

UWB パルスレーダのための線形アレイを用いた 高解像度立体形状推定法の実験的検討

木寺 正平[†] 可児 佑介[†] 阪本 卓也[†] 佐藤 亨[†]

[†] 京都大学大学院 情報学研究科
〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町
E-mail: †kidera@aso.cce.i.kyoto-u.ac.jp

あらまし UWB パルスレーダによる画像化手法は高い距離分解能を有し、アンテナ鏡面等の空間精密計測や室内ロボットの環境計測に有用である。上記用途に適する高速立体形状推定法として、以前に我々は SEABED 法を提案している。この手法は受信データと物体境界面との間に成立する可逆な変換関係を用いて高速な画像化を実現する。しかし SEABED 法は送受信素子の 2 次元平面走査を仮定するため、データ取得時間が長い。この問題に対し、本稿では線形アレイアンテナを用いた高速・高解像度立体像推定システムを提案し、アレイの 1 次元走査によりデータ取得時間を短縮する。更に境界散乱変換をバイスタティック型へ拡張し、アレイアンテナへ適用することで高解像度形状推定を実現する。本稿では数値計算及び実験により、提案手法の特性評価を行う。

キーワード UWB パルスレーダ, 高速・高解像度立体推定, バイスタティックレーダ, 線形アレイアンテナ

An Experimental Study for a High-resolution 3-D Imaging Algorithm with Linear Array for UWB Radars

Shouhei KIDERA[†], Yuusuke KANI[†], Takuya SAKAMOTO[†], and Toru SATO[†]

[†] Graduate School of Informatics, Kyoto University
Yoshida Honmachi, Sakyou-ku, Kyoto, 606-8501, Japan
E-mail: †kidera@aso.cce.i.kyoto-u.ac.jp

Abstract Pulse radars with UWB signals are promising as a high-resolution imaging technique that can be used for a non-destructive measurement of surface details on reflector antennas. We previously proposed a fast 3-D imaging algorithm, SEABED, that utilizes a reversible transform between the time delay and the target boundary. However, data acquisition is time-consuming when obtaining a high-resolution image because it assumes a mono-static radar with 2-D scanning of an antenna. In this paper, we utilize linear array antennas and propose a fast and high-resolution imaging algorithm. We extend the reversible transform for mono-static radars to apply to bi-static radars to reduce the data acquisition time. The effectiveness of the proposed method is verified with numerical simulations and experiments.

Key words UWB pulse radars, Fast and high-resolution imaging, Bi-static radar, Linear array antennas

1. はじめに

アンテナ鏡面等の精密な表面形状を有する工業製品の計測技術として、高い距離分解能を有する UWB パルスレーダが有望である。この技術は将来、室内用ロボットのための近傍環境計測への応用も期待されている。しかし従来のレーダ画像化手法では膨大な計算時間を要し、上記用途への応用は困難であった [1] ~ [4]。これを解決する高速立体形状推定法として、我々は

以前に SEABED 法を提案している [5] ~ [7]。SEABED 法は受信信号と目標形状との可逆な変換関係 (境界散乱変換) を利用し、受信波形画像から抽出される波面より直接的に境界面を推定する。しかし本手法は、送受信素子の 2 次元平面走査を仮定するため、十分な解像度を得るには長大なデータ取得時間を要する。この問題に対して、本稿では線形アレイアンテナを用いた高速・高解像度立体像推定システムを提案する。しかしモノスタティックレーダを仮定する従来の SEABED 法の推定点数

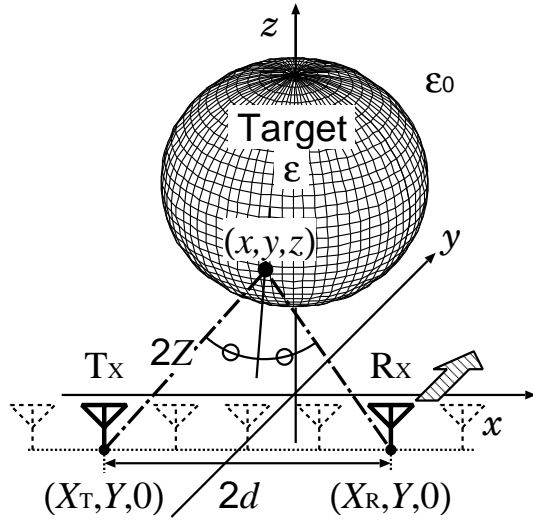


図1 システムモデル
Fig.1 System model.

は、アレイアンテナ素子数に制限される。また素子間相互結合を回避するため、アレイ素子間隔を半波長以上とする必要があり、分解能が十分高くとれない。このため、境界散乱変換をバスタティックレーダへ拡張し、これをアレイアンテナへ適用することによって、推定点を飛躍的に増大させる。本稿では数値計算及び実験により、少ない素子数を用いる場合でも、提案手法によって高速かつ高解像度立体像推定が可能となることを示す。

2. システムモデル

図1にシステムモデルを示す。目標物体は明瞭な境界を持つとする。伝搬空間は非分散等方性媒質とし、伝搬速度は既知かつ一定とする。送信電流はモノサイクルパルスとし、その中心波長 λ 及び周期で空間及び時間を正規化する。偏波は x 方向の直線偏波を仮定する。 $z = 0$ 平面上に無指向性アンテナを、 x 軸方向へ等間隔配置する。アレイアンテナを y 軸方向へ直線走査する。アンテナ及び目標物体が存在する空間を r 空間とし、 (x, y, z) で表わす。簡単のため、目標は $z > 0$ に存在すると仮定する。送信及び受信素子位置をそれぞれ $(x, y, z) = (X_T, Y, 0)$ 、 $(X_R, Y, 0)$ とし、 $s'(X_T, X_R, Y, Z')$ を受信電界とする。ここで $Z' = ct/2\lambda$ 、 t は時間、 c 光速である。 $s(X_T, X_R, Y, Z')$ を整合フィルタ出力波形とする。各 X_T 、 X_R 及び Y における $s(X_T, X_R, Y, Z')$ の有意なピーク値に対する Z' を抽出し、 Z とする。 (X_T, X_R, Y, Z) で構成される曲面を擬似波面と呼び、これを d 空間と定義する。本稿では d 空間から r 空間への変換により目標形状推定を実現する。

3. 画像化アルゴリズム

3.1 従来手法

我々は既に高速立体形状推定法として SEABED 法を提案している。この手法はモノスタティックレーダを平面内で走査する。これを前提とする。モノスタティックシステムの場合は $X = X_T = X_R$ とおける。この時、物体境界面 (x, y, z)

と擬似波面 (X, Y, Z) との間に境界散乱変換 (BST: Boundary Scattering Transform) が成立する [7]。BST は可逆変換であり、逆変換 (IBST: Inverse BST) は次式で表現される。

$$\left. \begin{aligned} x &= X - ZZ_X \\ y &= Y - ZZ_Y \\ z &= Z\sqrt{1 - Z_X^2 - Z_Y^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $Z_X = \partial Z / \partial X$ 、 $Z_Y = \partial Z / \partial Y$ であり、 $1 - Z_X^2 - Z_Y^2 \geq 0$ を満たす。IBST は、仮定する逆問題に対する厳密な解を与え、受信信号により抽出される (X, Y, Z) より、本変換を用いて直ちに物体境界 (x, y, z) が得ることから、高速な処理を実現する。しかし、本手法は送受信素子の2次元平面走査を仮定しており、高解像度推定を保持するには、多大なデータ取得時間を要する。

3.2 提案手法

前節で述べる問題に対し、本稿では線形アレイアンテナを用いた高速・高解像度形状推定法を提案する。まず境界散乱変換をバスタティックレーダへ拡張する。送受信間隔を $2d$ とする。送受信素子中心位置を $(x, y, z) = ((X_T + X_R)/2, Y, 0)$ とする。図1に示す通り、送受信素子位置に関して反射の法則を満たす散乱点を (x, y, z) とする。 $2Z$ は伝搬距離である。図1に示す幾何学的条件より、 (x, y, z) から (X, Y, Z) への変換は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X &= x + \frac{2z_x(z^2 + z^2 z_x^2 + d^2)}{z(1 - z_x^2 + z_y^2) + \sqrt{z^2(1 + z_x^2 + z_y^2)^2 + 4d^2 z_x^2}} \\ Y &= y + z z_y \\ Z &= \sqrt{z^2(1 + z_y^2) + z z_x(X - x) + d^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで $z_x = \partial z / \partial x$ 、 $z_y = \partial z / \partial y$ である。式(2)をバスタティック型境界散乱変換 (BBST: Bi-static BST) と呼ぶ。また (X, Y, Z) から (x, y, z) への変換は以下となる。

$$\left. \begin{aligned} x &= X - \frac{2Z^3 Z_X}{Z^2 - d^2 + \sqrt{(Z^2 - d^2)^2 + 4d^2 Z^2 Z_X^2}} \\ y &= Y + Z_Y \{d^2(x - X)^2 - Z^4\} / Z^3 \\ z &= \sqrt{Z^2 - d^2 - (y - Y)^2 - \frac{(Z^2 - d^2)(x - X)^2}{Z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)をIBBST (Inverse BBST) と呼ぶ。式(2)と(3)は可逆変換となる(付録参照)。上記の変換を用いることによって、バスタティックレーダにおいても高速な境界推定が可能となる。

3.3 提案手法の実手順

以下の手順により、IBBST を線形アレイシステムに適用する。アレイアンテナ本数を N_X 、アンテナ間隔を ΔX とする。ここで $k = 0$ とする。

手順1). 受信信号 $s'(X_T, X_R, Y, Z')$ に対し、整合フィルタ出力波形 $s(X_T, X_R, Y, Z')$ を得る。

手順2). $s(X_T, X_R, Y, Z')$ の振幅が閾値以上のピーク点を接続し、擬似波面 (X_T, X_R, Y, Z) を得る。

手順3). $2d = k\Delta X$ とおく。 (X_T, X_R, Y, Z) から $X =$

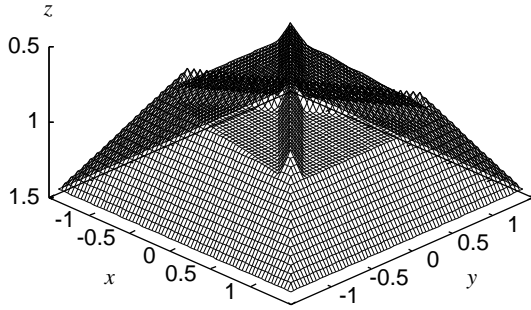


図 2 真の目標形状

Fig.2 Assumed target boundary.

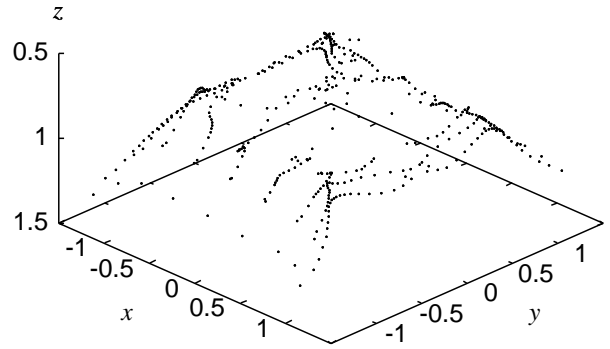


図 5 従来手法による推定像 (擬似波面未知)

Fig.5 Estimated image with the conventional method (quasi wavefront is unknown).

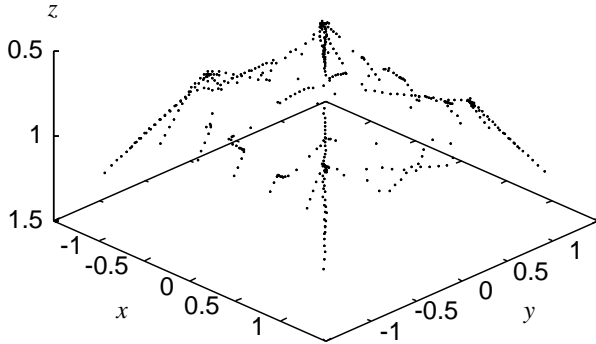


図 3 従来手法による推定像 (擬似波面既知)

Fig.3 Estimated image with the conventional method (quasi wavefront is known).

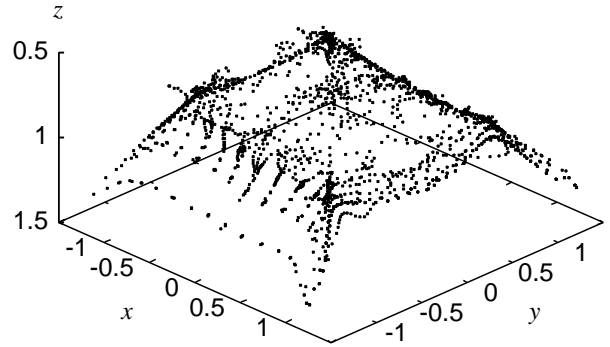


図 6 提案手法による推定像 (擬似波面未知)

Fig.6 Estimated image with the proposed method (quasi wavefront is unknown).

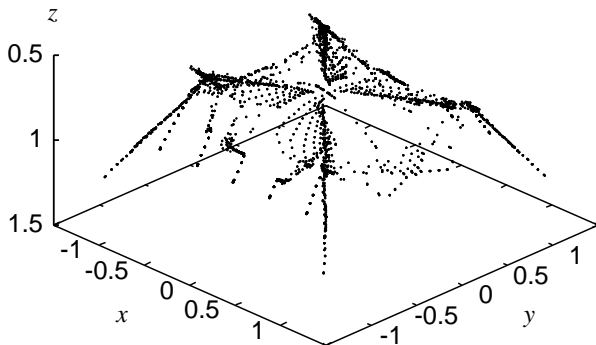


図 4 提案手法による推定像 (擬似波面既知)

Fig.4 Estimated image with the proposed method (quasi wavefront is known).

$(X_T + X_R)/2$ 及び $X_R = X_T + 2d$ を満たす曲面を (X, Y, Z, d) として抽出する。

手順 4). (X, Y, Z, d) に IBBST を適用し、境界面 (x, y, z) を得る。

手順 5). $k = k + 1$ とし、 $k \leq N_X - 1$ を満たす場合は手順 3) へ戻る。満たない場合は処理を完了する。

送受信素子の組み合わせによって各散乱経路が異なることから、提案手法では互いに独立する推定点を多数得ることができる。よって少ないアレイ素子数を用いる場合でも、アレイ軸方向に推定点数が増大することから、高解像度形状推定を実現することが可能となる。

4. 形状推定評価

4.1 数値計算による特性評価

以下では数値計算を用いた形状推定評価について述べる。図 2 に真の目標境界面を示す。アレイアンテナを $-2.0\lambda \leq x \leq 2.0\lambda$ の範囲に設置する。アレイ素子間隔は 0.4λ とし、素子数は $N_X = 11$ である。アレイアンテナを $-2.0\lambda \leq y \leq 2.0\lambda$ の範囲でアレイに直交する方向へ直線走査する。観測点数は $N_Y = 51$ とする。ここでは雑音を考慮せず、かつ擬似波面が既知の場合を仮定する。図 3 は従来手法の推定像を示す。推定点数は 459 である。同図より x 軸方向の解像度は低く、目標境界面上の詳細を再現することが困難となる。これは x 軸方向の推定点数が N_X へ制限されるためである。一方、図 4 は提案手法による推定像を示す。推定点数は 2754 である。 x 軸方向に飛躍的に推定点数を増大させることから、高い分解能を有し、境界面上部の詳細を再現することが可能となる。よって提案手法により、アンテナ素子数を増大させることなく高解像度形状推定が可能となる。但し、両図における推定点の僅かな誤差は数値微分誤差に因る。

次に実計算波形を用いた場合の特性評価を示す。ここでも雑音を考慮しない。整合フィルタ通過後の出力波形 $s(X_T, X_R, Y, Z')$ より擬似波面を抽出する。図 5 及び 6 はそれぞれ従来手法及び提案手法による推定像を示す。各推定点数は、432 点及び 1920 点である。両図より提案手法では、従来と比較し高解像度推定

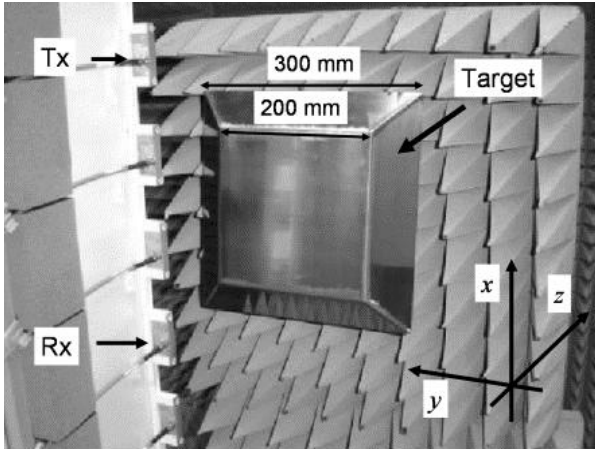


図 7 線形アレイと目標物体

Fig. 7 Linear array antennas and the target.

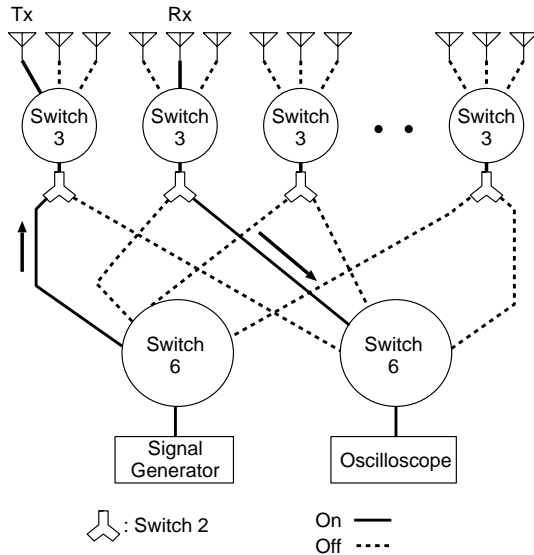


図 8 アンテナと切替スイッチの配置

Fig. 8 Arrangement of high-frequency relays and antennas.

が可能となり、目標境界上部の詳細をある程度認識することができる。しかしながら図 4 と比較し、特にエッジ付近で推定精度の劣化が確認される。これは送信波形と受信波形が相違することから、整合フィルタによる擬似波面抽出に誤差が生じることに起因する。本波形歪みを波形推定を用いて補償し、更に推定精度を改善する手法が今後必要である [8], [9]。本手法の計算時間は、受信データ取得後、Xeon 3.2 GHz Processor で約 30 msec と非常に高速な処理を実現する。

4.2 実験による形状推定評価

本節では、実験を用いた提案手法の特性評価を与える。図 7 は線形アレイアンテナ、目標物体及び実験の座標系を示す。本実験では 3.2 GHz 及び 10dB 帯域幅 2.0 GHz を有する UWB 信号を用いる。アンテナは縦横軸比 17dB の偏波特性を有し、 x 軸方向への直線偏波をこの楕円偏波で近似する。アンテナビーム幅は、約 90° である。同図に示す通り、線形アレイアンテナを x 軸方向へ設置する。アレイ素子数は 18 及び素子間隔は 100 mm である。同素子間隔は、送信中心波長の 1.1 倍に相当する。アレイアンテナを $-300 \text{ mm} \leq y \leq 300 \text{ mm}$ の範囲で走査す

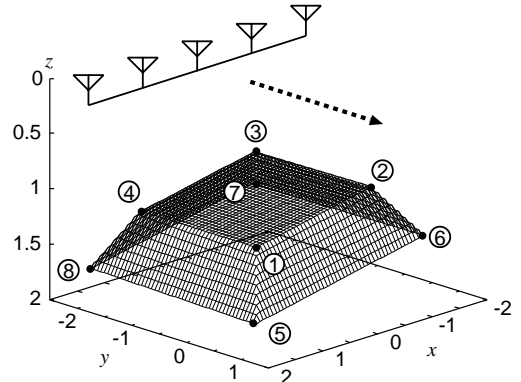


図 9 真の目標形状(実験)

Fig. 9 True target boundary used in the experiment.

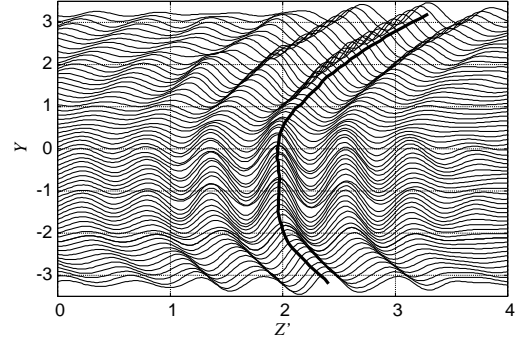


図 10 整合フィルタ出力波形例 ($X_T = 100.0 \text{ mm}$, $X_R = -200.0 \text{ mm}$)

Fig. 10 Examples of the output of the matched filter ($X_T = 100.0 \text{ mm}$, $X_R = -200.0 \text{ mm}$).

る。走査サンプル間隔は 10.0 mm とする。コヒーレント積分回数は 256 回とする。背景受信波を直接波として保持し、目標境界からの受信波形から差し引くことで直接散乱波を得る。また高さ 1920mm、横 1180 mm の銅製の鏡面反射金属板を設置し、その散乱波形を送信波形として保持する。送受信信号切替のため、挿入損失 0.3dB、切替時間 100 msec の高周波切替スイッチを使用する。スイッチ内での信号干渉を回避するため、18 素子を 6 グループに分割し、同グループ内では同時に送受信素子を選択しない。図 8 にアンテナ及びスイッチの配置図を示す。

本実験システムを用いた特性評価を以下に示す。目標形状は厚さ 3mm のステンレスシートにより構成される台形状物体を用いる。図 9 は真の目標境界面を示す。本特性評価では $-500.0 \text{ mm} \leq x \leq 500.0 \text{ mm}$ におけるアレイアンテナ 11 素子を用いる。図 10 は $X_T = 100.0 \text{ mm}$, $X_R = -200.0 \text{ mm}$ とする時の整合フィルタ出力波形を示す。SN 比は 32.0 dB となる。本稿では、SN 比を整合フィルタ通過後の信号及び雑音平均電力の比として定義する。またこれは、標準偏差 $3.0 \times 10^{-3} \lambda$ のガウス雑音を真の擬似波面に与える場合に相当する [10]。抽出される擬似波面に対して、相関長 0.2λ のガウス関数を用いて平滑化処理を行う。図 11 は従来手法による推定像である。各推定点の色は目標形状に対する距離誤差を示す。総推定点数は 166 である。同図より、推定像の x 軸方向、特にエッジ点等において十分な解像度が得られていないことが確認出来る。図 12 は、提案手法による推定像である。同図より従来手法と比較し、 x

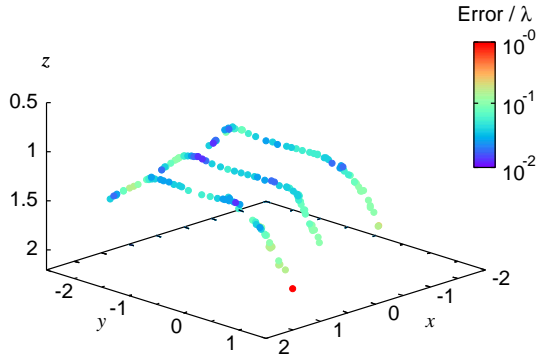


図 11 従来手法による推定像 (実験)

Fig. 11 Estimated image with the conventional method in the experiment.

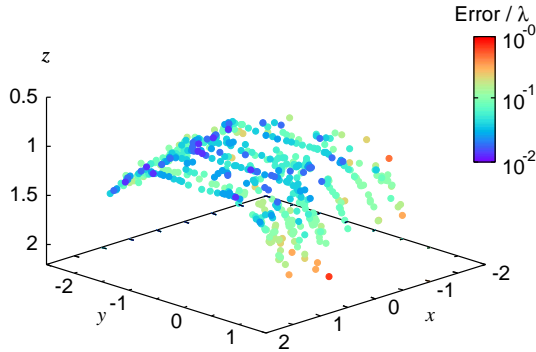


図 12 提案手法による推定像 (実験)

Fig. 12 Estimated image with the proposed method in the experiment.

軸方向に散乱点数を増やすことができることからエッジ付近において解像度が改善することが確認できる。総推定点数は 496 である。本実験における推定精度の定量評価のために評価値 ϵ を以下の式で定義する。

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \min_x \|x - x_e^i\|^2}, \quad (4)$$

ここで x 及び x_e^i は真の目標境界点及び推定境界点の座標を示す。 N は推定点数である。従来手法及び提案手法の ϵ はそれぞれ $8.8325 \times 10^{-2} \lambda$ 及び $8.9174 \times 10^{-2} \lambda$ である。よって提案手法は従来の推定精度を保持しながら、高解像度形状推定を実現する。また図 13 は、各エッジ点と推定点との最小距離誤差を示す。水平軸の番号は図 9 に示すエッジ点に対応している。同図より提案手法はエッジ推定精度を改善し、形状特徴推定に優れる。上記評価より、提案手法が実環境においても有効であることが確認できる。本手法の計算時間は Xeon 3.2 GHz processor で 30 msec 以内であり、実時間処理を実現する。

しかしながら推定像において、エッジ付近及び境界側面において推定誤差が生じることが確認できる。これは散乱波形の歪み及び目標物体以外からの不要な干渉波に起因すると考えられる。今後、波形推定及び実験測定環境の改善により上記誤差を取り除く必要がある。

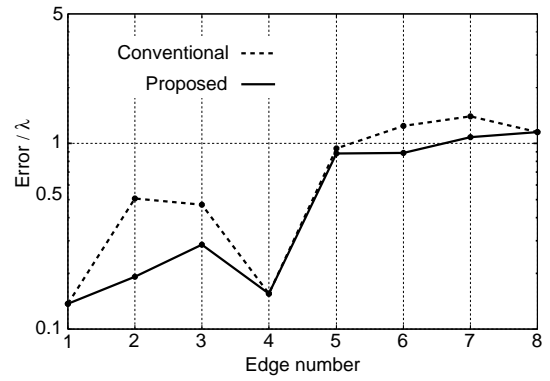


図 13 エッジ点推定精度

Fig. 13 Estimated errors for the target edges.

5. 結 論

本稿では線形アレイアンテナを用いた高速・高解像度立体像推定手法を提案した。境界散乱変換をバスタティックレーダへ拡張し、アレイアンテナに適用することで少ない素子数でも高解像度な形状推定が可能であることを数値計算により示した。更に線形アレイ及び高周波切替スイッチを用いて実環境下での測定及び特性評価を与えた。実験においても、提案手法は従来手法の推定精度を保持しながら推定点を飛躍的に増大させることを示した。今後波形推定等による到来時間補正によって更なる高精度化が課題となる。

謝 辞

本研究の実験を行うにあたり貴重なご助言を賜りました東京大学大学院工学研究科、廣瀬 明助教授 及び増山惣一氏に深く感謝致します。本研究の一部は 21 世紀 COE プログラムによる (Grant No. 14213201)。

文 献

- [1] C. Chiu, C. Li, and W. Chan, "Image reconstruction of a buried conductor by the genetic algorithm," *IEICE Trans. Electron.*, vol. E84-C, no. 12, pp. 1946–1951, 2001.
- [2] T. Takenaka, H. Jia, and T. Tanaka, "Microwave imaging of an anisotropic cylindrical object by a forward-backward time-stepping method," *IEICE Trans. Electron.*, vol. E84-C, no. pp. 1910–1916, 2001.
- [3] T. Sato, K. Takeda, T. Nagamatsu, T. Wakayama, I. Kimura and T. Shinbo, "Automatic signal processing of front monitor radar for tunneling machines," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol.35, no.2, pp.354–359, 1997.
- [4] T. Sato, T. Wakayama, and K. Takemura, "An imaging algorithm of objects embedded in a lossy dispersive medium for subsurface radar data processing," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol.38, no.1, pp.296–303, 2000.
- [5] T. Sakamoto and T. Sato, "A target shape estimation algorithm for pulse radar systems based on boundary scattering transform," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E87-B, no.5, pp. 1357–1365, 2004.
- [6] T. Sakamoto and T. Sato, "A phase compensation algorithm for high-resolution pulse radar systems," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E87-B, no.6, pp. 1631–1638, 2004.
- [7] T. Sakamoto, "A fast algorithm for 3-dimensional imaging with UWB pulse radar systems," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E90-B, no.3, 2007 (in press).

- [8] S. Kidera, T. Sakamoto, T. Sato, and S. Sugino, "An accurate imaging algorithm with scattered waveform estimation for UWB pulse radars", *IEICE Trans. Commun.*, vol.E89-B, no. 9, pp. 2588–2595, Sep, 2006.
- [9] S. Kidera, T. Sakamoto, and T. Sato, "A robust and high-resolution imaging algorithm with waveform estimation for UWB pulse radars", *IEICE Trans. Commun.*, vol.E90-B, 2007 (in press).
- [10] T. Sakamoto, "A 2-D image stabilization algorithm for UWB pulse radars with fractional boundary scattering transform," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E90-B, no. 1, pp. 131–139, Jan, 2007.
- [11] 木寺正平, 阪本卓也, 佐藤 亨, "UWB パルスレーダのためのパスタティックアンテナ型高速物体像推定法の開発," 電子情報通信学会 第 34 回電磁界理論シンポジウム, EMT-05-58, Nov, 2005.

付 録

1. 式 (2) 及び (3) の導出

式 (3) を導出する . 仮定より物体境界面 (x, y, z) は , 以下に示す回転楕円体上に存在する .

$$\frac{(x-X)^2}{Z^2} + \frac{(y-Y)^2}{Z^2-d^2} + \frac{z^2}{Z^2-d^2} = 1 \quad (\text{A.1})$$

但し $Z > d > 0$ である . ここで $G(x, y, z; X, Y, Z, d)$ を以下で定義する .

$$G(x, y, z; X, Y, Z, d) = (Z^2 - d^2)(x - X)^2 + Z^2(y - Y)^2 + Z^2z^2 - Z^2(Z^2 - d^2) \quad (\text{A.2})$$

よって式 (A.1) は以下で表わされる .

$$G(x, y, z; X, Y, Z, d) = 0 \quad (\text{A.3})$$

また物体境界面 (x, y, z) は楕円体の X 及び Y をパラメータとする包絡面上に存在することから ,

$$\partial G(x, y, z; X, Y, Z, d) / \partial X = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\partial G(x, y, z; X, Y, Z, d) / \partial Y = 0 \quad (\text{A.5})$$

を得る . 式 (A.3) と (A.4) から y 及び z を消去し , x に関する 2 次方程式を解き ,

$$x = X - \frac{2Z^3Z_X}{Z^2 - d^2 + \sqrt{(Z^2 - d^2)^2 + 4d^2Z^2Z_X^2}} \quad (\text{A.6})$$

を得る . ここで平方根の前の符号は , 2 次元問題と同様の条件より決定する [11] . 式 (A.3) と (A.5) から z を消去し ,

$$y = Y + Z_Y \{ d^2(x - X)^2 - Z^4 \} / Z^3 \quad (\text{A.7})$$

を得る . 式 (A.3) より z は ,

$$z = \sqrt{Z^2 - d^2 - (y - Y)^2 - \frac{(Z^2 - d^2)(x - X)^2}{Z^2}} \quad (\text{A.8})$$

となる . よって式 (3) が導出される . 式 (2) は同様の手続きで導出される . $g(X, Y, Z; x, y, z, d)$ を

$$g(X, Y, Z; x, y, z, d) = (Z^2 - d^2)(x - X)^2 + Z^2(y - Y)^2 + Z^2z^2 - Z^2(Z^2 - d^2) \quad (\text{A.9})$$

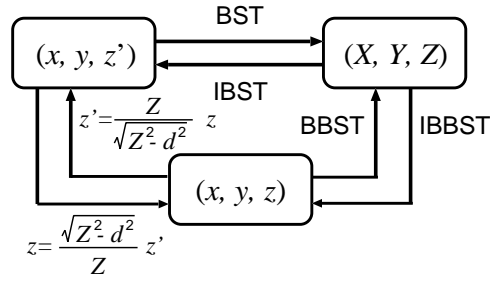


図 A.1 (x, y, z) , (x, y, z') 及び (X, Y, Z) の変換関係

Fig. A.1 Relationship between (x, y, z) , (x, y, z') and (X, Y, Z) .

と定義する . (X, Y, Z) は次の条件を満たす .

$$g(X, Y, Z; x, y, z, d) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\partial g(X, Y, Z; x, y, z, d) / \partial x = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\partial g(X, Y, Z; x, y, z, d) / \partial y = 0 \quad (\text{A.12})$$

上記を X, Y 及び Z について解き , 式 (2) を得る .

次に可逆性を示す . z' を全微分可能な x, y に関する任意の一価関数とする . この時 , (X, Y, Z) を $X = x + z'z'_x$, $Y = y + z'z'_y$, $Z = z' \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}$ とする . (x, y, z') と (X, Y, Z) の変換 , 即ち境界散乱変換の可逆性は示されている [7] . またこの時 ,

$$G(x, y, z'; X, Y, Z, 0) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\partial G(x, y, z'; X, Y, Z, 0) / \partial X = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\partial G(x, y, z'; X, Y, Z, 0) / \partial Y = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$g(X, Y, Z, x, y, z', 0) = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\partial g(X, Y, Z, x, y, z', 0) / \partial x = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\partial g(X, Y, Z, x, y, z', 0) / \partial y = 0 \quad (\text{A.18})$$

を満たす . ここで $z = \frac{\sqrt{Z^2 - d^2}}{Z} z'$ を定義する . 但し d は一定かつ $Z > d > 0$ を満たす . z を式 (A.13) から式 (A.18) へ代入する . この時 , 式 (A.13) から式 (A.15) は式 (A.3) から (A.5) とそれぞれ等価となり , また式 (A.16) から式 (A.18) は式 (A.10) から (A.12) とそれぞれ等価となることが確かめられる . よって (X, Y, Z) と (x, y, z) は式 (2) 及び (3) の変換関係を満たす . また $z' = \frac{Z}{\sqrt{Z^2 - d^2}} z$ より , (x, y, z) と (x, y, z') は可逆な変換で表現される . したがって , (x, y, z) と (X, Y, Z) の変換は可逆であることが示された . 図 A.1 は (x, y, z') , (X, Y, Z) 及び (x, y, z) の変換関係を示す .