受信フィルタについて考察する。フィルタの伝達関数を $H(\omega)$ とすると、出力 S/N 比は

$$(S/N) = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) H(\omega) d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \quad (24)$$

で与えられる。ここに N_0 は雑音電力密度である。上式の分子は、Parseval の公式より、時刻 0 におけるフィルタ出力信号の瞬時電力 $|s_h(0)|^2$ に等しく、分母は出力雑音電力である。ここで、Schwarz の不等式

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)H(\omega)d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2d\omega \quad (25)$$

より、

$$(S/N) \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2d\omega}{N_0} \quad (26)$$

であることが導かれる。式 (25) において左辺が最大となるのは、

$$H(\omega) = S^*(\omega) \quad (27)$$

がなり立つ場合である。すなわち、最適な受信フィルタとは、所望信号スペクトルの複素共役のスペクトル特性を持つフィルタであることがわかる。このフィルタを整合フィルタ (matched filter) と呼ぶ。整合フィルタは、単に所望信号を含む帯域を切り出すのではなく、所望信号の強度に応じて周波数に重みをつけて受信信号を処理することが S/N 比の観点からは最適であることを示している。整合フィルタのインパルス応答は

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega)e^{j\omega t}d\omega = s^*(-t) \quad (28)$$

であるから、信号を時間と位相について反転した関数となる。

整合フィルタの出力は $s(t)$ と $h(t)$ の畳み込み積分で与えられるから、

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-x)h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t')s(t'+t)dt' = \rho(t) \quad (29)$$

となり、所望信号の自己相関関数で与えられることがわかる。目標がある視線方向速度 v_d で運動している場合には、整合フィルタの出力はドップラ - 偏移 ω_d が加わり、

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t')s(t'+t)e^{j\omega_d t'} dt' = A(-\omega_d, t) e^{-j\frac{\omega_d t}{2}} \quad (30)$$

となって、ambiguity 度関数により表される。これは ambiguity 関数が、自己相関関数を時間・周波数表現に拡張したものであることから理解される。

7 Wigner 分布の平滑化

Wigner 分布を平滑化するには、平滑化関数 $\Phi(t, \omega)$ を用いて、時間と周波数に関する畳み込みを行えばよい。

$$\bar{P}(t, \omega) = \int \int \Phi(t-t', \omega-\omega')P(t', \omega')dt'd\omega' \quad (31)$$

平滑化された Wigner 分布 $\bar{P}(t, \omega)$ の 2 次元 Fourier 変換対を一般化 ambiguity 関数と呼ぶ [6]。

$$\bar{A}(\theta, \tau) = \phi(\theta, \tau)A(\theta, \tau) \quad (32)$$

ただし、

$$\phi(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \int \Phi(t, \omega) e^{-j(\theta t - \tau \omega)} dt d\omega \quad (33)$$

は平滑化関数の 2 次元 Fourier 変換対であり、核 (kernel) 関数と呼ばれる [1, 5]。

(32) 式は、ambiguity 関数を核関数で重み付けすることを表す。従って問題は最適な平滑化関数、または核関数を求めることに帰着する。最適な核関数とは、ambiguity 平面において信号自身の占める領域を完全に含み、偽像の領域では 0 となる関数である。核関数の広がりが大きいと、信号成分をよく表現するため高い分解能が得られるが、偽像を含みやすくなる。逆に核関数がデルタ関数に近づくと、偽像は排除されるが、分解能は低下する。Wigner 分布は $\phi(\theta, \tau) = 1$ の場合に相当する。

$\bar{P}(t, \omega)$ を $\phi(\theta, \tau)$ を用いて表すと、

$$\bar{P}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \int \int e^{-j\theta(t-t') - j\omega\tau} \phi(\theta, \tau) s(t' + \frac{\tau}{2}) s^*(t' - \frac{\tau}{2}) dt' d\tau d\theta \quad (34)$$

となる。時変自己相関関数

$$R(t, \tau) \equiv \frac{1}{2\pi} \int \bar{P}(t, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (35)$$

を用いると、

$$\bar{P}(t, \omega) = \int R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (36)$$

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \int e^{-j\theta(t-t')} \phi(\theta, \tau) s(t' + \frac{\tau}{2}) s^*(t' - \frac{\tau}{2}) dt' d\theta \quad (37)$$

と表現できる [1]。(36) 式は FFT により計算できるので、実際の計算では $R(t, \tau)$ を求めればよい。次にいくつかの例を示す。

7.1 平均化擬似 Wigner 分布 (SPWD)

平滑化関数として、

$$\Phi(t, \omega) = \Phi_1(t) \Phi_2(\omega) \quad (38)$$

のように時間と周波数の平滑化関数が分離した形を用いたものを平均化擬似 Wigner 分布 (Smoothed Pseudo Wigner Distribution、以下 SPWD と略す) と呼ぶ [5]。

よく用いられるのは

$$\Phi(t, \omega) = \exp\left(-\frac{t^2}{\alpha^2} - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) \quad (39)$$

の Gauss 型関数である。この場合核関数は

$$\phi(\theta, \tau) = \pi\alpha\beta \exp\left(-\frac{\alpha^2\theta^2}{4} - \frac{\beta^2\tau^2}{4}\right) \quad (40)$$

となる。このとき $R(t, \tau)$ は、

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\pi}\beta \exp\left(-\frac{(t-t')^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2\tau^2}{4}\right) s(t' + \frac{\tau}{2}) s^*(t' - \frac{\tau}{2}) dt' \quad (41)$$

Smoothed-Wigner: $\alpha= 4.0, \beta= 1.0$ Smoothed-Wigner: $\alpha= 8.0, \beta= 2.0$

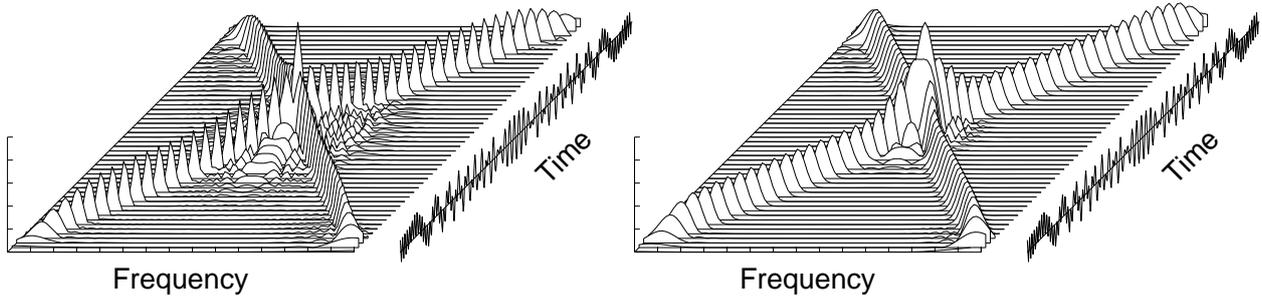


図 8: cross-chirp 信号に SPWD 法を適用した例。

で与えられる。

この方法は、周波数方向と時間方向の分解能を独立に選ぶことができるのが特徴である。例えば chirp 信号については α, β を共に小さく選ぶことによって、Wigner 分布に近い分解能が得られる。しかし、干渉を生じる信号の場合は偽像を抑えるようにこれらのパラメータを選ぶ必要がある。図 8 は、2 種の chirp 信号が交差する信号 (cross-chirp 信号) について、平滑度を変えた結果である。ここで図中に示した α および β の値は、それぞれ図の時間および周波数サンプル間隔を単位とした数値である。

7.2 Choi-Williams 分布

SPWD の平滑化により、Wigner 分布の欠点であった偽像の問題は改善されるが、Wigner 分布の持っていた周辺分布を満たす性質 ((18) 式、(19) 式) は満たされなくなった。これらを満たしつつ平滑化を行なう方法として提案されたものに、Choi-Williams 分布 [6] がある。これは核関数を

$$\phi(\theta, \tau) = \exp\left(-\frac{\theta^2 \tau^2}{\sigma}\right) \quad (42)$$

とする方法である。このとき $R(t, \tau)$ は、

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2/\sigma}} \exp\left(-\frac{(t-t')^2}{4\tau^2/\sigma}\right) s\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) dt' \quad (43)$$

となる。

この方法では平滑度はパラメータ σ により制御される。図 9 は cross-chirp 信号にこれを適用した例である。 σ を大きくすると Wigner 分布に近づき、小さくすると分解能は低下するが偽像が抑圧される。

ただし、この方法では核関数が時間軸および周波数軸に沿っては常に全領域に広がるので、これらの軸上に干渉成分が存在する場合は影響が大きい [5]。図 10 はそれぞれ同一時間と同一周波数に局在する 2 組の成分より構成される信号について Choi-Williams 分布と SPWD を

Choi-Williams: $\sigma = 2.0$

Choi-Williams: $\sigma = 10.0$

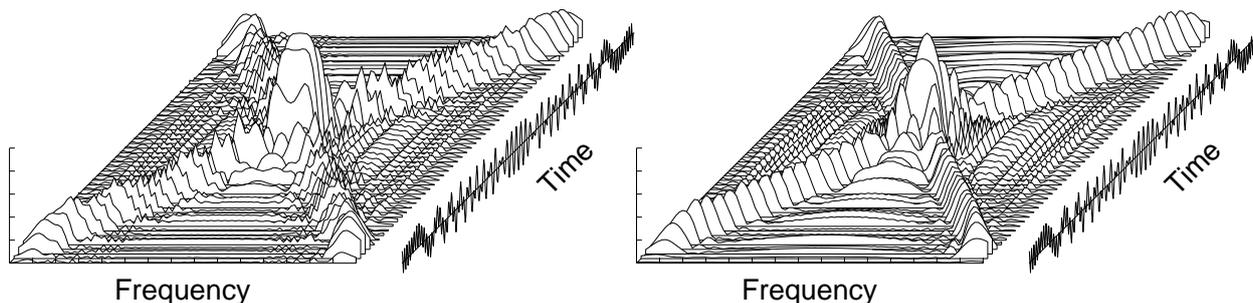


図 9: cross-chirp 信号に Choi-Williams 分布を適用した例。

Choi-Williams: $\sigma = 0.5$

Smoothed-Wigner: $\alpha = 5.0, \beta = 3.0$

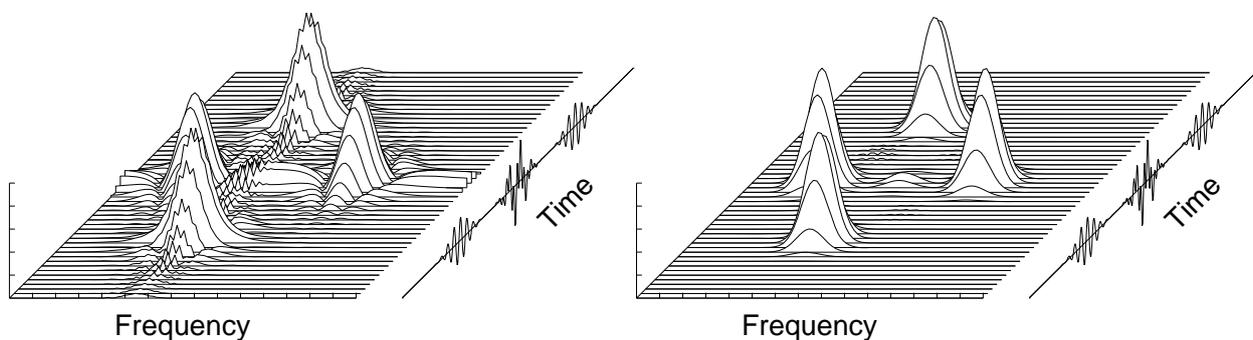


図 10: Choi-Williams 分布と SPWD の比較。

比較したものである。一般に、瞬時電力やパワースペクトルを定量的に議論する必要がない場合には、2パラメータを独立に選択できる SPWDの方がよい分解能と偽像の抑圧を得られることが多いが、最適な組合せを選ぶことは簡単ではない。また、最適な平滑化法は対称とする信号の性質によって異なることが指摘されている [7]。

7.3 平滑化 Wigner 分布としての spectrogram

STFTにより求めた spectrogram も、平滑化 Wigner 分布と考えることができる。spectrogram と Wigner 分布の関係は

$$|S(t, \omega)|^2 = \int \int P_g(t' - t, \omega' - \omega) P(t', \omega') dt' d\omega' \quad (44)$$

で与えられる [5]。ここに $P_g(t, \omega)$ は、窓関数 $g(t)$ 自身の Wigner 分布である。すなわち、この場合の平滑化関数は

$$\Phi(t, \omega) = P_g(-t, -\omega) = \int g(-t + \frac{\tau}{2}) g^*(-t - \frac{\tau}{2}) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (45)$$

となる。例えば窓関数として Gauss 型関数

$$g(t) = e^{-t^2/\gamma^2}$$

を選ぶと、

$$\Phi(t, \omega) = \sqrt{2\pi}\gamma \exp\left(-\frac{2t^2}{\gamma^2} - \frac{\gamma^2\omega^2}{2}\right) \quad (46)$$

となる。これは (39) 式において $\alpha = \gamma/\sqrt{2}$ 、 $\beta = \sqrt{2}/\gamma$ とおいた場合にあたる。すなわち、 $\alpha\beta = 1$ という制約を加えた場合に相当する。これが STFT 法における時間・周波数分解能の不確定性を表す。

上の計算例では時間および周波数サンプル間隔には $\Delta t\Delta\omega = 2\pi/200$ の関係があるので、図中のパラメータでは $\alpha\beta \simeq 32$ とすることに相当する。これと比較すると、これまでに示した SPWD の計算例の分解能は時間・周波数分解能の積にして 2 倍から 8 倍高いことがわかる。

7.4 Polynomial Wigner-Ville 分布

Wigner 分布 (Wigner-Ville Distribution; WVD) の問題点として

- 複数の周波数成分を含む信号に弱い
- 周波数の非直線的变化に弱い

ことがあげられる。このうち、後者の改善に有効な方法として、PWVD(Polynomial WVD) が提案された [8]。

解析信号 $z(t) = e^{j\phi(t)}$ の WVD は、

$$W_z(t, f) = \mathcal{F}\left[z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = \mathcal{F}\left[e^{j\{\phi(t+\tau/2) - \phi(t-\tau/2)\}}\right] \quad (47)$$

で与えられる。この時の瞬時周波数 $f_i(t, \tau)$ は

$$f_i(t, \tau) = \{\phi(t + \tau/2) - \phi(t - \tau/2)\}/2\pi\tau \quad (48)$$

となるが、これは単純差分フィルタに相当するため、線形 FM 以外ではスプリアス応答を生じる。

位相が多項式

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^p a_i t^i \quad (49)$$

で与えられる時、瞬時周波数は次のフィルターにより推定される。

$$f_i(t, \tau) = \frac{1}{2\pi\tau} \sum_{k=-q/2}^{q/2} b_k \phi(t + c_k \tau) \quad (50)$$

これに対応する Polynomial WVD は

$$W_z^g(t, f) = \mathcal{F}[K_z^g(t, \tau)] \quad (51)$$

$$K_z^g(t, \tau) = \prod_{k=-q/2}^{q/2} [z(t + c_k \tau)]^{b_k} \quad (52)$$

の形となり、非線形に瞬時周波数が変化する信号に対してもよく追従することが知られている。

7.5 Time-Frequency Peak Filtering

また、複数の信号が同時に存在する場合に適用できる手法として、Time-Frequency Peak Filtering[9] が提案されている。これは、信号が 1 価関数であることに着目し、与えられた信号を瞬時周波数とする時系列を生成すれば、これは常に単一周波数信号となることに注目し、これに WVD を適用して雑音除去する、という方法である。

所望信号を確定信号 $x(t)$ とランダム雑音 $n(t)$ の和とする。

$$s(t) = x(t) + n(t) \quad (53)$$

これを瞬時周波数とする解析信号は、

$$y_s(t) = e^{j2\pi \int_{-\infty}^t s(\lambda) d\lambda} = y_x(t) y_n(t) \quad (54)$$

$$y_x(t) = e^{j2\pi \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda} \quad (55)$$

$$y_n(t) = e^{j2\pi \int_{-\infty}^t n(\lambda) d\lambda} \quad (56)$$

となる。 $y_s(t)$ の WVD を求めれば、それが最大となる周波数は、ほぼ $x(t)$ に対応する。

8 wavelet 変換

前章で紹介した方法は、いずれも時間・周波数分解能が時間・周波数空間において一定であるという性質を持つ。しかし実際の解析では、低い周波数成分は時間変化がゆるやかであり、高い周波数成分は時間変化も激しいと考えてよい場合が多い。この場合には、信号成分の周波数に応じて時間分解能を変化させることにより、それぞれの成分に対して最適な時間・周波数分解能を得ることができる。このような性質を持つのが wavelet 変換である。

8.1 連続 wavelet 変換

wavelet 変換は

$$W(t, a) = \int s(t') \frac{1}{\sqrt{a}} h^* \left(\frac{t' - t}{a} \right) dt' \quad (57)$$

Scalogram: $\gamma= 5.0$

Scalogram: $\gamma= 20.0$

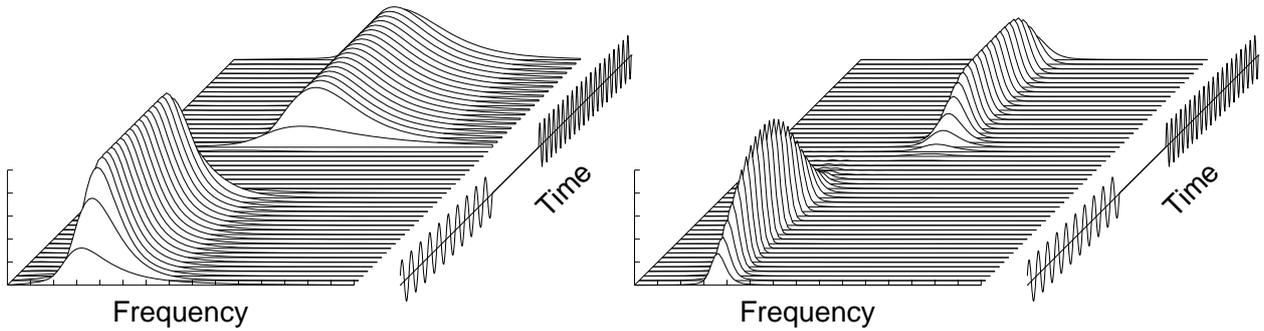


図 11: two-tone 信号の scalogram の例。ただし横軸はスケール a を周波数 ω に換算したものである。

で与えられる [10, 11]。ここで $h(t)$ は、 $t = 0$ 付近に局在する帯域通過型関数で、analysis wavelet と呼ばれる。 a はスケールと呼ばれ、 $h(t)$ の中心周波数を ω_0 とすると $a = \omega_0/\omega$ である。 t はシフトと呼ばれる。wavelet 変換と STFT の関係を明らかにするために、

$$h(t) = g(t)e^{-j\omega_0 t} \tag{58}$$

とおくと、(57) 式は

$$W(t, \omega) = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} e^{j\omega t} \int s(t') g^* \left(\frac{\omega}{\omega_0} (t' - t) \right) e^{-j\omega t'} dt' \tag{59}$$

と書くことができる。これは (11) 式において窓関数 $g(t)$ を周波数に比例して伸縮させたことに相当する。STFT の場合における spectrogram と対応して、 $|W(t, a)|^2$ を scalogram と呼ぶ。図 11 に、 $g(t) = \exp(-t^2/\gamma^2)$ とおいた場合の scalogram の例を示す。scalogram においても、spectrogram と同様の時間・周波数分解能の不確定性が存在する。しかし図 11 を図 2 と比較すると、scalogram では低い周波数成分に対しては高い周波数分解能が、高い周波数成分に対しては高い時間分解能が得られていることがわかる。

8.2 平滑化 Wigner 分布としての scalogram

spectrogram の場合と同様に、scalogram も平滑化された Wigner 分布とみなせることが知られている [5, 11]。すなわち、

$$|W(t, a)|^2 = \int \int P_h \left(\frac{t' - t}{a}, a\omega' \right) P(t', \omega') dt' d\omega' \tag{60}$$

ここに $P_h(t, \omega)$ は analysis wavelet $h(t)$ 自身の Wigner 分布である。 a を ω に置き換えると、

$$|W(t, \omega)|^2 = \int \int P_h \left(\frac{\omega}{\omega_0} (t' - t), \omega_0 \frac{\omega'}{\omega} \right) P(t', \omega') dt' d\omega' \tag{61}$$

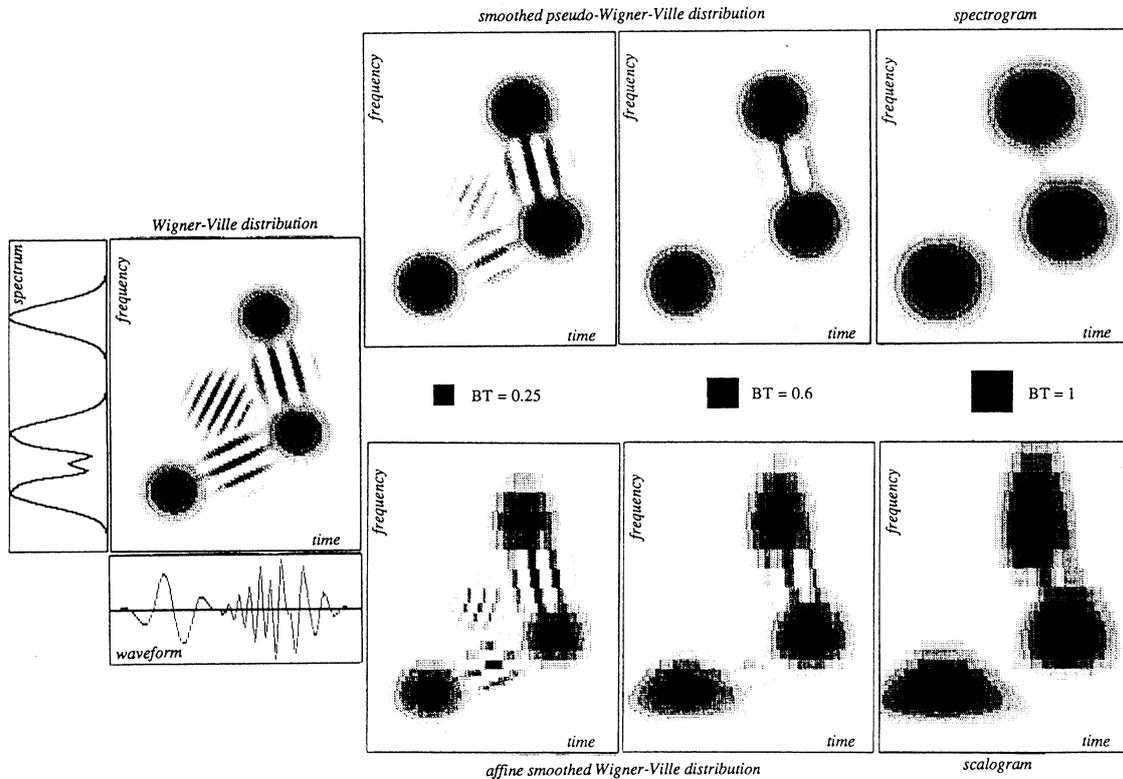


図 12: 平滑化された Wigner 分布としての spectrogram と scalogram。

この場合の平滑化は、低い周波数ほど広い時間範囲について行なわれるので、「affine 平滑化」と呼ばれる。

affine 平滑化 Wigner 分布の一般形は

$$\tilde{P}_a(t, \omega) = \int \int \Psi \left(\omega(t - t'), \frac{\omega'}{\omega} \right) P(t', \omega') dt' d\omega' \quad (62)$$

と書くことができる [5]。wavelet 変換は、上式で

$$\Psi_a(\alpha, \beta) = P_h \left(-\frac{\alpha}{\omega_0}, \omega_0 \beta \right) \quad (63)$$

$$= \int h \left(-\frac{\alpha}{\omega_0} + \frac{\tau}{2} \right) h^* \left(-\frac{\alpha}{\omega_0} - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega_0 \beta \tau} d\tau \quad (64)$$

と置いた場合にあたる。

7章の議論と全く同様に、affine 平滑化についても、平滑化関数 Ψ_a を工夫することによってさまざまな方法が実現できる。特に、scalogram は spectrogram と同じく平滑化を最大限に行なった方法であるので、偽像の問題を生じないかわりに分解能は低いことに注意すべきである。図 12 は、時間・周波数帯域幅 (BT) 積 ((39) 式における $\alpha\beta$ に相当する) をパラメータとして、Wigner 分布 (BT=0) から通常の平滑化と affine 平滑化により、それぞれ spectrogram と scalogram (BT=1) が得られる過程を示したものである [12]。

8.3 離散 wavelet 変換

(57) 式における a (あるいは ω) と t は連続量であり、上の計算例ではこれを等間隔にサンプルして離散化している。しかし、wavelet 変換における時間分解能は周波数に逆比例するので、これを時間・周波数空間で等間隔にサンプルするのは明らかに冗長である。与えられた N 点の時系列信号の持つすべての自由度は、時間・周波数領域においても N 点で表現されるべきである。また、エネルギーを議論するためには、これらの振幅について (18) 式および (19) 式を離散化した周辺分布の保存関係が成り立つ必要がある。これらの条件を満たすためには、変換の基底となる wavelet が正規直交基底を構成するように analysis wavelet の関数形を選ぶ必要がある。このような関数は一意には定まらず、多数が知られているが、ここでは実際の計算に便利な周波数領域で有限のサポートを持つ Meyer の方法を紹介する [13]。

まず (57) 式は

$$W(t, a) = \int s(t') h_{a,t}^*(t') dt' \quad (65)$$

$$h_{a,t}(t') = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t' - t}{a}\right) \quad (66)$$

と書ける。これを、それぞれの周波数における時間分解能に比例するようサンプル間隔を選んで離散化すると

$$w_{i,k} = \int s(t) h_{i,k}^*(t) dt \quad (67)$$

$$h_{i,k} = 2^{i/2} h(2^i t - k) \quad (68)$$

となる。ここで $h_{i,k}$ が正規直交系を構成すれば、逆に

$$s(t) = \sum_i \sum_k w_{i,k} h_{i,k}(t) \quad (69)$$

の関係が得られる。

Meyer の analysis wavelet は、周波数領域において

$$H(\omega) = e^{-j\omega/2} \sqrt{J(\omega/2)^2 - J(\omega)^2} \quad (70)$$

で与えられる。ここに

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \sqrt{K(\omega)K(-\omega)} \\ K(\omega) &= \frac{L(4\pi/3 - \omega)}{L(\omega - 2\pi/3) + L(4\pi/3 - \omega)} \\ L(\omega) &= \begin{cases} \exp(-1/\omega^2) & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega \leq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

である。時間領域における表現 $h(t)$ は逆 Fourier 変換によって得られる。図 13 に $h(t)$ および $H(\omega)$ の関数形を示す。定義および図からわかるように、 $H(\omega)$ は $2\pi/3 \leq |\omega| \leq 8\pi/3$ の範囲でのみ 0 でない値を持つ。図より $h(t)$ は、 $t=0$ ではなく $t=1/2$ に関して対称であることがわかる。これは、analysis wavelet が、区間 $(0, 1)$ の信号を代表するものであることによる。

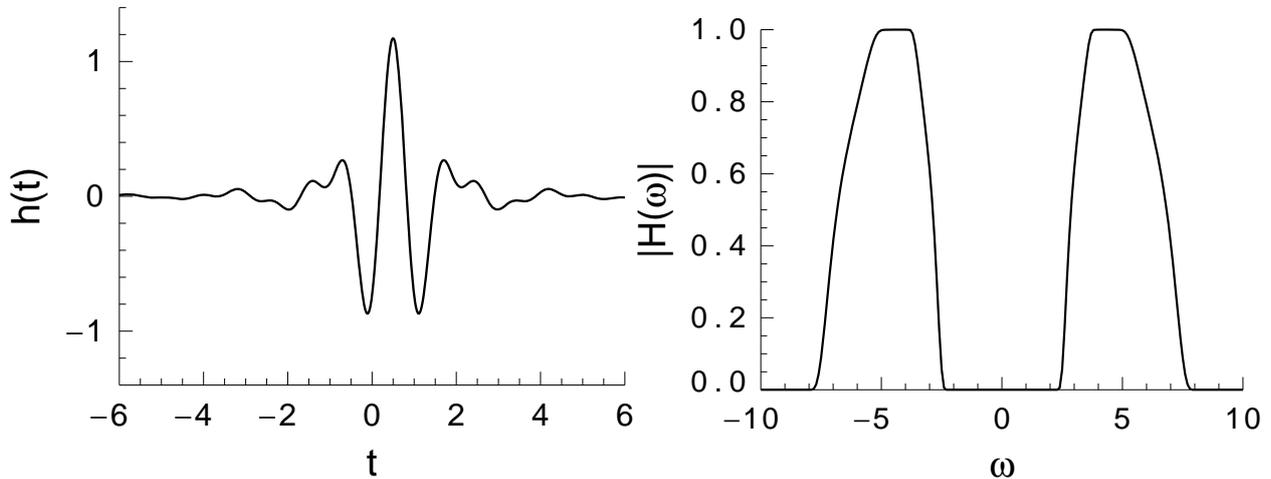


図 13: 正規直交基底を構成する analysis wavelet の例とその Fourier 変換。

実際の離散時系列について wavelet 係数 $w_{i,k}$ を求めるには、(67) 式の計算を行なう必要があるが、これは $s(t)$ と、 $h(t)$ をスケールリングしたものととの畳み込み演算に相当する。従って、これをそのまま行なうより $s(t)$ を FFT により周波数領域に変換し、 $H(\omega)$ をスケールリングしたものととの積を逆 FFT する方が効率的である。このとき Meyer の wavelet では、 $H(\omega)$ が 0 でない点のみについて計算をすればよいので、さらに高速化が可能である。

9 まとめ

時変スペクトル信号の処理に用いられる各種の方法のあらましを述べた。時間分解能と周波数分解能に対する要求が相反しない場合は、古典的な STFT 法による spectrogram を用いればよい。Wigner 分布は最も高い分解能を有するが、なだらかに周波数が変化する正弦波のような場合以外には偽像が問題となり、そのままの実用性は低い。また、Wigner 分布が問題なく適用できる場合には解析信号を用いて瞬時周波数を決定する方法が有効である。

偽像の問題を解決するには時間・周波数領域における平滑化が必要である。信号成分の分離という観点からは SPWD 法が比較的よい特性を示すことが多い。ただし、最適な平滑化法は信号の性質に依存し、一般的な方法はまだない。与えられた信号の性質を調べるには ambiguity 関数が有効である。

最後に、周波数分解能を信号の周波数に比例させる解析法として wavelet 変換を示し、scalogram と spectrogram や Wigner 分布の関係について述べた。また、正規直交基底を用いた離散化法を紹介した。

今後の研究においては、一般性を持つ適応型平滑化法の開発と、wavelet 変換のような affine 平滑化法と通常の平滑化法の統合が大きな課題であろう。

参考文献

以下にあげた参考文献は必ずしも原論文ではなく、入手しやすいものに重点を置いてある。時間周波数分布に関する主要な文献は [1, 5, 11] の3つの総説である。特に [5] が詳しく、またよく整理されている。

- [1] L. Cohen, Time-frequency distributions—A review, *Proc. IEEE*, Vol.77, pp.941–981, 1989.
- [2] 南, 河田, 時間で特性が変化する信号の新解析手法, *インターフェース*, pp.110–121, Jan. 1994.
- [3] R. C. Singleton, An algorithm for computing the mixed radix fast Fourier transform, *IEEE AU-17*, pp.93, 1969.
- [4] M.I. Skolnik, *Introduction to radar systems*, McGraw Hill, New York, 1980.
- [5] F. Hlawatsch and G.F. Boudreaux-Bartels, Linear and quadratic time-frequency signal representations, *IEEE Sig. Proc. Mag.*, Vol.9, pp.21–67, 1992,
- [6] H-I Choi and W.J. Williams, Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels, *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Proc.*, Vol.37, pp.862–871, 1989.
- [7] D.L. Jones and T.W. Parks, A resolution comparison of several time-frequency representations, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.40, pp.413–420, 1992.
- [8] B. Boashash and P. O’Shea, Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, No. 1, pp. 216–220, 1994.
- [9] M.J. Arnold and B. Boashash, Time-Frequency Peak Filtering: A non-model based signal enhancement scheme, *Proc. Int. Symp. Information Theory and its Applications*, pp. 671–676, 1994.
- [10] C.K. Chui (桜井, 新井訳), *ウェーブレット入門*, 東京電機大学出版局, 1993.
- [11] O. Rioul and M. Vetterli, Wavelets and Signal processing, *IEEE Sig. Proc. Mag.*, Vol.8, pp.14–38, 1991.
- [12] O. Rioul and P. Flandrin, Time-scale energy distributions: A general class extending wavelet transforms, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol.40, pp.1746–1757, 1992.
- [13] M. Yamada and K. Ohkitani, Orthonormal wavelet analysis of turbulence, *Fluid Dyna. Res.*, Vol.8, pp.101–115, 1991.