# レーザによる振動測定

同志社大学工学部
滝山 敬, 繁沢 宏, 吉岡 毅

昭和44年2月

輻射科学研究会資料

# レーザによる振動測定

滝山　敬
繁沢　宏
吉岡　毅
(同志社大学工学部)

## 1. まえがき.

マイケルソン干渉計の一方の鏡を振動させると、その反射光は周波数変調波となっている。従って、これを検波すれば振動速度に比例した出力を取り出す事が出来、オッシロスコープにその振動波形を描かす事が出来る。

筆者らは、この原理に基ずいて回路を試作し、スピーカ、チタバリ超音波振動子、フェライト超音波振動子の振動の速度波形を観測し、良好な結果を得たので御報告する次第である。

## 2. 測定原理

図1.に測定装置の構成図を示す。図のマイケルソン干渉計において.

$$x = L \sin \Omega t$$

で表わされる正弦振動をしている振動鏡に.角周波数 $\omega$ のレーザ光が入射するとその反射光の角周波数 $\omega'(t)$ はドプラー効果を受け.

$$\omega'(t) = \omega \left(1 - \frac{2}{c} \Omega L \cos \Omega t\right)$$

$$= \omega - \Delta\omega \cos \Omega t \qquad (1)$$

$$\text{ただし.}\ \Delta\omega = \frac{4\pi}{\lambda} \Omega L = \frac{4\pi}{\lambda} |v|_{max} \qquad (2)$$

となる。従って.振動鏡から反射して光電子増倍管に入射する信号波の電界 $e_s$ は.

$$e_s = E_s \sin (\omega t - m \sin \Omega + \theta_s) \qquad (3)$$

$$= E_s \sin \phi_s(t)$$

$$\text{ただし.}\ m = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = \frac{4\pi}{\lambda} L \qquad (4)$$

と表わせる。次に.固定鏡から反射して光電子増倍管に入射する参照波の電界 $e_r$ は.

$$e_r = E_r \sin (\omega t + \theta_r) \qquad (5)$$

$$= E_r \sin \phi_r(t)$$

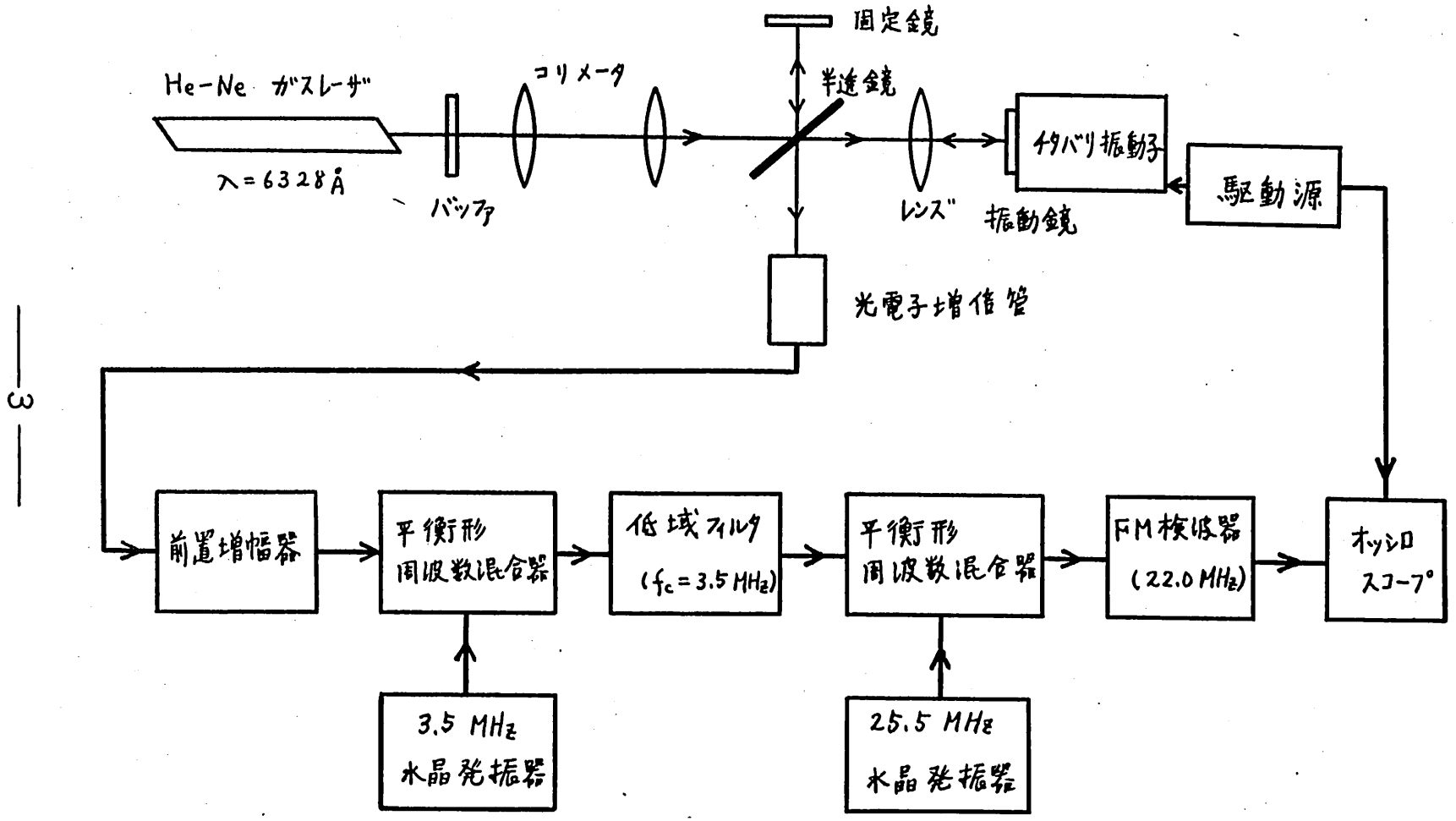



図1. 振動測定装置構成図.

と表わせる。 参照波と信号波は光電子増倍管で光混合されるが、光電子増倍管は二乗特性であるから、その光電流 $I$ は、

$$I \propto (e_r + e_s)^2 = \{E_r \sin \phi_r(t) + E_s \sin \phi_s(t)\}^2$$

であるが、光電子増倍管は光の周波数には応答しないから、光電流の直流交流成分を含む項 $i_0$ は、

$$\begin{aligned} i_0 &= I_0 \cos(\phi_r(t) - \phi_s(t)) \\ &= I_0 \cos(m \sin \Omega t - \theta_0) \qquad (6) \\ &= A_0 J_0(m) + 2A_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m) \cos 2n\Omega t \\ &\quad + 2B_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m) \sin(2n-1)\Omega t \qquad (7) \end{aligned}$$

ただし、 $A_0 = I_0 \cos\theta_0$ 、 $B_0 = I_0 \sin\theta_0$

$\theta_0 = \theta_s - \theta_r$

となる。 即ち、光電子増倍管の光電流は (7)式で表わされるスペクトラムを持つ周波数変調波となっている。これをスペクトラムアナライザで観測し、そのスペクトル分布より変調指数 $m$ を求め、(4)式、(2)式より振幅 $L$ および最大速度 $|v|_{max}$ が求められるが[1]、この方法では振動の波形を知る事は出来ない。又、(6)式は振動鏡が $\lambda/2$ 移動するごとに最大値を取るから、光電子増倍管の出力であるビート波形を観測する事によって、振動の速度波形を作図的に求める事が出来るが、正確には求まらない。[2]

一方、光電子増倍管の出力は (6)式で表わされる

周波数変調波となっているから. FM検波すれば振動速度に比例した出力を取り出しうる事より. 筆者らは. この方法で振動の速度波形等を直視する事を行なった。

この場合. FM検波器の検波特性の直線部分は普通. 中心周波数の数%以内であるから. 光電子増倍管の出力を局部発振器を用いてある適当な周波数まで上げる事が必要である。局部発振器の角周波数 $\omega_L$ を周波数混合器で混合すると. その出力にはいくつもの周波数成分が発生する。特に. $\omega_L + \Delta\omega \cos\Omega t$ , $\omega_L - \Delta\omega \cos\Omega t$ が同時に発生する事によって. そのFM検波出力は常に零になってしまう。従って. どちらか一方を除去しなければならない。又. $\omega_L$ の成分は必要な周波数成分に比べて非常に強いので. これも抑圧する必要がある。従って. SSBの技術をそのまま応用して必要な周波数成分だけを取り出せば良い。これには位相推移方式とフィルタ方式があり. どちらも一長一短であるが. 広帯域という点からはフィルタ方式の方がすぐれている。

又. 検波出力を積分すれば距離の. 微分すれば加速度の波形を直視出来る。

## 3. 試作回路

上に述べた様に、位相推移方式とフィルタ方式の二つの方式が考えられるが、数百 KHz の帯域幅を持つ回路を試作する為に、フィルタ方式を採用した。 FM検波特性に数百KHzの直線性を得ようとすると、中心周波数は 20～30 MHz にしなければならない。この様な高い周波数で鋭いフィルタを作る事は必ずしも容易ではないので、局部発振器を2段にし、比較的低い周波数でフィルタを使用する事にした。

第一局部発振器は 3.5 MHz であり、平衡形周波数混合器及び低域フィルタによって 3.5 MHz の下側波帯だけを取り出し、第二局部発振器は 26.5 MHz であり、平衡形周波数混合器及び同調回路によって再び下側波帯だけを取り出している。この結果、入力 $f_0$〔Hz〕は $22.0\times10^6+f_0$〔Hz〕となる。従って、中心周波数 22.0 MHz で FM検波する事によって入力周波数に比例した出力電圧を取り出せる。なお、検波特性の直線部分は 350 KHz まである。

## 4. 実験方法 及び 結果

### 4-1. 装置

実験に使用したレーザは、He－Ne (6328Å) のガスレーザで、ミラー間隔は1.3mであり、横モードはTEM$_{00}$で出力約0.2mWである。

レーザから出た光は、ある拡がり角を持っており、平行光線ではないのでコリメータによって平行光線にしている。

半透鏡によって二つに分割されたレーザ光のうち、信号波は集光レンズによって被測定物体面上に集光される。(被測定物体面上には鏡を接着してある。) そして、その反射光は集光レンズによって再び平行光線となり、光電子増倍管に入射する。

干渉計の実験にはアイソレータが必要であるが、本実験ではアイソレータの代用としてバッファを用いた。これはまた、アテネータの役割もはたしている。

実験においては、装置の振動の影響が非常に大きいので、ホトマル以外の全装置を建築用のH鋼材に設置した。

レーザは、周波数の安定化及び出力の安定化は何んら行わなかったが、精度を上げる場合は必要である。

## 4-2. スピーカ (10W. 25cm) の測定結果

10W 25cm のスピーカのコーンの中央部に 25mm×8mm 厚さ 0.5mm のガラス板にアルミを蒸着した鏡を接着し、その中央部分の振動を測定した。

図2.は 3KHz、出力 1W の時の測定結果である。(a)は、ボイスコイルの電圧とビート波形を示しており、(b)は、ボイスコイルの電圧と振動の速度波形を示している。実験に使用した二現象オッシロスコープの位相のずれにより、各々の波形の間の位相関係は少しずれている。

(a)のビート波形より、振幅 L は 2.5入 (1.68μ) である事がわかる。しかし、時間的にはかなり変動している。

(b)の振動の速度波形を見ると、ビート周波数の最大値 $f_{D\,max}$ は約 120 KHz、であり、速度の最大値 $|v|_{max}$ は約 38 mm/sec である事がわかる。又、面積から振幅を求めると、

$$L \fallingdotseq \frac{1}{2} \times 6.8 \times 50 \times 10^{-6} \times 9.48 \times 10^{+3}$$
$$\fallingdotseq 1.62 \ [\mu]$$

となり、ビート波形の結果とよく一致している。但し、ビート波形と速度波形は同時刻のものではない。

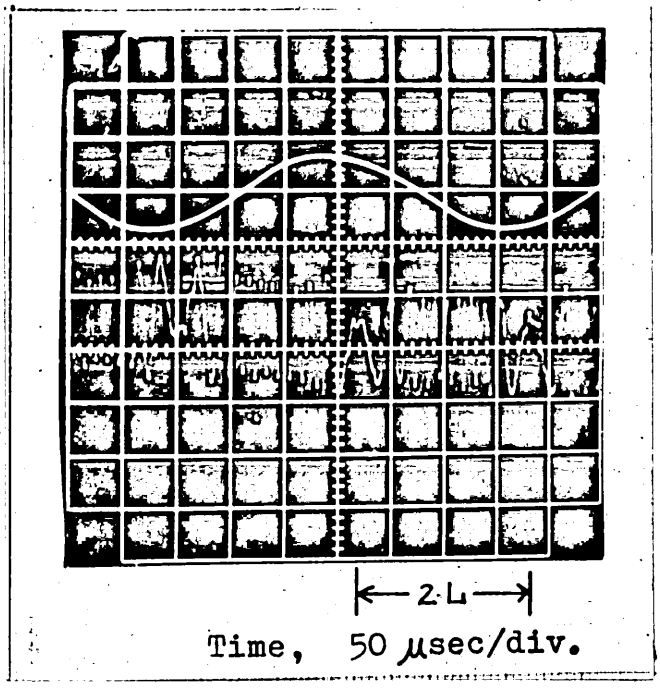



図2.(a) ビート波形

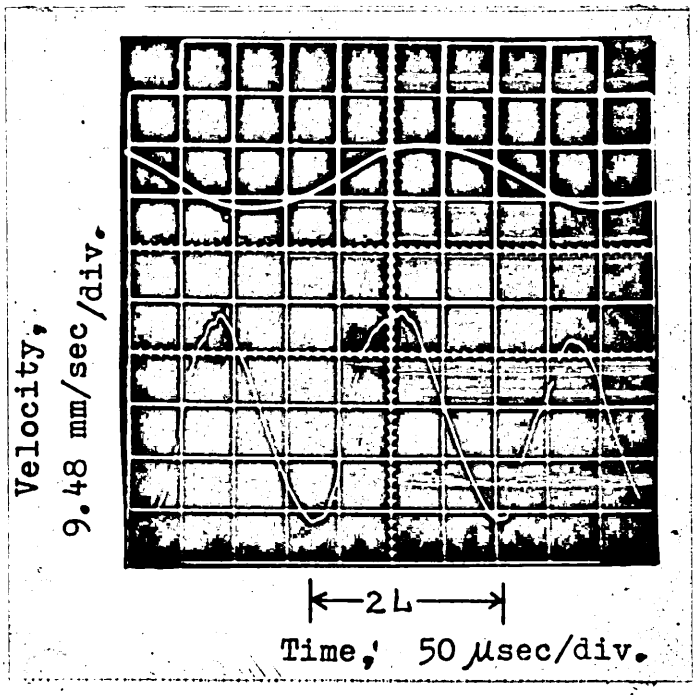



図2(b) スピーカの入力電圧及び
振動の速度波形 (3KHz)

## 4-3. チタバリ振動子の測定結果

ランジュバン型チタバリ超音波振動子(共振周波数50 KHz)の測定結果を図3.に示す。測定に於ては、振動子の片面を厚さ2.5mmのベーク板にアラルダイトで接着し、それを厚さ5mmのアルミ製L金具にネジ止めした。そして、振動面には5mm×5mm, 厚さ0.2mmのガラス板にアルミを蒸着した鏡を接着した。

測定結果より、$f_{D\max} \fallingdotseq 165$ KHz, $|v|_{\max} \fallingdotseq 52$ mm/s である事がわかる。又、面積から振幅を求めると、$L \fallingdotseq 0.12\mu$ である。なおこの場合、$L \ll \lambda$ であるから、ビート波形からは振幅を知る事が出来ない。

振動子の入力電圧は33V(p-p)—8.5W—である。

## 4-4. フェライト振動子の測定結果

フェライト超音波振動子(共振周波数50 KHz)の測定結果を図4.に示す。測定においては、振動子の足をベーク板にアラルダイトで接着し、それを5×5×10cmの真ちゅうのかたまりにネジ止めした。又、振動面には5mm×3mm、厚さ0.2mmのガラス板にアルミを蒸着した鏡を接着した。

測定結果より、$f_{D\max} \fallingdotseq 150$ KHz, $|v|_{\max} \fallingdotseq 47$ mm/s である事がわかる。又、面積から振幅を求めると、$L \fallingdotseq 0.13\mu$ である。この場合も、ビート波形から振幅を知る事は出来ない。なお振動子への入力電力は3.5Wである。

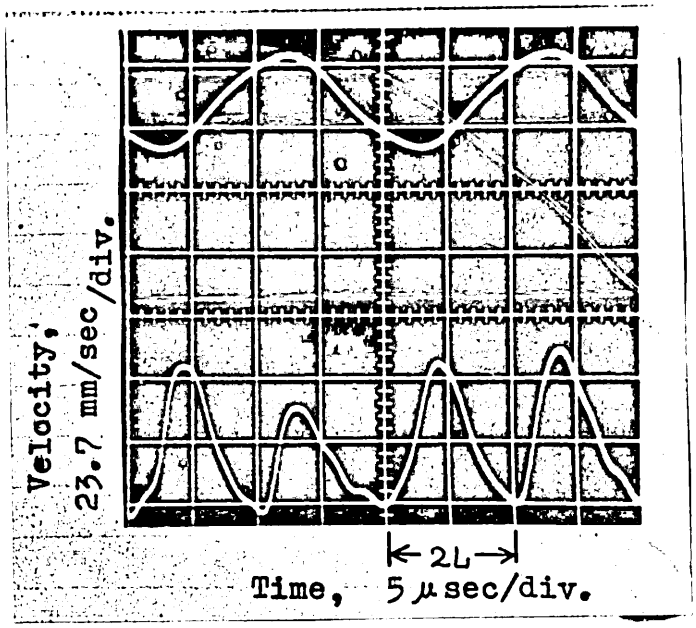



図3. イタバリ振動子(50 KHz)の入力電圧及び振動の速度波形.

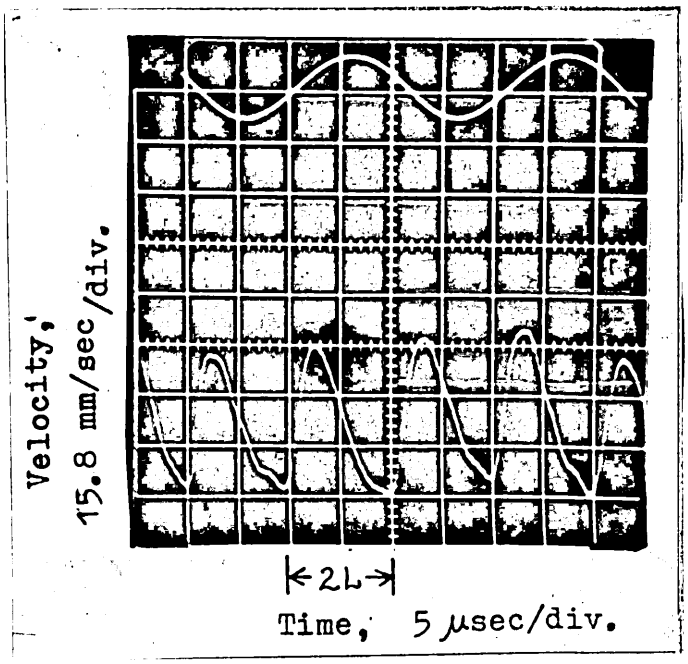



図4. フェライト振動子(50 KHz)の入力電流及び振動速度波形.

## 5. むすび

従来のレーザによる振動測定法は振動波形を直視出来ないという大きな欠点があったが、ビート波が周波数変調波であるのでこれをFM検波すれば振動の速度波形をオッシロスコープで直視できるという観点に立ち、回路を試作した。そして、スピーカ、チタバリ超音波振動子、フェライト超音波振動子の振動を測定した。その結果、必ずしも正弦波振動をしていない事がわかった。しかしながら、超音波振動子の場合、支持物の影響が無視出来ないと思われる。特にフェライト振動子の場合、先端にホーンを接着して測定する必要があると思われる。

最後に、実験に使用したチタバリ振動子、フェライト振動子を御提供下さいました村田製作所、藤島部長に深く感謝致します。

## 参考文献

1) 森、末松、野村、清水、
「ガスレーザ光のドプラー効果を用いる微小振動測定」
電気通信学会超音波研究会資料、42年9月、

2) 三橋、桜井、
「ドップラビートの観測」
電気試験所彙報 Vol. 32. No. 1. PP 146~151. 43年1月、

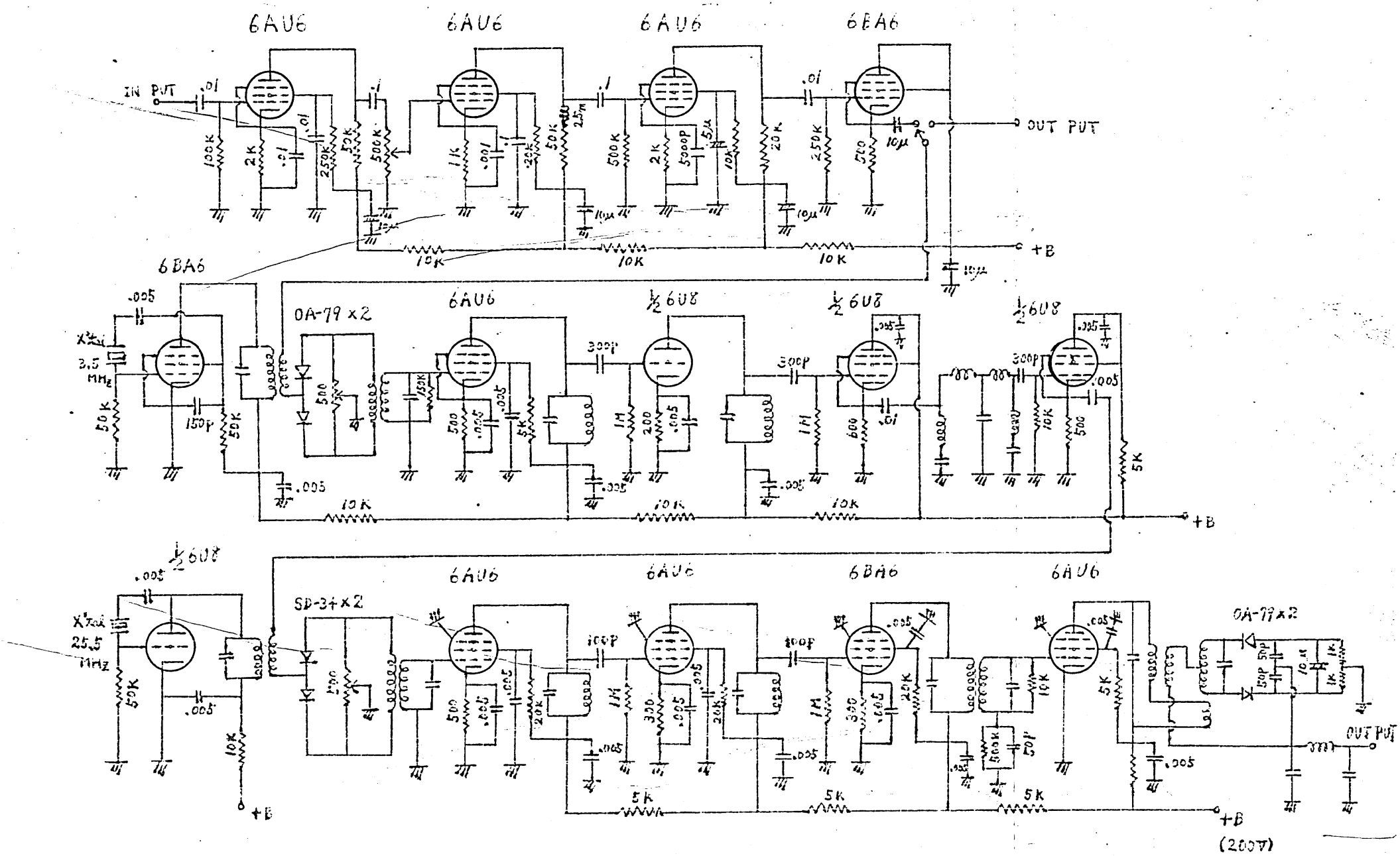
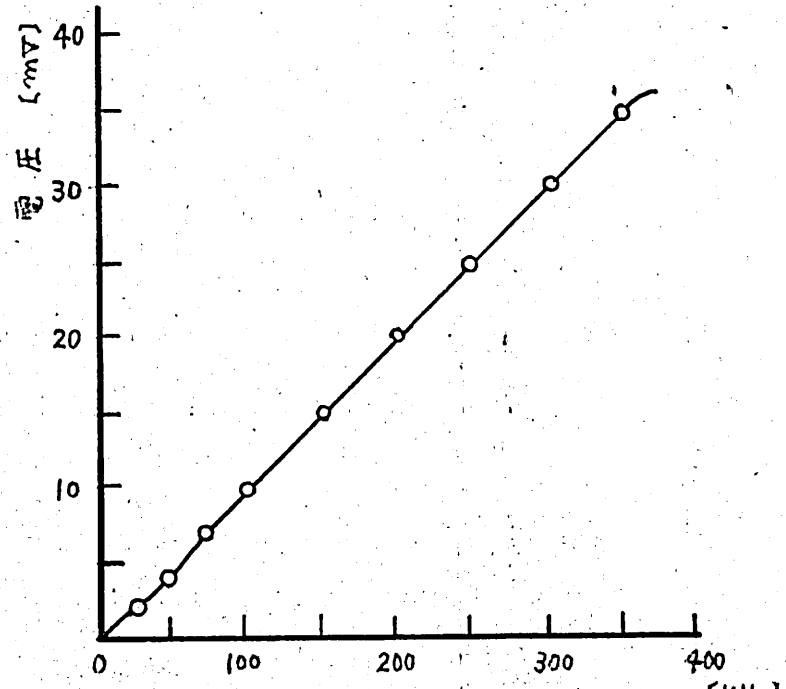
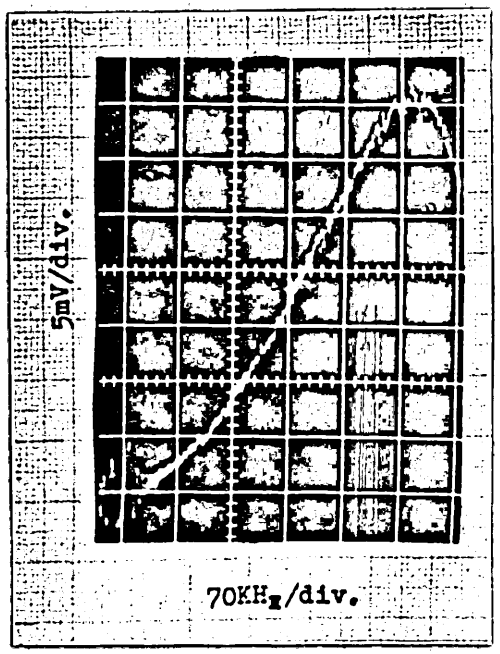

6AU6
6AU6
6AU6
6BA6
IN PUT
OUT PUT
+B
6BA6
OA-79 x2
½6U8
½6U8
½6U8
X'tal
3.5 MHz
6AU6
6AU6
6BA6
6AU6
SD-34 x2
OA-79 x2
X'tal
25.5 MHz
OUT PUT
+B
+B
(200V)

図5. 試作回路図




(a) 静特性




動特性
(b) (3.5 MHz の掃引発振器を使用)

図6. 試作回路の検波特性

輻射科学研究会資料

# 超高圧用マイクロ波変流器(μ波CT)

斉藤成文
(東京大学生産技術研究所)

大野豊
(東京電力株式会社)

喜連川隆　中原昭次郎
立川清兵衛　小畑哲男
(三菱電機株式会社)

1969年2月28日

# 正誤表（μ波CT）

| 頁 | 行 | 誤 | 正 |
|---|---|---|---|
| 1 | 上8 | Trbas | Trans |
| 2 | 上11 | 後上側 | 後地上側 |
| 2 | 下3 | 無接触変流 | 無接触変流器 |
| 3 | 下6 | ムービ | ビーム |
| 10 | 上6 | 410mm | 430mm |
| 27 | 下3 | 導波表面 | 導波管表面 |

# 超高圧用マイクロ波変流器（μ波ＣＴ）

斉藤成文　　大野豊
（東京大学生産技術研究所）　（東京電力株式会社）
喜連川隆　　中原昭次郎
立川清兵衛　　小畑哲男
（三菱電機株式会社）

## 1. まえがき

電力の需要増大に伴い，より経済的な送電形態として，超々高圧（５００KV）による送電が，東京電力をはじめ各電力会社で計画されている。この超々高圧送電系統の実用化には，多くの技術的問題を含んでいるが，このうちでも短絡容量の増大と安定度から要求される事故時遮断の高速化，高信頼化ならびに系統制御の自動化にともなう情報検出の高忠実性がとくに重要なものゝ一つである。これらの情報検出源となる電流変成器（以後，変流器と称する。Current Trbas former，略してC.T)として，従来より使用されている電磁誘導現象を利用した巻線形ブッシング変流器では

1. 絶縁耐力劣下の原因となる塩じん（塵）害対策に起因する大形化と，それにともなう価格高騰化。
2. 直流分と大電流による飽和現象および内外サージに対する応答など，波形ひずみの要因となる過渡特性
3. サージ電圧の二次側への侵入

等の問題が重要課題となる。

そこで，この従来の巻線形ブッシング変流器にとつて代るべく，技術的基盤を全く異にした新形式の変流器の開発が各方面で行なわれつゝある。これら新形式の変流器はいずれもエレクトロニクス技術を導入し，無接触ないしは無導体化することによつて，絶縁上の問題と価格高騰化の問題を解決し，

忠実性の向上をはかろうとするものである。

これらの新形式の変流器のうち，わが国独自の技術として登場したものが２種類ある。その１つは東京大学生産技術研究所，東京電力株式会社で研究開発し，その後昭和４１年２月より３月にかけて，電力中央研究所の技術研究所で野外実験に成功したレーザ変流器[1][2][3]である。他の１つは，東京大学生産技術研究所，東京電力株式会社，電力中央研究所と緊密な技術連絡をもちつつ，三菱電機株式会社が主体となつて研究を進めているマイクロ波フエライト変流器[1],[2],[3],[4]である。　これら２種類の変流器は，地上側にレーザ発振器あるいはマイクロ波発振器を，高圧側には鉛ガラスあるいはフエライトのようなフアラデイ効果をもつ素子を設置し，地上側より送られたレーザビームあるいはマイクロ波ビームを上記素子中を通過させた後上側に送り返す方式である。このとき素子は被測定電流による磁界中におかれているためフアラデイ効果を受け，地上側に送り返されるレーザ光あるいはマイクロ波は電流変化に対応した偏波面回転を受けている。この偏波面変化を検出して電流の値を知るのがこれら変流器の原理である。これらは何れも高圧側が受動性素子のみで構成されているのが特長である。

以下章２において，これまで発表されている種々の変流器についてその原理，特徴等を簡単にのべ，それらのうちでマイクロ波フエライト変流器の位置を明らかにし，章３において本変流器の動作原理を，章４において試作機の構成，性能を記す。なお，本報告は，今回の試作になる無接触変流に関するものであるが，今回の試作機以前に行なつた，誘電体線路を用いた簡単な無導体変流器について，その基礎的事項および実験結果を附に記してある。

## 2. 各種エレクトロニクス変流器の比較

巻線形ブッシング変流器に代るエレクトロニクス変流器として現在までに報告されているものは次の5種類がある。

A．VHF変流器
B．UHF変流器
C．Allis-Chalmers社光変流器

線路電流変化をトロイダルコイルでピック・アップして電圧変化になおした後，V／F変換器で周波数変化に変換し，これでVHF,UHF電波あるいは光波を周波数変調して地上側に送る。

D．東大生研方式レーザ変流器
E．マイクロ波フエライト変流器

地上側よりレーザ・ビームあるいはマイクロ波ビームを高圧側に送り，線路電流磁界内におかれた鉛ガラス，あるいはフエライト中を通して再び地上側に送り返す。送り返される電波は線路電流に比例したファラデー旋回をうける。

これら5種類の変流器を比較した結果を表2.1に示す。

### (1) 無導体形と無接触形

高圧側と地上側との間を誘電体（絶縁体）でつないだものが無導体形であり，何によつてもつながれていないものが無接触形である。絶縁性の点では無接触形がまさつていることは勿論である。無導体形は安定した系が得られるが，ブッシングが必要であるので妙味はうすれる。

### (2) 情報伝送媒体

自由空間を利用した無接触形ではムービの集束性による伝送効率の向上の点では周波数が高い波を使用する方が有利である。しかし，光波を使う場合は外来雑音の影響をうけやすいのでOptical Fiberをがい子内に通した無導体形とせざるを得ない。レーザ光は非常に優れた伝送媒体であるが，現時点では使用構成部品の種類，性能，信頼性の点でマイクロ波に一歩ゆずるものと考えられる。

(3) 電流検出法

表2.1に示すように，トロイダル・コイルによる電磁結合を利用したものと，鉛ガラスあるいはフエライトによるファラデー効果を利用したものとがある。この外に，ホール効果あるいは共鳴吸収効果を利用したもの等が考えられるが，今の所は未だ現れていない。

トロイダルコイルを利用したものは，周波数特性の忠実性が悪い点と，直流分が検出できない点でフエライトを利用したものに劣る。

表2.1　エレクトロニクス変流器の比較

| 名　称 | 無導体，無接触の別 | 情報伝送媒体 | 検出方法 | 情報伝送媒体の変調法 | 高圧側の素子による分類 |
|---|---|---|---|---|---|
| VHF変流器 | 無接触 | VHF帯電波 | トロイダルコイルによる電磁結合 | 周波数変調 | 能動式 |
| UHF変流器 | 同　上 | UHF帯電波 | 同　上 | 同　上 | 同　上 |
| マイクロ波フエライト変流器 | 無接触あるいは誘電体線路による無導体 | SHF帯電波 | フエライトによるファラデイ効果 | 偏波面回転 | 受動式 |
| Allis Chalmers社光変流器 | Optical fiberによる無導体 | 光波（インコヒーレント） | トロイダルコイルによる電磁結合 | 周波数変調 | 能動式 |
| 東大生研方式レーザ変流器 | 無接触あるいは碍子内伝送の無導体 | レーザ光 | 鉛ガラスによるファラデイ効果 | 偏波面回転 | 受動式 |

(4) 情報伝送媒体の変調法

光波，電波の変調法としては，周波数，振幅，位相および偏波面が考えられるが，これらの中でもつとも外部の影響をうけにくいのは周波数である。この意味ではＡ．Ｂ．Ｃのものは合理的な系である。

(5) 能動形と受動形

能動形とは高圧側にトランジスタ，ダイオードのような能動性素子を必要とするものを称し，受動形とは高圧側は受動性素子のみで構成されているものを称する。Ａ．Ｂ．Ｃは高圧側にＶ／Ｆ変換器，変調器，発振(光)器および電源を必要とするので能動形である。一方，Ｃ，Ｄは高圧側が鉛ガラスあるいはフエライトのようなファラデー素子と簡単な放射素子のみで構成されているので受動形である。

従来の巻線形ブッシング変流器は，原理，構造が単純で，破損，故障の要因の少い信頼性の高いものである。そして，変流器の設置場所は電気的機械的，温度的に非常に過酷な条件下にあり，しかも，高圧側は保守，点検がきわめて困難である。このような現実を考えるならば，エレクトロニクス変流器が将来巻線形ブッシング変流器にとつてかわるうえで，東大生産方式レーザ変流器や，本文で記すマイクロ波フエライト変流器のような受動形は他の能動形に比べて数段優つているものと云い得る。

## 3. マイクロ波フエライト変流器の動作原理

マイクロ波フエライト変流器（以下マイクロ波C．T．と略称）の原理図を図3.1に示す。マイクロ波発振器よりのマイクロ波は，サーキユレータ，偏分波器および円形導波管フイーダを経て地上側アンテナよりX軸方向に偏波した直線偏波①として放射され，偏波面は保持されて高圧側アンテナで受信され波②となる。波②はフエライト旋波子の装荷された円形導波管内を伝送して右端の短絡端に達して波③となるが，この場合，フエライト旋波子には被測定電流による磁界がマイクロ波の伝播方向に印加されているので，ファラデイ効果により波③の偏波面はX軸に対して$\theta/2$だけ旋回している。波③は短絡端にて完全反射し，再びフエライト旋波子内を伝送するので偏波面はさらに$\theta/2$だけ旋回し，結局偏波面はX軸に対して$\theta$だけ傾いた波④となる。波④の偏波面はそのまゝで波⑤として地上側アンテナで受信される。フエライト旋波子の印加磁界対旋回角度特性が直線関係にあれば，旋回角度$\theta$と送電線電流I，これによつて生ずる磁界Hとの間には

$$\theta \propto H \propto I \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

なる関係があり，$\theta$を測定することによりIが知れる。

今回試作したマイクロ波C．T．の動作原理は，この偏波面の回転角を位相の変化量に変換し，この位相をクロックパルスでデイジタル的にカウントする方法である。図3.1において波⑤の振巾をEとすると，そのX軸方向成分Aこれと直交したY軸方向成分Bはそれぞれ

$$A = E \cdot \cos\theta \cdot \cos\omega_R t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2)$$

$$B = E \cdot \sin\theta \cdot \cos\omega_R t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

にて表わされる。ここで$\omega_R$はマイクロ波の角周波数を表わす。

いま信号Aの位相を$\pi/2$進め，これと信号Bとの和をとつたものをSとすれば

$$S = A\,\pi/2 + B = E\sin(\omega_R t + \theta) \quad \cdots\cdots (3.4)$$

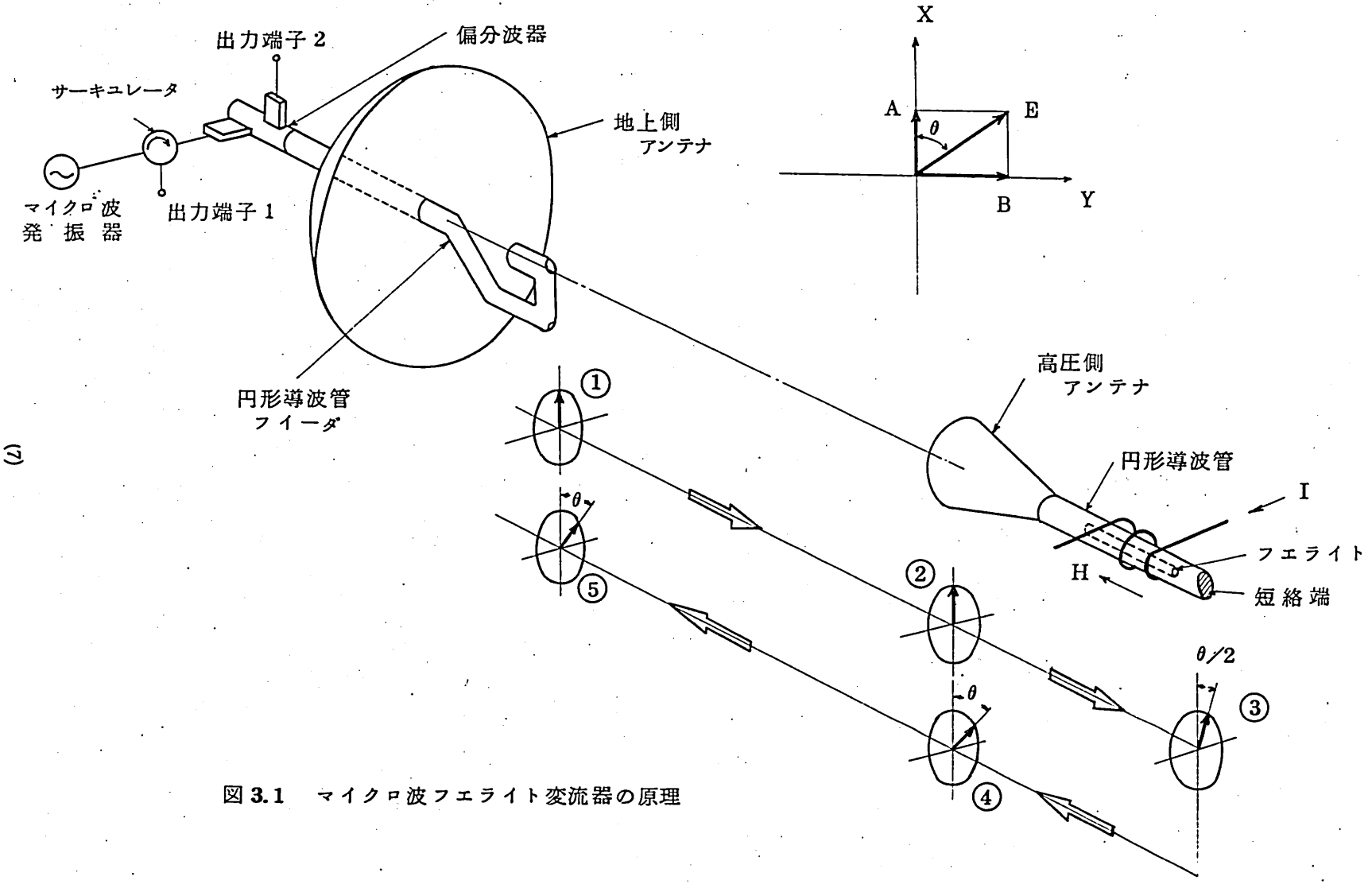



図 3.1　マイクロ波フェライト変流器の原理

にて表わされる。この信号Sの波形をθをパラメータにして描いたのが図3.2(a)である。この信号Sの立上りのzero crossでトリガパルスを発生させると図3.2(b)の如くなる。

次に位相の基準信号を

$$R = -E \sin \omega_R t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.5)$$

とし，その波形を図3.2(c)に示す。同じくこの信号Rの立上りのzero crossでトリガパルスを発生させると図3.2(d)となる。これら(b)と(d)のトリガパルスをパルスゲート回路に入れ，たとえば(d)のトリガパルスでゲートを開き，(b)のトリガパルスでゲートを閉じると図3.2(e)に示す如き巾をもつたパルスが得えらるが，図から明らかな如く，このパルス巾はθに比例している。このパルス巾をクロックパルスでカウントすることにより，θをディジタル量として読むことが出来る。このようなデータ処理方法はマイクロ波周波数帯では実現困難であるため，ミキサーによつて適当な中間周波数に変換した後行う。

一般に送電線電流Iは交流であるため，θは交番的に変化し，Iの実効値を求めたり波形を観測するためD／A変換器によりアナログ量に変換している。

今回の試作機では，最終的な中間周波数として50KHz を選んでおり，この50KHz のうちの1サイクルの間にθを測定，記憶し，次の1サイクルの間にこれを表示したり，計測回路を次の測定に備えてResetする操作を行なうようになつている。したがつて送電線電流を50KHz／2 すなわち25KHzでサンプリングして測定していることになる。

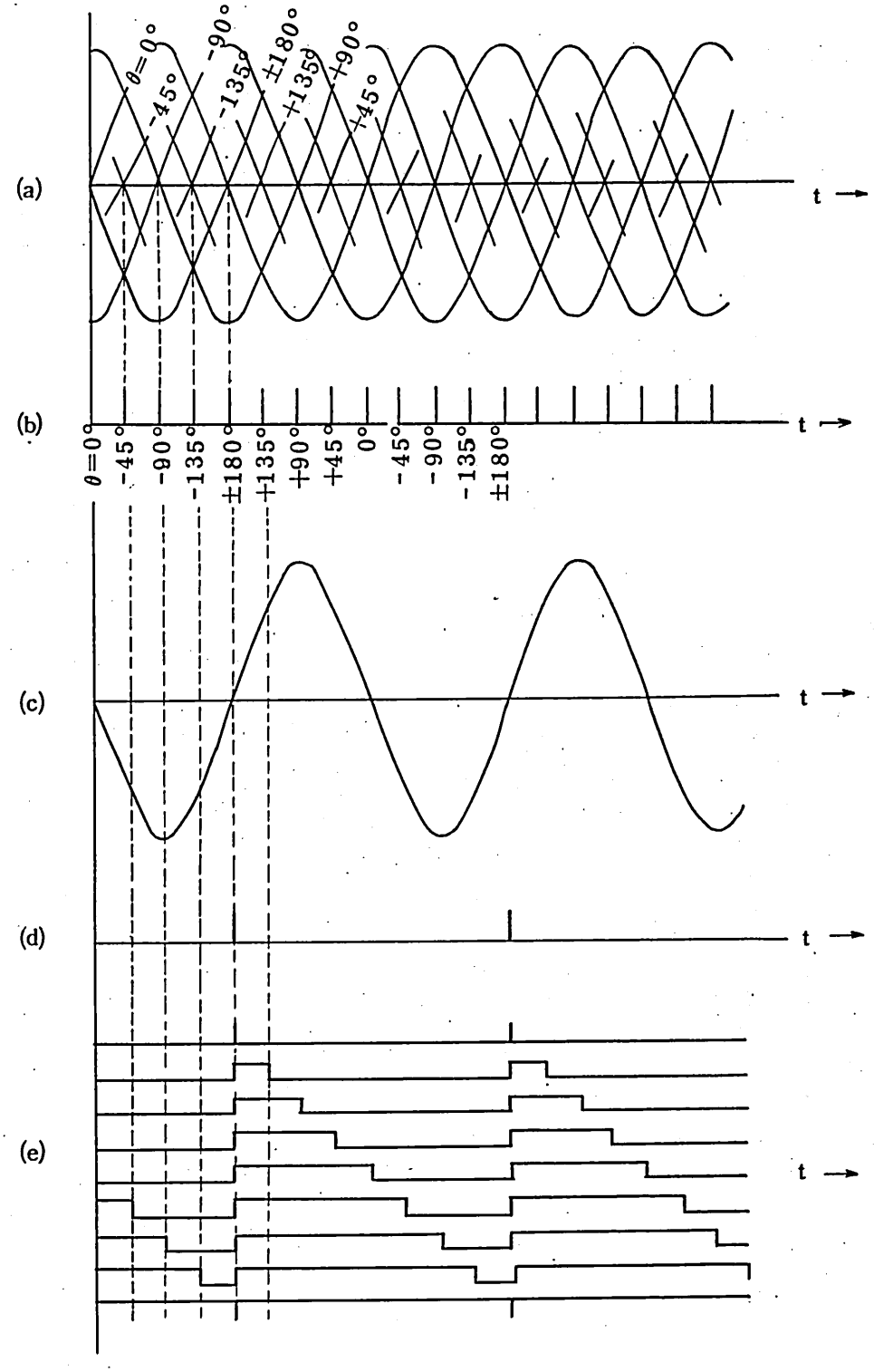



図 3.2　位相変化をパルス巾変化に変換する方法

## 4. 試作機の構成および性能

今回の試作になるマイクロ波C.T.は，マイクロ波の自由空間伝送による無接触形である。試作機の構成のブロック線図を図4.1に示す。

### 4.1 地上側，高圧側アンテナおよび旋波子

地上側アンテナとしては，開口直径1200㎜，焦点距離520㎜ のパラボラアンテナを，高圧側には開口直径190㎜，フレア長410㎜の円錐形電磁ホーンを使用した。これら2つのアンテナを10mの距離（超超高圧送電においては，送電線は地上高約10mに敷設される）で対向させると，いわゆるフレネル領域の伝送の問題となり，高効率の伝送系を実現するため，地上側アンテナを離焦点パラボラアンテナ[10]として使つている。離焦点量を最適とし，9,375MHzでの，パラボラ開口面から10mの位置におけるフレネル領域パターン[11]の計算値および実測値を表4.1に示す。またこれら2つのアンテナを対向させた場合の片道伝送効率の計算値および実測値[12]を図4.2に示す。なおパラボラのフィーダには円形導波管（22㎜φI.D.）を使用し，屈曲部には角曲り導波管[13]を使用しているが，交叉偏波発生量は－40dB以下である。なお地上側アンテナの外観を図4.3に示す。

フエライト旋波子は円柱形のフエライトロッドをテフロン収容筒に挿入したうえで内径22㎜φ の金属円形導波管内に装荷されている。フエライト旋波子の電流対旋回角度，VSWR および挿入損失特性を図4.4に示す。またこのフエライト旋波子の温度特性を図4.5に示す。

### 4.2 マイクロ波系および受信機

章3で述べたような，偏波面の回転角を位相の変化量に変換する立体回路系のブロック線図を図4.6に示す。クライストロン発振器の9,405

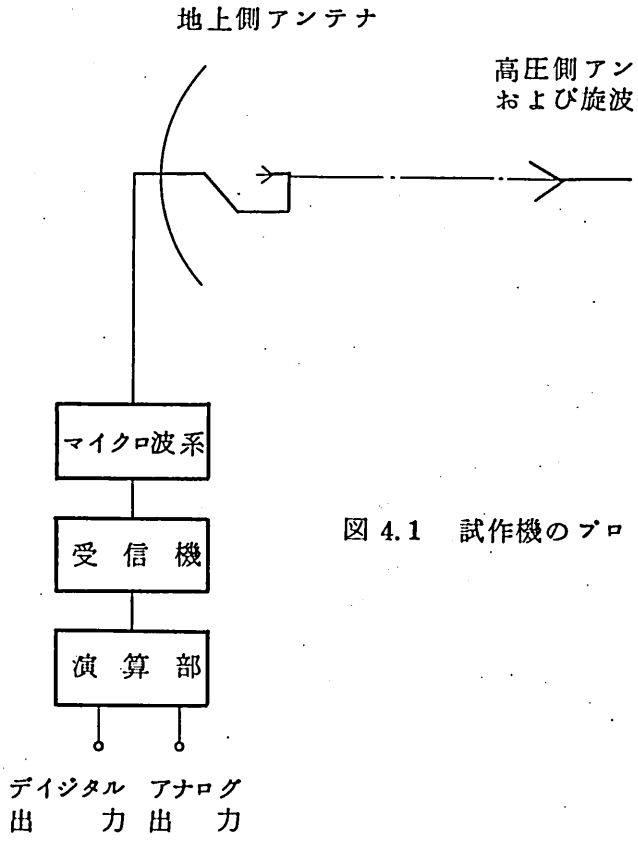
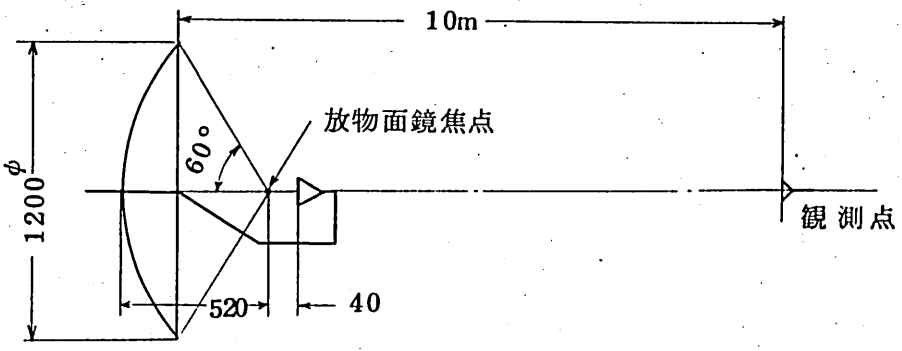



図 4.1　試作機のブロック図

表 4.1　開口径 1.2 mの離焦点パラボラのフレネル領域放射パターン




| 項目 | | -3dB巾（度） | -10dB巾（度） | 第1側葉位置（度） | 第1側葉レベル（dB） |
|---|---|---|---|---|---|
| 計算値 | 等振巾分布 | 0.80 | 1.28 | 1.87 | -17.6 |
| | $(1-r^2)$ 振巾分布 | 0.97 | 1.67 | 2.50 | -24.6 |
| 実測値 | H面 | 0.80 | 1.33 | 1.75 | -16.5 |
| | E面 | 0.83 | 1.50 | 2.17 | -24.3 |

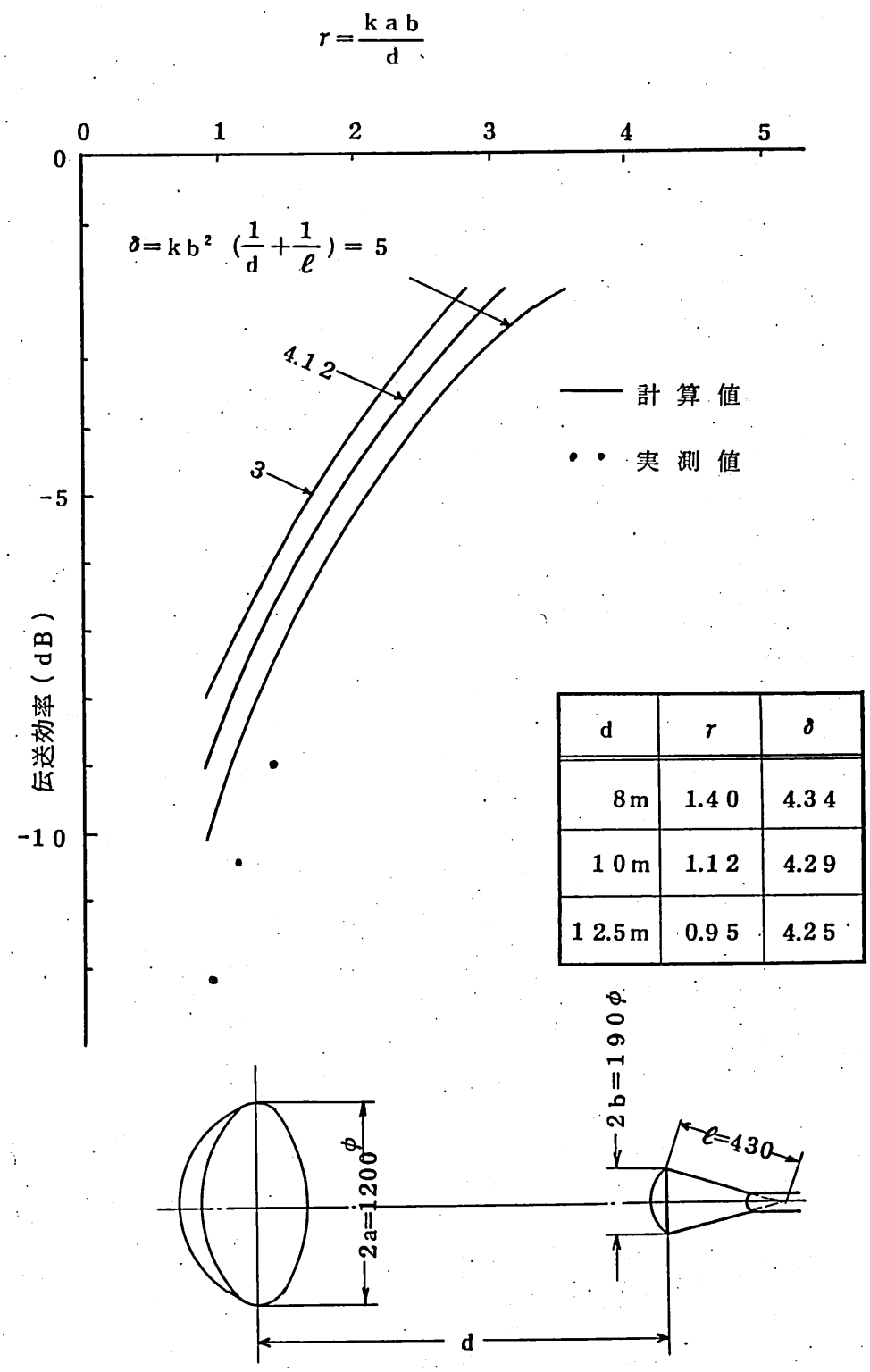



図 4.2　ホーン対向離焦点パラボラの伝送効率の計算値と実測値

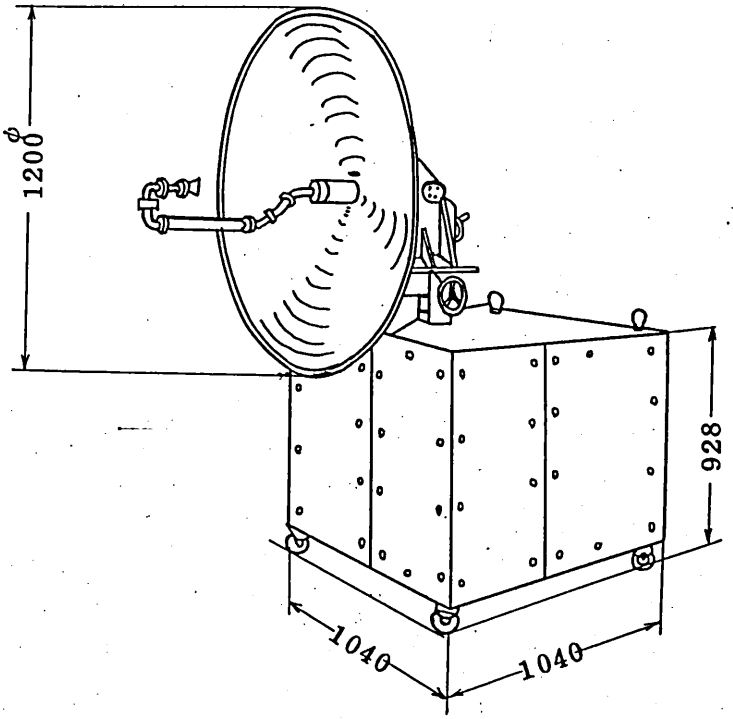



図 4.3　　地上側アンテナ

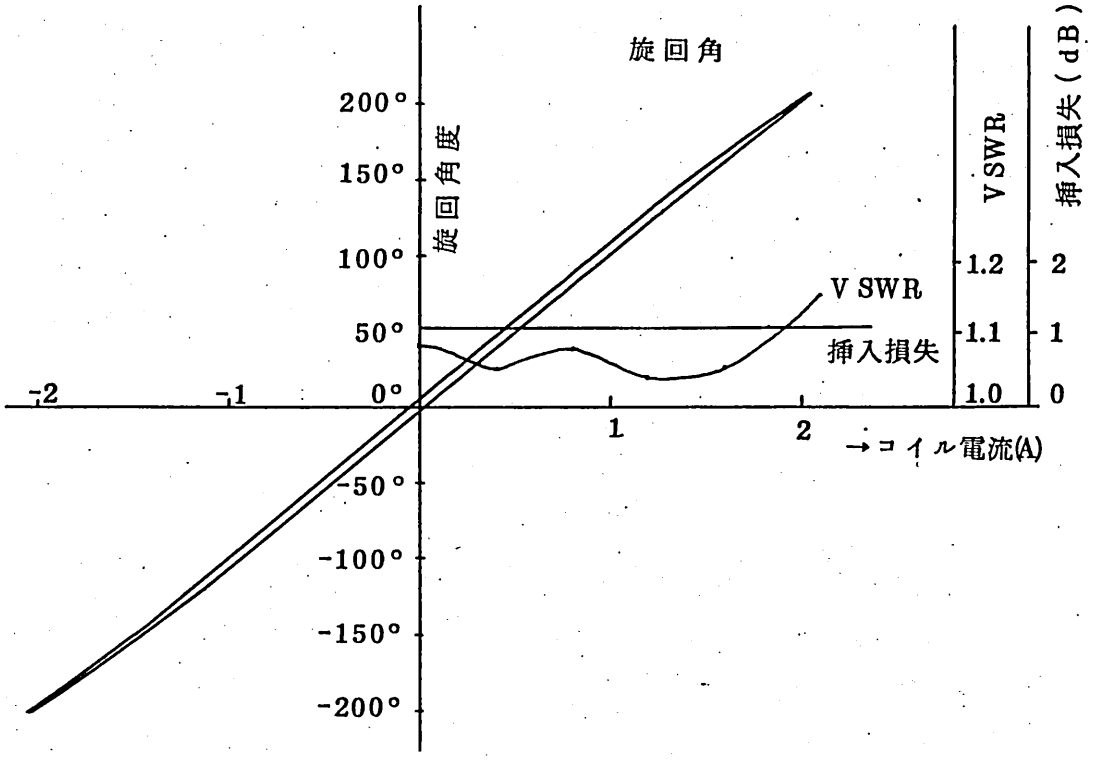



図 4.4　　フェライト旋波子の特性

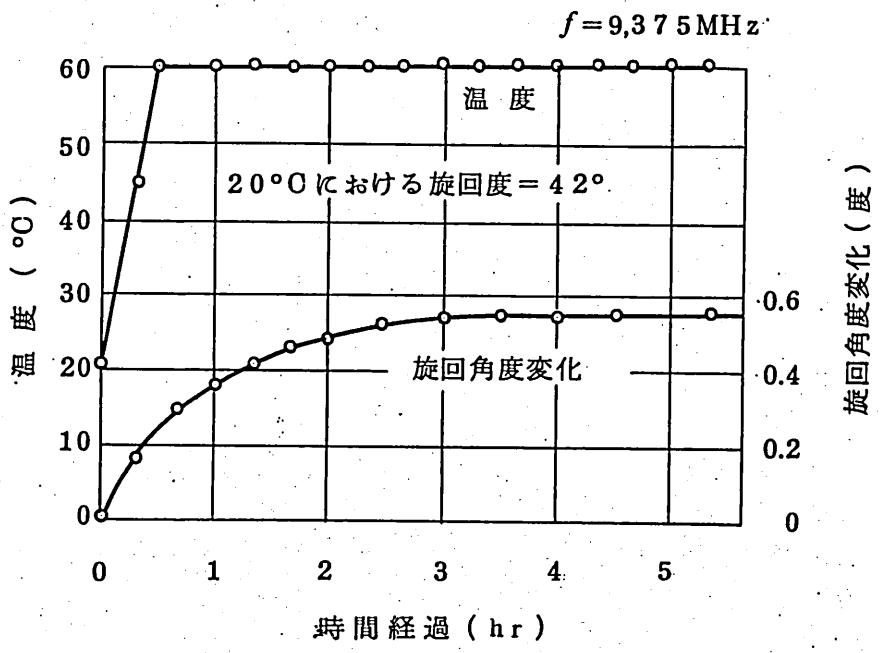



図4.5　フェライト旋波子の温度特性

MHz，20mW の出力はCOHOの30MHz，37mWの出力とともにコンバータに加えられ，9.375MHz の送信波を作り，マジックT，偏分波器を経て円形フィーダ導波管に供給される。和信号Sはミキサーによつて30MHzの第1中間周波数に変換されるが，上記クライストロンはミキサーの第1局部発振器をも兼ねている。

また位相の基準信号RとしてはCOHO 発振器出力を直接使用している。なお，使用したコンバータおよびミキサーの変換損失は12dBであり，送信波の受信回路への漏洩量は−40dB以下である。

受信機の構成のブロック線図を図4.7に示す。受信機は30MHzの第1中間周波数段と50KHzの第2中間周波数段とからなつており，第1中間周波数段は−3dB 巾が±1MHzの帯域通過沪波器のみであり，第2中間周波数段はミキサー，増巾器，振巾制限器およびシユミツト回路で構成されていて，最終出力としては矩形波が得られる。第2局部発振器としては周波数30.05MHz，出力−10dBm，スプリアス−40dBm以下，安定度±1×$10^{-5}$／day以内の水晶発振器を用いている。受信機全体としては−45〜−25dBm の入力レベルに対して10Vp−p以上の出力が得られS／N 比は40dB 以上である。

## 4.3 演　算　部

演算部の構成のブロック線図を図4.8にタイミングチヤートを図4.9に示す。演算部は，章3で述べた如く，偏波面回転角$\theta$に比例したパルス巾を作りこれをディジタル的にカウントする部分で，カウンター部，タイミングコントロール部およびD／A変換部よりなつている。カウンター部は受信機からの50KHzの和信号と基準信号とによつてゲート回路をON，OFFし，$\theta$に比例した巾をもつパルスを作り，これを8MHz のクロツ

クパルスでディジタル的に読み取る部分であり，この操作は５０KHzのうちの１サイクルで行なわれる。タイミングコントロール部は，カウンター部でカウントされた結果を５０KHzの次の１サイクルの間に記憶，表示したり，次のカウンター部の動作に備えて，カウンター部をＲｅｓｅｔする信号を作つて，この信号の出るタイミングをコントロールする部分である。Ｄ／Ａ変換部は，カウンター部で得られたディジタル量をアナログ量に変換する部分である。

4.4 電流試験結果

実験は水平伝播にて行なつた。

６０Ｈzの商用周波数における波形観測結果を図4.１０に，また励磁電流実効値対マイクロ波Ｃ．Ｔ.出力実効値の関係を図４・１１に示す。この励磁電流実効値とマイクロ波Ｃ・Ｔ・出力実効値の間には非常によい直線性が得られている。

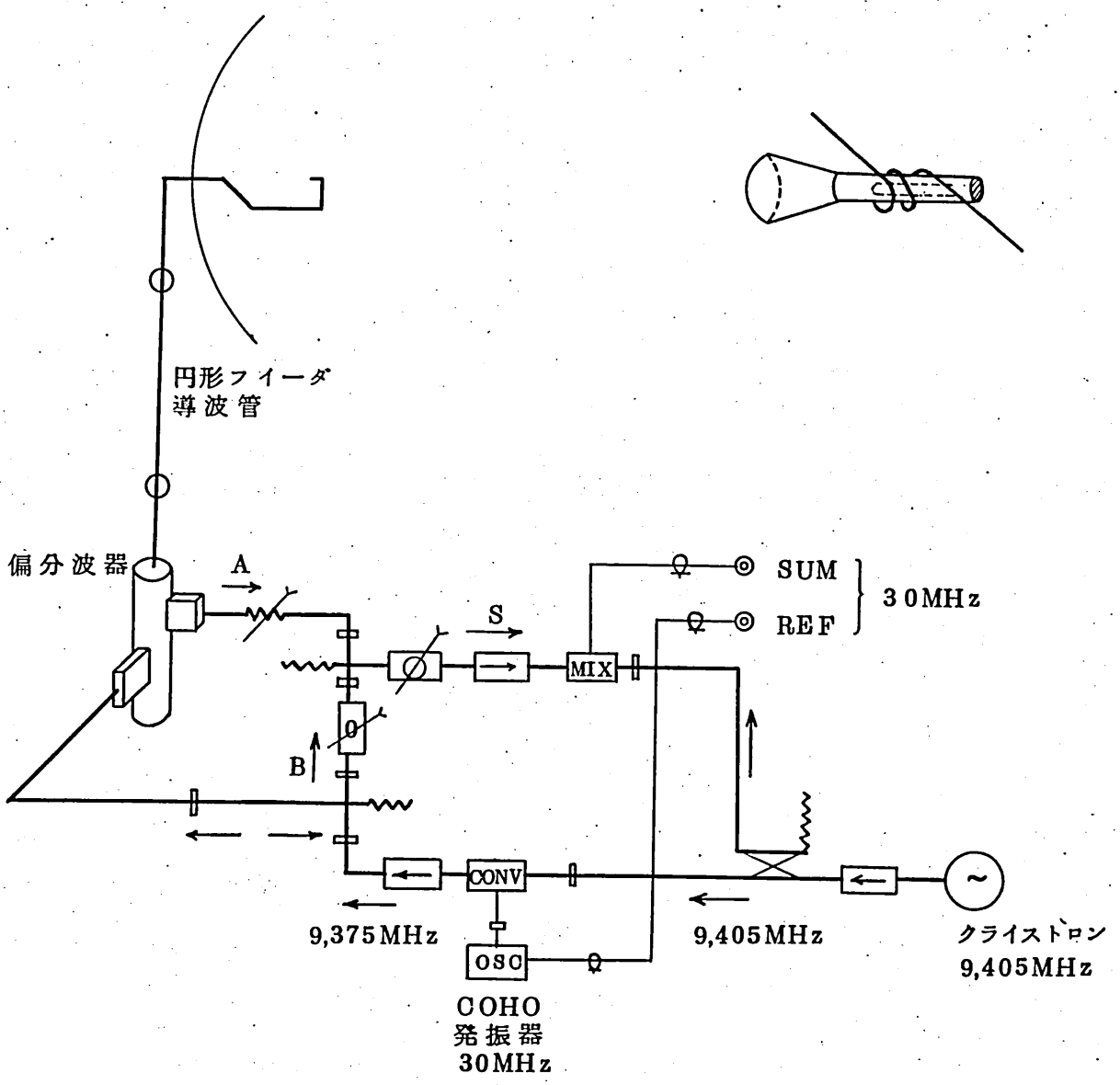



図4.6　マイクロ波系のブロック図

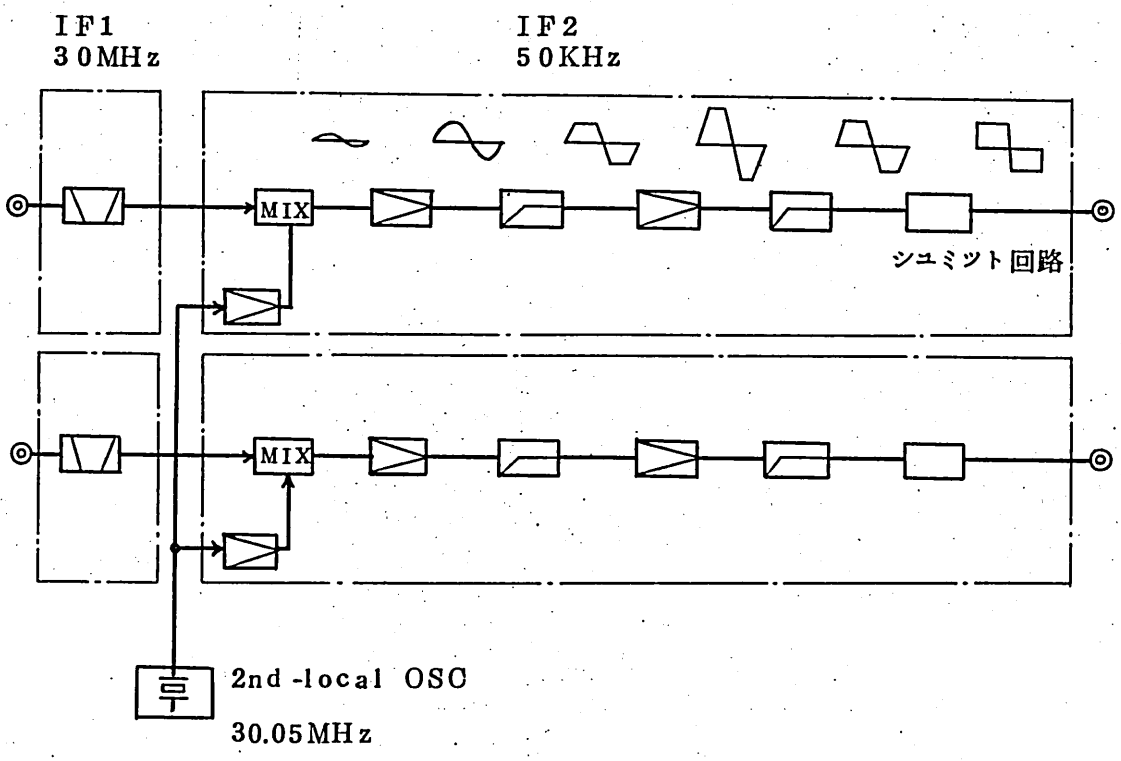



図4.7　受信機のブロック図

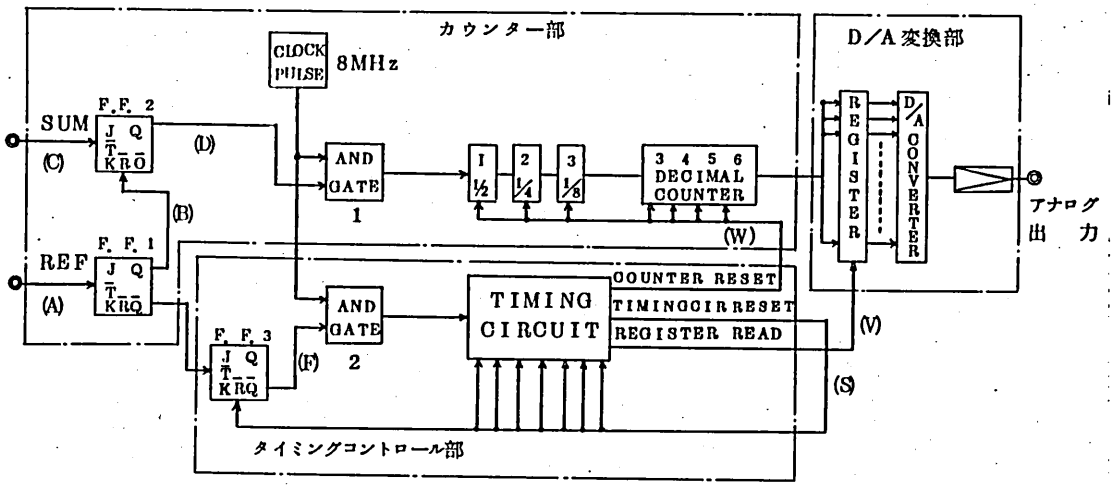



図4.8　演算部のブロック図

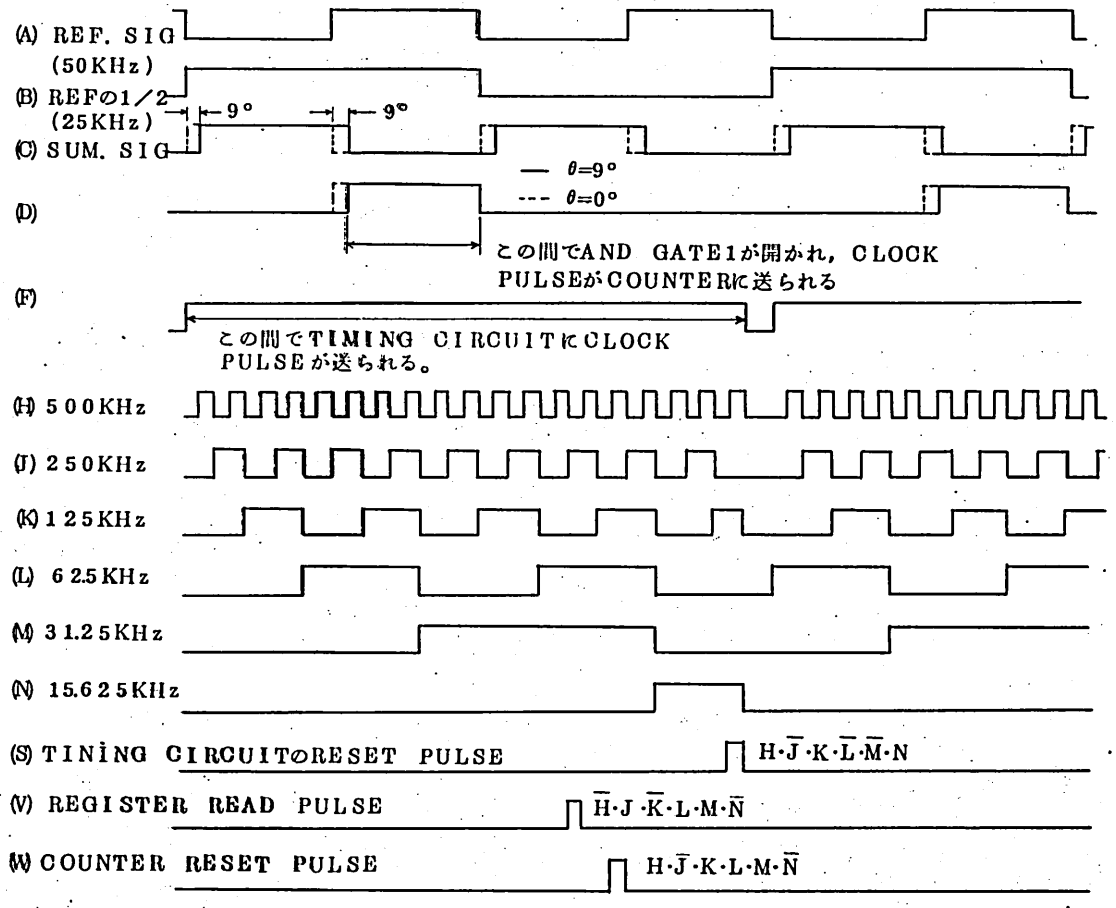
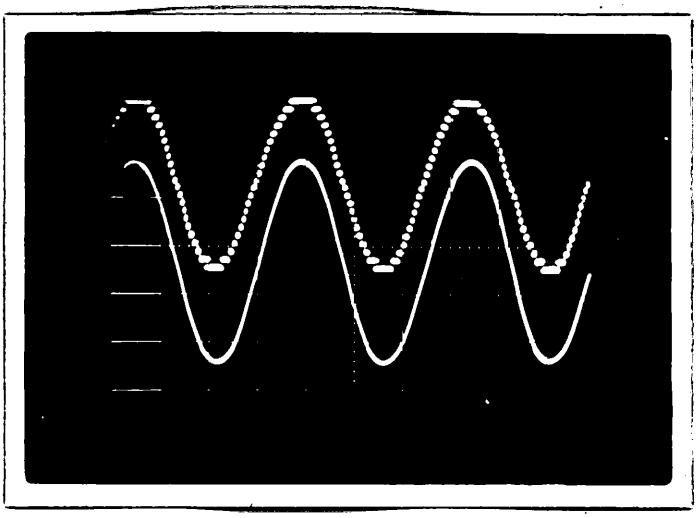



図4.9 演算部のタイミングチャート



上側：マイクロ波C.T.アナログ出力（2V／div）
下側：被測定電流波形
横軸：5msec／div

図4.10　60Hzにおける波形観測結果

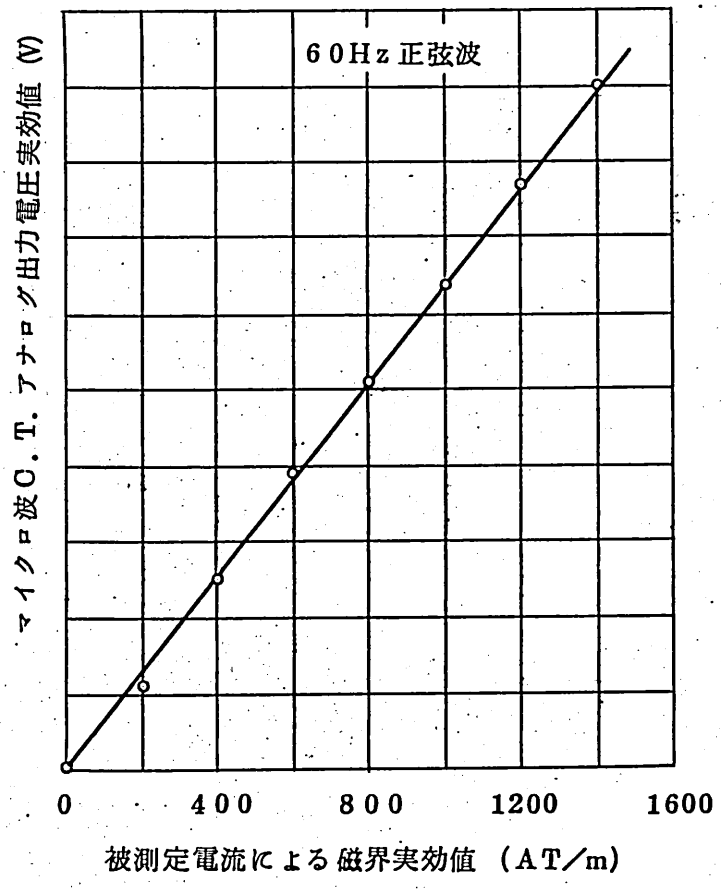



図4.11 試作機による電流試験結果

## 5. むすび

エレクトロニクス変流器を種々の立場より分類，比較し，問題点，長短を述べそれらのうちでマイクロ波フエライト変流器の立場を明らかにした。次にこの変流器の試作機について構造の概要と電流試験結果を記述した。試作機の電流試験の結果は満足すべきものが得られているが，完全な実用機とするためには高圧試験設備による長期の野外試験が不可欠であり，また高圧側アンテナの取付方法，システムとしての信頼性向上対策，耐雑音対策，広い電流を高精度で測定するシステムの採用など今後究明すべき事項が多く残つている。

将来どの種の無導体変流器が巻線形ブッシング変流器にとつて代るか予測はむずかしいが，高圧側に能動性素子をもたないものゝ方がより魅力的と考えられる。

マイクロ波フエライト変流器も含めて，エレクトロニクス変流器の実用化は，電力システムの大規模化，複雑化して行くにしたがつて要求されるエレクトロニクス化の方向に合致するものと考えられる。また逆に，このエレクトロニクス変流器の実用化によつて，この変流器に見合つた新しい電力システムの系統制御方式が実現する可能性をも含んでいる。

最後に，日頃御討論いたゞいている東京大学生産技術研究所の浜崎教授，藤井助教授および電力中央研究所の中村宏氏，竹下信也氏，その他関係各位に厚くお礼申し上げます。

参考文献

(1) 斉藤，浜崎，藤井，横山，大野：昭和４１年信学全大　５２９

(2) S SAITO, Y FUJII, K.YOKOYAMA, J.HAMAZAKI, Y.OHNO：IEEE.Trans., QE-2, 255(1966)

(3) 竹下，笹野：電力中央研究所，技術研究所報告，№67089(昭43-3)

(4) 斉藤，大野，喜連川，中原，立川：昭和４１年信学全大，３７３

(5) 斉藤，大野，喜連川，中原，立川：昭和４２年電気四学連大　１４１２

(6) 斉藤，大野，喜連川，中原，立川，小畑：昭和４３年信学連大　２３０

(7) 斉藤，大野，喜連川，中原，立川：三菱電機技報，vol42，№12，1968

(8) たとえば，大野，野村：昭和４０年電気四学連大　１０５０

(9) C.H.MOULTON：Electronics, May.17(1965)

(10) 副島：信学誌，４８，５６４(昭４０-４)

(11) 別段，安達，虫明：昭昭３９年電気四学連大　１０９７

(12) 立川，小畑：昭和４４年電気四学連大　１４０７

(13) 喜連川，立川：昭和３８年電気四学連大　１２６８

(14) S.A.SCHELKNOFF：Electromagnetic Waves, 425 Van Nostrand Co.Inc(1943)

(15) C.H.CHANDLER：J.App.Phys., 20, 1188(1949-12)

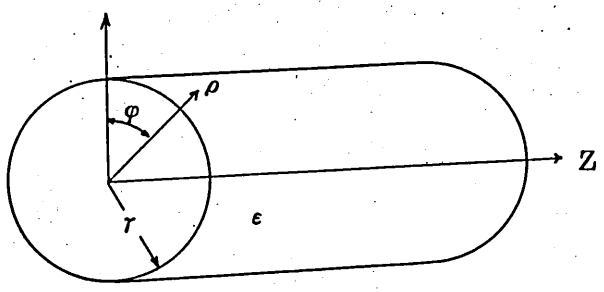
附　誘電体線路を用いたマイクロ波C．T．

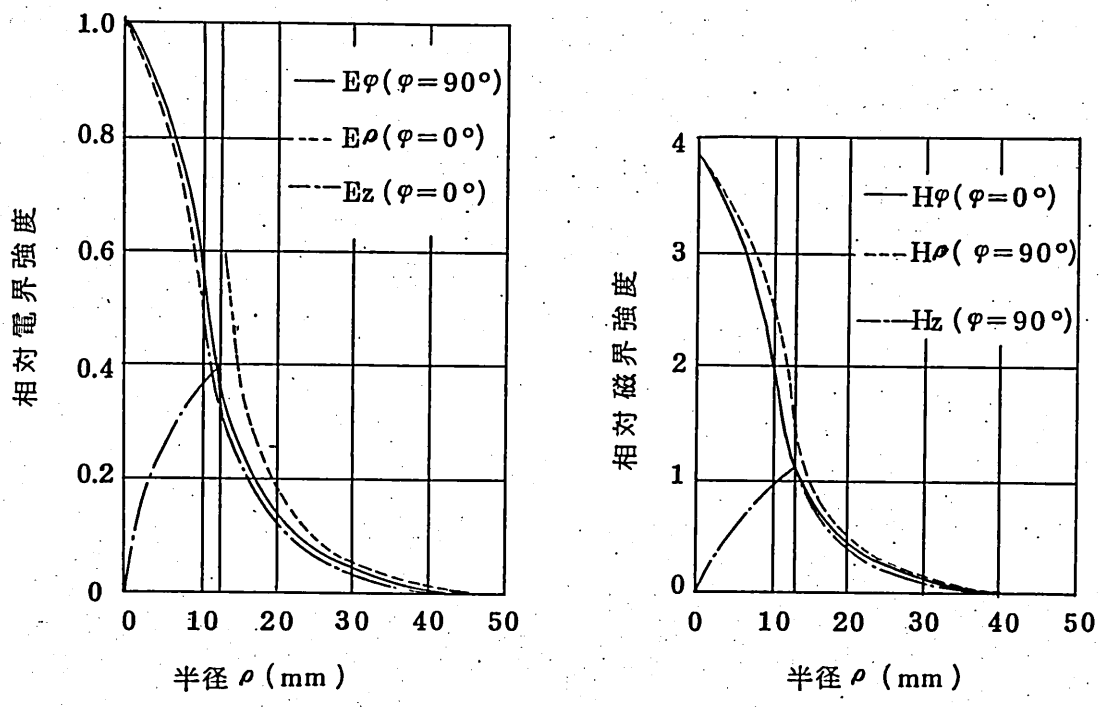
無導体形のマイクロ波C．T．としては，高圧側と地上側とを誘電体線路によつて結び，これにマイクロ波を伝送させる方法が考えられる。この誘電体線路としては元来用いられている如き，波長に比べて十分細い誘電体棒[14][15]を使用し，低損失伝送を行なわしめるよりも，より安定した伝送系が実現されることが望ましい。すなわち線路が多少曲つてもインピーダンスが変化したり，交叉偏波が発生したり，放射が生じたりしないことの方が望ましい，周囲を保護碍子で囲んでも伝送特性が影響されないことも必要である。

このような誘電体線路としては，誘電体棒の直径を大きくして，マイクロ波エネルギーの大部分を線路の内部およびごく近傍にのみ集中させればよい。この考えにもとずいて周波数9,375MHz（自由空間波長32㎜）に対して直径25㎜のテフロン棒を試用してみた。テフロン棒の比誘電率εを2として，$HE_{11}^{\circ}$ 姿態の電磁界分布を計算した結果を図附1に示す。

実験の結果は，1m当りの伝送損失は0.5dB 程度，交叉偏波発生量——40dB 以下であつた。また長さ1.7mのものゝ一端を固定した状態で円孤状に屈曲させ，他端を200㎜ 程度変位させても，インピーダンス，伝送損失および交叉偏波量は，直線時とほとんど変化はみとめられなかつた。

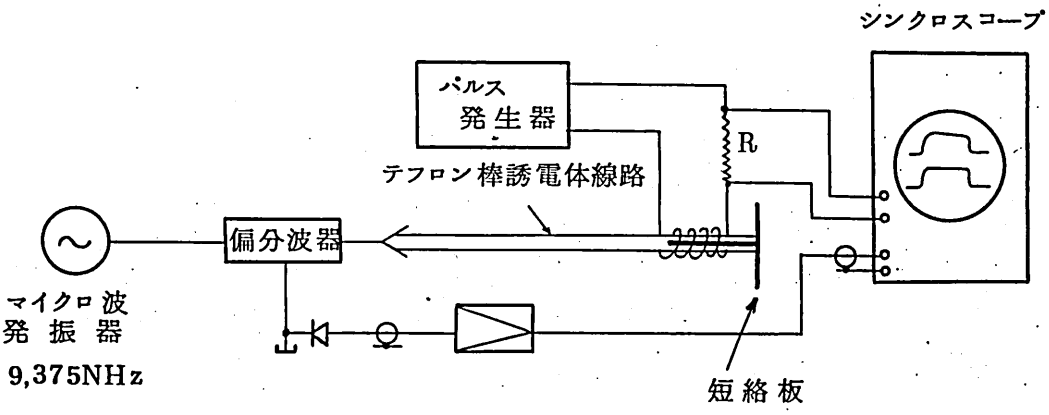
上に述べたテフロン棒によつて図附2(a)に示す如き回路でパルス電流の波形観測を行なう実験を行なつた。このマイクロ波C．T．は，本文で述べた試作器とは全く別の回路構成で，偏分波器のみによつて，送信マイクロ波の偏波面と直交した偏波成分の波を取り出すだけの簡単な装置である。フエライト旋波子は誘電体線路内に直接挿入し，その先端を金属円板にて短絡してある。旋波子を直接誘電体線路内に挿入する理由は，パルス等の速い現象を観測する場合，旋波子を金属導波管内に装荷したのでは，その導波表面に誘導される二次電流で観測波形にひずみが生ずるためである。図附2(a)の回路による波形観測結果を，図附2(b)に示す。被測定電流波形とマイクロ波検出波形は完全に一致している。



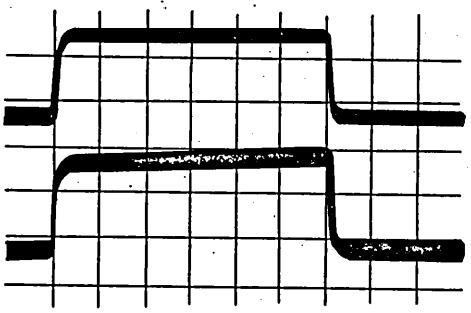




図，附1　テフロン棒を用いた誘電体線路の$HE_{11}$°姿態の電磁界分布（計算値）

$f$=9,375MHz，$2r$=25mm，$\varepsilon$=2.0




(a) 測定回路



上側：被測定電流波形　　0.5A／div
下側：マイクロ波検出波形　0.5V／div
横軸：1μsec／div

(b) 観測波形

図附2　テフロン棒誘電体線路に装荷したマイクロ波C.T.のパルス応用

輻射科学研究会資料

# 損失のある運動媒質を含む導波管の理論（厳密解）

## I. 誘電体

藤岡　弘
中川紀美雄
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1968年4月26日

# 1. 序　　言

損失のある運動媒質を含む導波管の解析は，CollierとTai[1]，および筆者ら[2],[3]によってなされ，媒質が静止している場合に比べて種々の興味ある現象[4],[5]が現われることが報告されている．しかし，上記文献はいずれも媒質の運動速度が光速に比べて十分小さい場合の解，すなわち近似解のみを取扱っている．

ここでは，媒質の運動速度に関するこのような制限を取り除いた厳密解について論じ，近似解の場合にはみられなかった特異な現象が現われることを示す．ただし，解析は伝導電流モデルと分極電流モデルの両者について行ない，最後にそれぞれの結果を比較検討している．

# 2. 導波管中の電磁界

誘電率$\varepsilon$，透磁率$\mu$，導電率$\sigma$をもつ線形，等方かつ一様なる非分散性媒質を考え，この媒質が図1に示すように任意の断面をもつ真直で一様な導波管中を軸方向に一様に$v$なる速度で運動しているものとする．ただし，管内に印加波源はないものとする．また，本文では定常状態のみを取扱うので，媒質および観測者の静止座標系における電磁界の時間変化をそれぞれ$e^{j\omega' t'}$および$e^{j\omega t}$と仮定する．なお，以下においてプライムのついた電磁界量は媒質の静止座標系における量を表わし，観測者の静止座標系における電磁界量にはプライムは付けないものとする．

さて，媒質の静止座標系における電磁界はTMモード，TEモードのそれぞれの場合についてつぎのように表わされる．

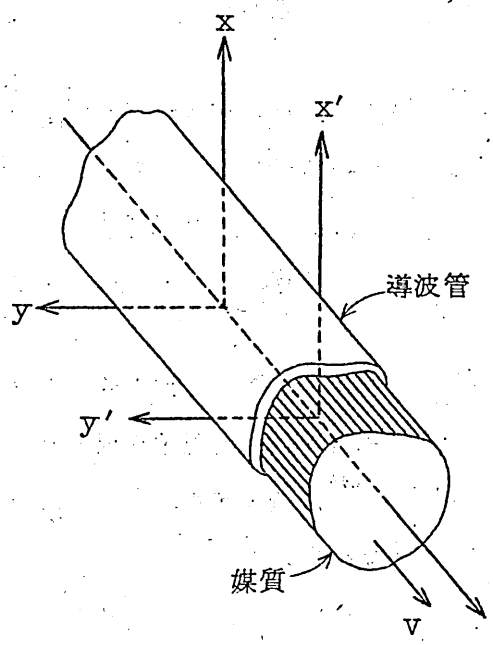



図1　座　標　系

TMモード

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{i}'_z \, E \exp(-j k'_z z')$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = -Z'_m \, (\mathbf{i}'_z \times \mathbf{H}'_{\perp})$$

$$\mathbf{H}'_{\perp} = -j(\omega' \hat{\varepsilon}/k'^2_m) \, \mathbf{i}'_z \times \nabla_t E \exp(-j k'_z z') \qquad (1)$$

TEモード

$$\mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{i}'_z \, H \exp(-j k'_z z')$$

$$\mathbf{H}'_{\perp} = Y'_m \, (\mathbf{i}'_z \times \mathbf{E}'_{\perp})$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = j(\omega' \mu/k'^2_m) \, \mathbf{i}'_z \times \nabla_t H \exp(-j k'_z z') \qquad (2)$$

上式において，$Z'_m$ および $Y'_m$ はそれぞれ次式によって定義される．

$$Z'_m = \frac{k'_z}{\omega' \hat{\varepsilon}} \qquad (3)$$

$$Y'_m = \frac{k'_z}{\omega' \mu} \tag{4}$$

また，EおよびHはつぎの方程式

$$\nabla_t^2 E + k_m^2 E = 0 \tag{5}$$

$$\nabla_t^2 H + k_m^2 H = 0 \tag{6}$$

の解であり，管壁上での境界条件を満足しているものとする．ただし，$\nabla_t$ はナブラ演算子の断面成分を表わし，

$$k_z'^2 = \omega'^2 \mu \hat{\varepsilon} - k_m^2$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega' \varepsilon}\right) \tag{7}$$

なお，電磁界表示(1)，(2)において，下部の添字∥および⊥は，それぞれ管軸に平行な成分および垂直な成分を表わす．

つぎに，観測者の静止座標系における電磁界は，Maxwell 方程式の共変性[6]を用いてつぎのように表わされる．

TMモード

$$\begin{aligned}
E_{c\parallel} &= i_z E \exp(-j k_z z) \\
E_{c\perp} &= -Z_{cm} (i_z \times H_{c\perp}) \\
H_{c\perp} &= -j(\gamma^2/k_m^2)\left[\hat{\varepsilon}(\omega - \beta k_z c) + c\beta\varepsilon(k_z - \beta\omega/c)\right] \\
&\qquad i_z \times \nabla_t E \exp(-j k_z z)
\end{aligned} \tag{8}$$

TEモード

$$\begin{aligned}
H_{c\parallel} &= i_z H \exp(-j k_z z) \\
H_{c\perp} &= Y_{cm} (i_z \times E_{c\perp})
\end{aligned}$$

$$\Xi_{c\perp} = j(\gamma^2/k_m^2)\mu\omega(1-\beta^2)\, i_z \times \nabla_t H \exp(-jk_z z) \qquad (9)$$

ただし，上式において下部の添字cは伝導電流モデル[7],[8]による電磁界量を表わす．また，$Z_{cm}$および$Y_{cm}$はそれぞれつぎのように定義される．

$$Z_{cm} = \frac{k_z - \beta\omega/c + \beta c\mu\hat{\varepsilon}(\omega - \beta k_z c)}{\hat{\varepsilon}(\omega - \beta k_z c) + c\beta\varepsilon(k_z - \beta\omega/c)} \qquad (10)$$

$$Y_{cm} = \frac{\gamma^2}{\mu\omega}\left[k_z - \beta\omega/c + \beta c\mu\varepsilon(\omega - \beta k_z c)\right] \qquad (11)$$

なお，観測者の静止座標系における分散関係式は，媒質の静止座標系における分散関係式(7)に変換式

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta k_z c)$$

$$k_z' = \gamma(k_z - \beta\omega/c) \qquad (12)$$

ただし，cは真空中の光速度を表わし

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (13)$$

を用いてつぎのように求められる．

$$k_z^2(1-\beta^2c^2\mu\varepsilon) + k_z\left[-2\beta(\omega/c)(1-c^2\mu\varepsilon) - j\mu\sigma\beta c/\gamma\right] + (\omega/c)^2(\beta^2 - c^2\mu\varepsilon) + (1-\beta^2)k_m^2 + j\mu\sigma\omega/\gamma = 0 \qquad (14)$$

## 3. 位相定数と減衰定数

位相定数$\beta_m$および減衰定数$\alpha_m$を次式によって定義する.

$$k_z = \beta_m - j\alpha_m \tag{15}$$

このとき, 分散関係式(14)から$\beta_m$および$\alpha_m$はそれぞれつぎのように求まる. まず, $1-n^2\beta^2 \neq 0$の場合には,

$$\beta_m = \beta_m^{\pm} = \frac{2\pi/\lambda_m}{n(1-n^2\beta^2)}\left[\beta(1-n^2)\frac{\lambda_m}{\lambda} \pm g\right], \quad (n^2\beta^2 \neq 1) \tag{16}$$

$$\alpha_m = \alpha_m^{\pm} = \frac{2\pi/\lambda_m}{n(1-n^2\beta^2)}\left[-(n^2\beta/2\gamma)\tan^2\delta_0 \pm h\right], \quad (n^2\beta^2 \neq 1) \tag{17}$$

ただし,

$$g = \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}}$$

$$h = \sqrt{\frac{-P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}} \tag{18}$$

ここで,

$$P = n^2(1-\beta^2)^2(\lambda_m/\lambda)^2 - (1-n^2\beta^2)(1-\beta^2)n^2 - (n^2\beta/2\gamma)^2\tan^2\delta_0$$

$$Q = -(1-\beta^2)(n^2/\gamma)(\lambda_m/\lambda)\tan\delta_0 \tag{19}$$

なお, 上式においてつぎの諸記号を導入した.

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = c\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{c}{n}$$

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m}$$

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\lambda}{\lambda_m}\tan\delta_0 \qquad (20)$$

ただし，$\tan\delta_0$は$\lambda_m/\lambda = 1$のときの$\tan\delta$の値を表わす．また，以下において$n > 1$と仮定する．式(16)および(17)からつぎの関係式を得る．

$$\beta_m^{\pm}(-\beta) = -\beta_m^{\mp}(\beta), \quad (n^2\beta^2 \fallingdotseq 1) \qquad (21)$$

$$\alpha_m^{\pm}(-\beta) = -\alpha_m^{\mp}(\beta), \quad (n^2\beta^2 \fallingdotseq 1) \qquad (22)$$

つぎに，$1-n^2\beta^2 = 0$のときの$\beta_m$および$\alpha_m$は分散関係式(14)からそれぞれつぎのように求まる．

$$\beta_m = \frac{2\pi\beta}{n\lambda_m}\cdot\frac{(\lambda_m/\lambda)\left[2(1-\beta^2)\{(1+\beta^2)-(\lambda/\lambda_m)^2\}+(\lambda/\lambda_m)^2\tan^2\delta_0\right]}{4(1-\beta^2)+(\lambda/\lambda_m)^2\tan^2\delta_0}, \quad (n^2\beta^2 = 1) \qquad (23)$$

$$\alpha_m = \frac{2\pi\beta}{n\lambda_m}\cdot\frac{\left[(1-\beta^2)+(\lambda/\lambda_m)^2\right]\sqrt{1-\beta^2}\tan\delta_0}{4(1-\beta^2)+(\lambda/\lambda_m)^2\tan^2\delta_0}, \quad (n^2\beta^2 = 1) \qquad (24)$$

上式から$n^2\beta^2 = 1$のときには，一般には2つあるべき伝搬定数が1つに縮退することがわかる．なお，上式からつぎの関係式を得る．

$$\beta_m(-\beta) = -\beta_m(\beta), \quad (n^2\beta^2 = 1) \qquad (25)$$

$$\alpha_m(-\beta) = -\alpha_m(\beta), \quad (n^2\beta^2 = 1) \qquad (26)$$

さて，つぎに位相定数$\beta_m$の符号について調べる．ただし，式(21),(22)および式(25),(26)の関係式から$\beta \geqq 0$と仮定しても一般性を失わないから，以下においては$\beta \geqq 0$と仮定する．まず，$n\beta \neq 1$の場合$\beta_m^+$の符号は表1のようになる．

表1　$\beta_m^+$ の符号 $(n\beta \neq 1)$

<table>
<tr><td colspan="3">$n \leqq \sqrt{2}$，または $n > \sqrt{2}$ かつ $\tan\delta_0 < \dfrac{2(n^2-1)}{n\sqrt{n^2-2}}$</td></tr>
<tr><td>$\beta < \beta^0$</td><td colspan="2">$\beta_m^+ > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\beta > \beta^0$</td><td>$\dfrac{\lambda_m}{\lambda} < \dfrac{\lambda_m}{\lambda^0}$</td><td>$\beta_m^+ < 0$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\lambda_m}{\lambda} = \dfrac{\lambda_m}{\lambda^0}$</td><td>$\beta_m^+ = 0$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\lambda_m}{\lambda} > \dfrac{\lambda_m}{\lambda^0}$</td><td>$\beta_m^+ > 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$n > \sqrt{2}$ かつ $\tan\delta_0 \geqq \dfrac{2(n^2-1)}{n\sqrt{n^2-2}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\beta_m^+ > 0$</td></tr>
</table>

ただし，上表における$\beta^0$および$\lambda_m/\lambda^0$はそれぞれつぎのように定義される．

$$\beta^0 = \frac{n\tan\delta_0}{\sqrt{4(n^2-1)^2 + n^2(2-n^2)\tan^2\delta_0}} \tag{27}$$

$$\frac{\lambda_m}{\lambda^0} = \frac{n}{n^2-1}\sqrt{\frac{4\beta^2(1-n^2)^2 - n^2\{1+\beta^2(n^2-2)\}\tan^2\delta_0}{4(n^2-\beta^2)\beta^2\gamma^2}} \tag{28}$$

つぎに，$\beta_m^-$の符号は表2のようになる．

表2　$\beta_m^-$ の符号 ($n\beta \neq 1$)

| | |
|---|---|
| $0 < n\beta < 1$ | $\beta_m^- < 0$ |
| $n\beta > 1$ | $\beta_m^- > 0$ |

なお，$\lambda_m/\lambda = 0$のときの$\beta_m$の値は表3のようになる．

表3　$\lambda_m/\lambda = 0$ のときの $\beta_m$ ($n\beta \neq 1$)

| | |
|---|---|
| $\tan\delta_0 < 2$ | |
| $\beta \leqq \dfrac{1}{n\sqrt{1-(\tan\delta_0/2)^2}}$ | $\beta_m = \beta_m^{\pm} = 0$ |
| $\beta > \dfrac{1}{n\sqrt{1-(\tan\delta_0/2)^2}}$ | $\beta_m = \beta_m^{\pm} = \mp \dfrac{2\pi/\lambda_m}{n(n^2\beta^2-1)}\{\sqrt{P}\}$ |
| $\tan\delta_0 > 2$ | |
| $\beta_m = \beta_m^{\pm} = 0$ | |

ただし，上表において

$$P = (n^2\beta^2-1)(1-\beta^2)n^2 - (n^2\beta/2\gamma)^2\tan^2\delta_0 \qquad (29)$$

以上は$n\beta \neq 1$のときの$\beta_m$であるが$n\beta = 1$のときには表4のようになる．ただし，表4における$\lambda_m/\lambda^0$は次式によって定義される．

$$\frac{\lambda_m}{\lambda^0} = \sqrt{\frac{2(1-1/n^2)-\tan^2\delta_0}{2\{1-1/n^4\}}}\ , \quad (n\beta = 1) \qquad (30)$$

図2，および3は$\beta_m$の数値計算例である．

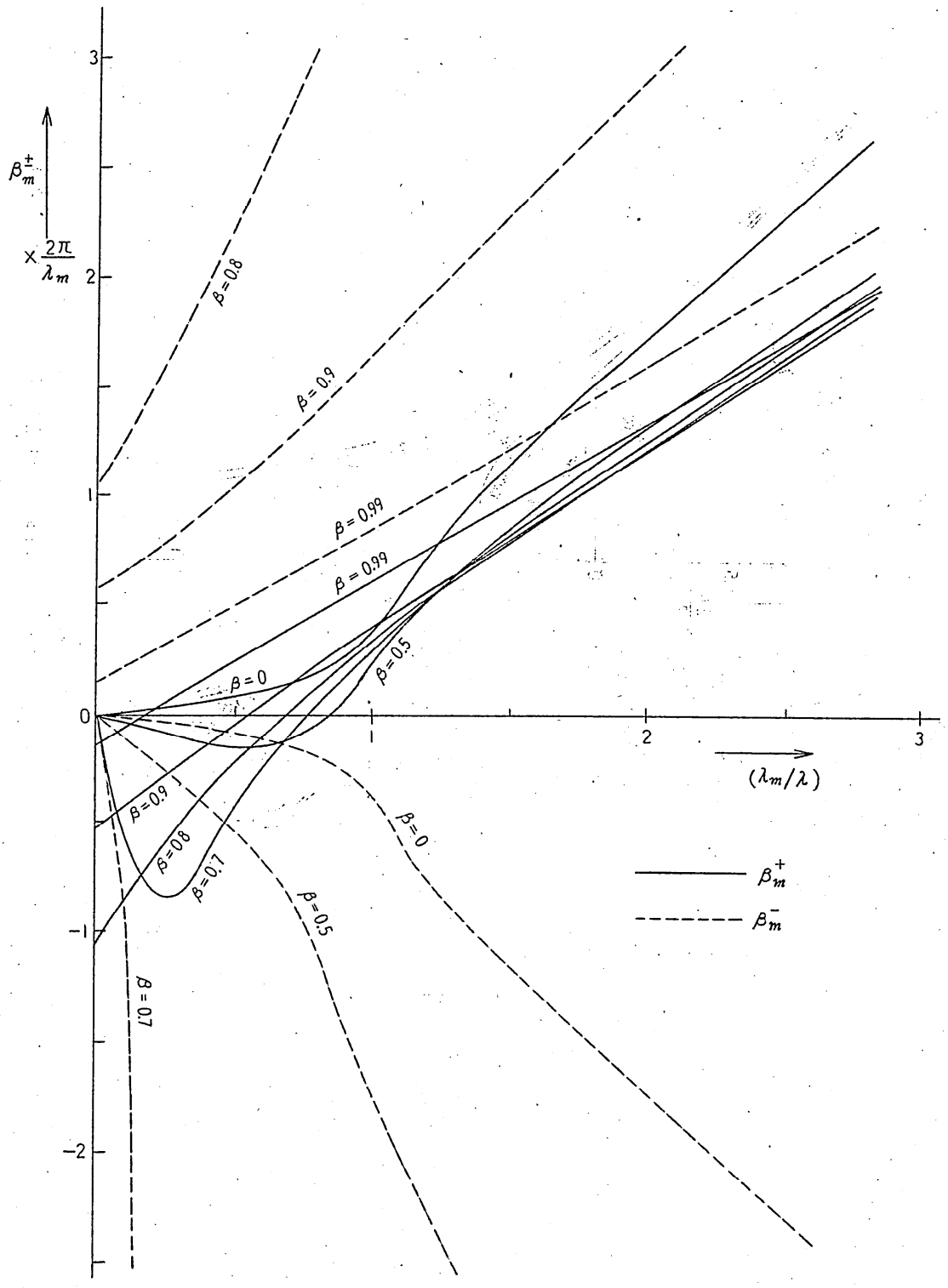



図２　位相定数 $\beta_m^{\pm}$ ($n\beta \fallingdotseq 1$, $\tan\delta_0 = 0.3$, $n = \sqrt{2}$)

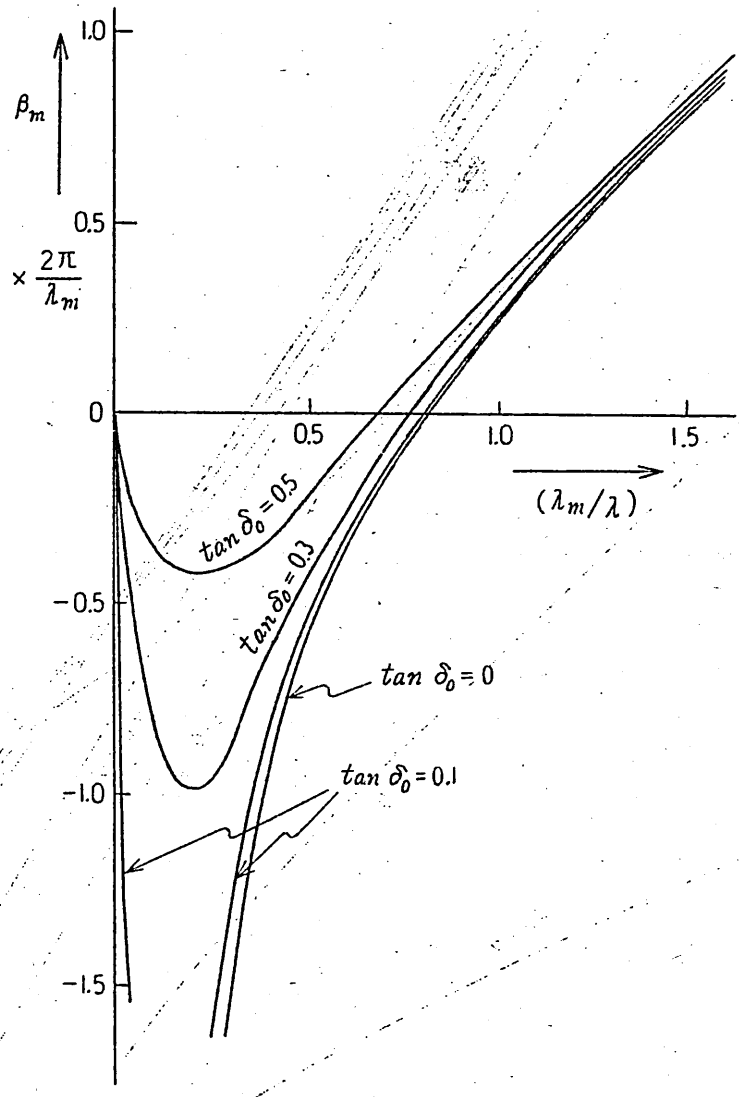



図3　位相定数 $\beta_m$（$n\beta = 1$, $n = \sqrt{2}$）

表4　$\beta_m$ の符号 ($n\beta=1$)

| $\tan\delta_0 < \sqrt{2(1-1/n^2)}$ | |
|---|---|
| $\frac{\lambda_m}{\lambda} < \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$ | $\beta_m < 0$ |
| $\frac{\lambda_m}{\lambda} = \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$ | $\beta_m = 0$ |
| $\frac{\lambda_m}{\lambda} > \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$ | $\beta_m > 0$ |
| $\tan\delta_0 > \sqrt{2(1-1/n^2)}$ | |
| $\beta_m > 0$ | |

つぎに，減衰定数について調べる．まず $n\beta \neq 1$ のときの $\alpha_m$ の符号は表5のようになる．

表5　$\alpha_m$ の符号 ($n\beta \neq 1$)

| | $\tan\delta_0 \neq 0$ | $\tan\delta_0 = 0$ | |
|---|---|---|---|
| $0<n\beta<1$ | $\alpha_m^{\mp} > 0$ | $\frac{\lambda_m}{\lambda} < \sqrt{\frac{1-n^2\beta^2}{1-\beta^2}}$ | $\alpha_m^+ > 0$<br>$\alpha_m^- < 0$ |
| | $\alpha_m^- < 0$ | $\frac{\lambda_m}{\lambda} \geqq \sqrt{\frac{1-n^2\beta^2}{1-\beta^2}}$ | $\alpha_m^+ = 0$<br>$\alpha_m^- = 0$ |
| $n\beta>1$ | $\alpha_m^+ > 0$<br>$\alpha_m^- > 0$ | $\alpha_m^+ = 0$<br>$\alpha_m^- = 0$ | |

また，$n\beta=1$ のときには表6のようになる．

表6　$\alpha_m$ の符号 $(n\beta=1)$

| | |
|---|---|
| $\tan\delta_0 \neq 0$ | $\alpha_m > 0$ |
| $\tan\delta_0 = 0$ | $\alpha_m = 0$ |

ここで，表5に明らかなように$n\beta>1$のときには減衰定数$\alpha_m^+$および$\alpha_m^-$が共に正の値をとることに注意したい．図4，および5は $\alpha_m$ の数値計算例である．

## 4. 電磁エネルギーの流れ

軸方向の電磁エネルギーの流れを$W_c$とすると，$W_c$はポインティング・ベクトル$S_c$のz方向成分$S_{cz}$をz軸に垂直な断面Aで積分したものであるから次式を得る．

$$W_c = \iint_A S_{cz}\, da \tag{31}$$

$$S_{cz} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^*)\cdot \mathbf{i}_z \tag{32}$$

式(32)を式(8)，(9)を用いて書き換えるとつぎのようになる．

$$S_{cz} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}[Z_{cm}](\mathbf{H}_{c\perp}\cdot\mathbf{H}_{c\perp}^*), (\mathrm{TM}モード) & (33) \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}[Y_{cm}](\mathbf{E}_{c\perp}\cdot\mathbf{E}_{c\perp}^*), (\mathrm{TE}モード) & (34) \end{cases}$$

ここで，$^*$は複素共役ベクトルを表わし，またRe は実数部をとる操作を表わす．

上式(33)，(34)から電磁エネルギーの流れの方向は$\mathrm{Re}[Z_{cm}]$，および

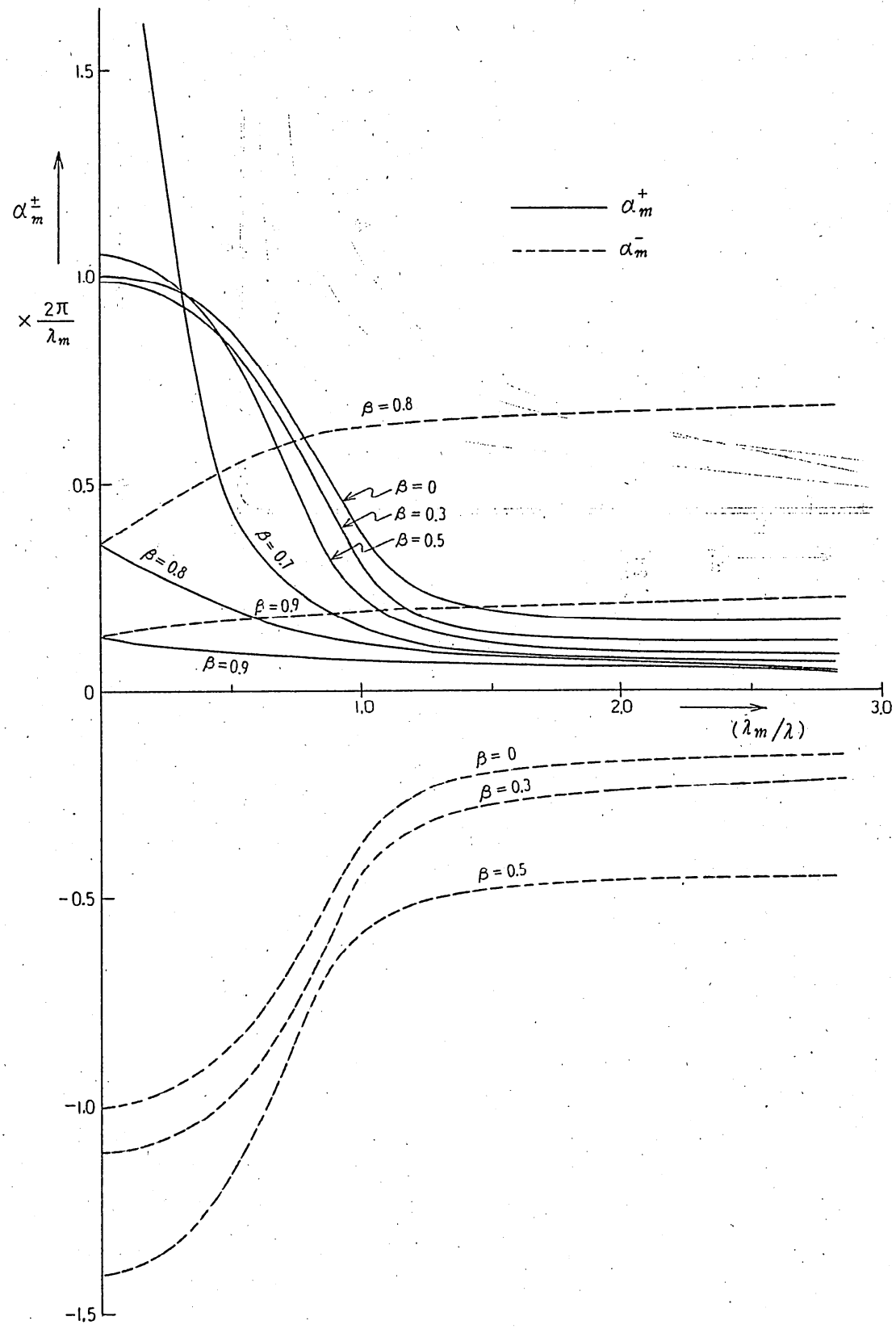



図4　減衰定数 $\alpha_m^{\pm}$ ( $n\beta \fallingdotseq 1$, $\tan\delta_0 = 0.3$, $n = \sqrt{2}$ )

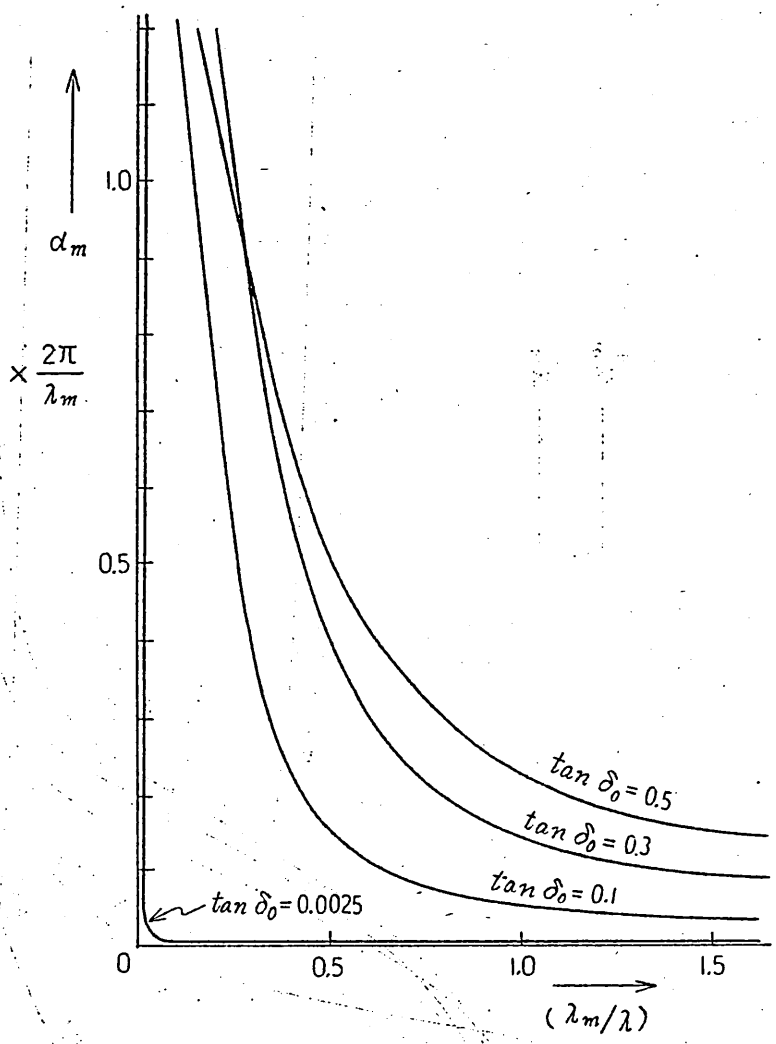



図5　減衰定数 $\alpha_m$（$n\beta=1$，$n=\sqrt{2}$）

$\mathrm{Re}[Y_{cm}]$の符号によって決まることがわかる．式(10)および(11)から$\mathrm{Re}[Z_{cm}]$および$\mathrm{Re}[Y_{cm}]$はそれぞれつぎのように求まる．まず，$n\beta \neq 1$のとき，

$$\mathrm{Re}[Z_{cm}] = \mathrm{Re}[Z_{cm}^{\pm}] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1/n}{1-\beta^2+(\lambda/\lambda_m)^2 \tan^2\delta_0} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)\left[\pm g + \gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)\tan\delta_0\left\{(n^2\beta/2\gamma)\tan\delta_0 \pm h\right\}\right], \quad (n\beta \neq 1) \tag{35}$$

$$\mathrm{Re}[Y_{cm}] = \mathrm{Re}[Y_{cm}^{\pm}] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{n(1-\beta^2)} \frac{\lambda}{\lambda_m}[\pm g], \quad (n\beta \neq 1) \tag{36}$$

つぎに，$n\beta = 1$のとき，

$$\mathrm{Re}[Z_{cm}] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (n\beta = 1) \tag{37}$$

$$\mathrm{Re}[Y_{cm}] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (n\beta = 1) \tag{38}$$

上式から，

$$\mathrm{Re}[Z_{cm}^{+}] > 0, \quad (n\beta \neq 1) \tag{39}$$

$$\mathrm{Re}[Y_{cm}^{+}] > 0, \quad (n\beta \neq 1) \tag{40}$$

$$\mathrm{Re}[Z_{cm}] > 0, \quad (n\beta = 1) \tag{41}$$

$$\mathrm{Re}[Y_{cm}] > 0, \quad (n\beta = 1) \tag{42}$$

となることがわかる．したがって，位相定数(16)および減衰定数(17)の複号のうち＋は電磁エネルギーがzの正方向に伝搬する波の伝搬定数を表わすことがわかる．また，$n\beta = 1$のときには電磁エネルギーは常にzの正の方向に流れることがわかる．さて，式(35)の数値計算例である図6からわかるように，$\mathrm{Re}[Z_{cm}^{-}]$は$\lambda_m/\lambda$が小さい部分を除いては負の値をとり，また

式(36)から直ちにわかるように$\mathrm{Re}[Y_{cm}^{-}]$は常に負の値をとる．ここで，前節の表5において注意したように$n\beta>1$のときには$\alpha_m^{-}$が常に正の値をもつことから，$n\beta>1$のときには電磁エネルギーの流れの方向がzの負の方向であり，減衰定数$\alpha_m^{-}$が常に正の値をとる領域が$\lambda_m/\lambda$の大部分の領域にわたって存在し，したがってあたかも波が"増幅"されるような現象が起ることがわかる．なお，このとき表2からわかるように位相定数$\beta_m^{-}$は常に正の値をとる．このような現象は，次節で述べるように分極電流モデルを用いても同じように起り，損失のある運動媒質を含む導波管に特有の特異な現象であると思われるが，これに関しては更に詳しい検討が必要であると思われる．図6，7は$\mathrm{Re}[Z_{cm}^{\pm}]$，$\mathrm{Re}[Y_{cm}^{+}]$の数値計算例である．ただし，$\mathrm{Re}[Y_{cm}^{-}]$のグラフは図7のグラフを横軸に対して対称に折り曲げることによって得られる．

## 5. 分極電流モデル

分極電流モデル[7],[8]を用いて得られた結果はつぎのようになる．

電磁界

TMモード

$$\mathbf{E}_{p\parallel}=\mathbf{i}_z E\exp(-jk_z z)$$
$$\mathbf{E}_{p\perp}=-Z_{pm}(\mathbf{i}_z\times\mathbf{H}_{p\perp})$$
$$\mathbf{H}_{p\perp}=-j(\gamma^2/k_m^2)\hat{\varepsilon}\omega(1-\beta^2)\mathbf{i}_z\times\nabla_t E\exp(-jk_z z)\quad(43)$$

TEモード

$$\mathbf{H}_{p\parallel}=\mathbf{i}_z H\exp(-jk_z z)$$
$$\mathbf{H}_{p\perp}=Y_{pm}(\mathbf{i}_z\times\mathbf{E}_{p\perp})$$
$$\mathbf{E}_{p\perp}=j(\gamma^2/k_m^2)\mu\omega(1-\beta^2)\mathbf{i}_z\times\nabla_t H\exp(-jk_z z)\quad(44)$$

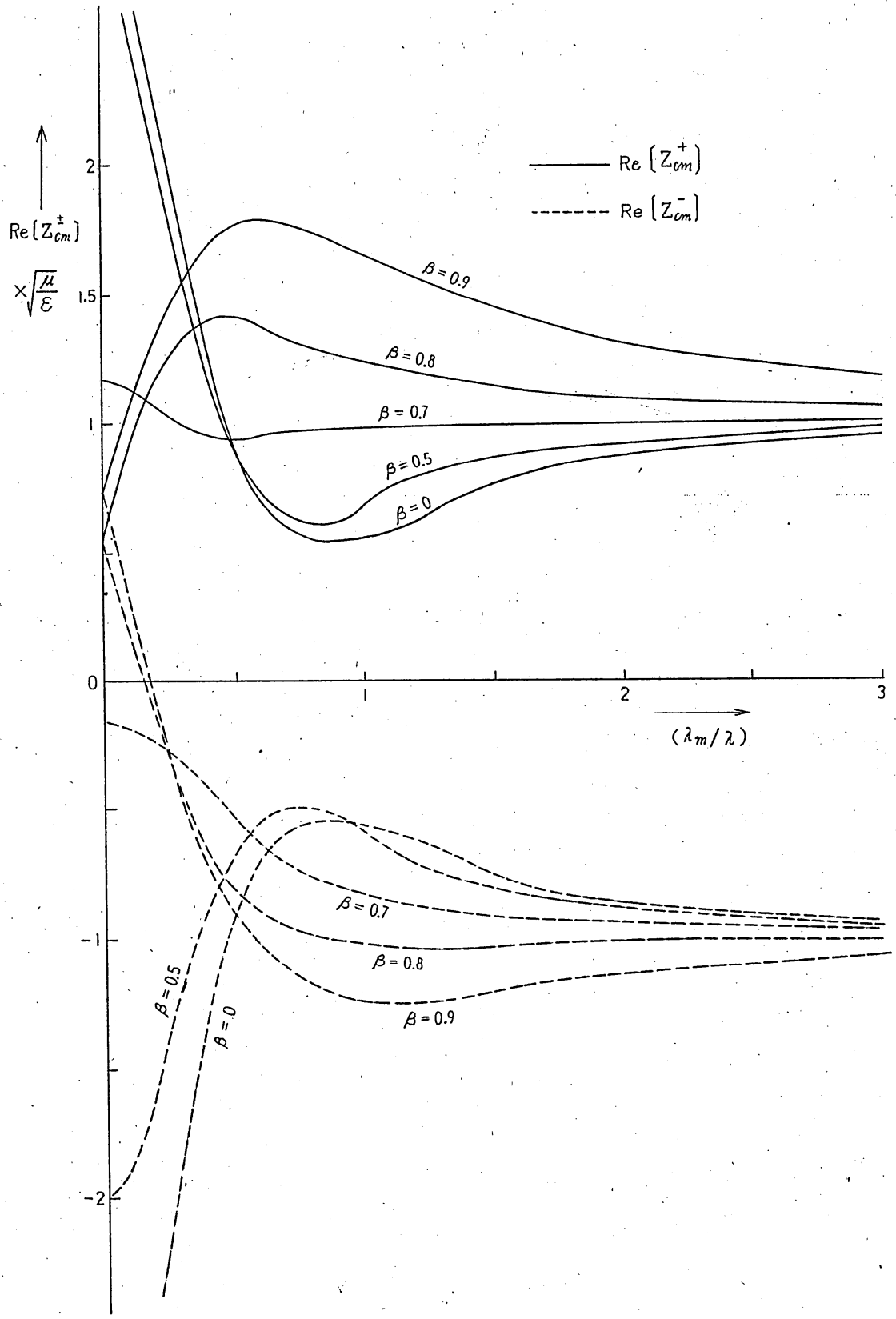



図6　$\mathrm{Re}[Z_{cm}^{\pm}]$　($n\beta \fallingdotseq 1$, $\tan\delta_0 = 0.3$, $n = \sqrt{2}$ )

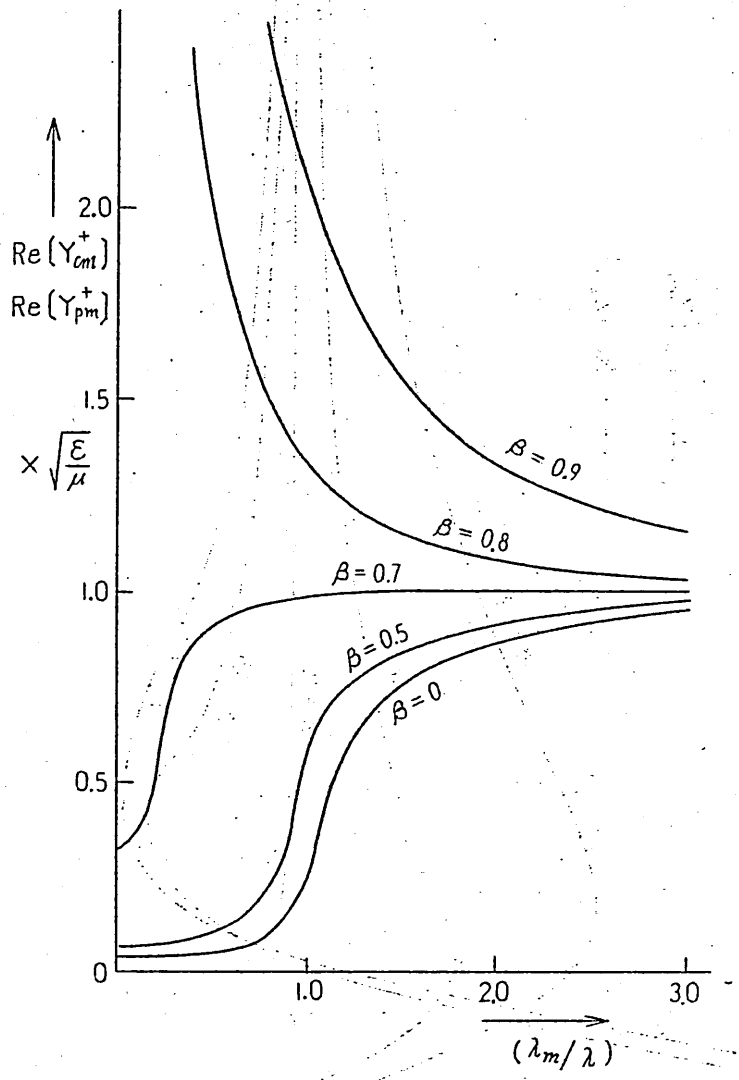



図7　$\mathrm{Re}[Y_{cm}^{+}]=\mathrm{Re}[Y_{pm}^{+}]$　($\tan\delta_0=0.3$, $n=\sqrt{2}$)

ただし，

$$Z_{pm} = \frac{\gamma^2}{\hat{\varepsilon}\omega}\left[k_z - \beta\omega/c + \beta c\mu\hat{\varepsilon}\left(\omega - \beta k_z c\right)\right] \tag{45}$$

$$Y_{pm} = \frac{\gamma^2}{\mu\omega}\left[k_z - \beta\omega/c + \beta c\mu\hat{\varepsilon}\left(\omega - \beta k_z c\right)\right] \tag{46}$$

電磁エネルギーの流れ

$$W_p = \iint_A S_{pz}\, da \tag{47}$$

$$S_{pz} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^*\right)\cdot \mathbf{I}_z \tag{48}$$

$$S_{pz} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}[Z_{pm}]\left(\mathbf{H}_{p\perp}\cdot\mathbf{H}_{p\perp}^*\right), & (\mathrm{TM}\text{モード}) \quad (49) \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}[Y_{pm}]\left(\mathbf{E}_{p\perp}\cdot\mathbf{E}_{p\perp}^*\right), & (\mathrm{TE}\text{モード}) \quad (50) \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}[Z_{pm}] = \mathrm{Re}[Z_{pm}^{\pm}] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{n}\left[\left[(\pm g)\left[\left\{\pm\beta g - (1-\beta^2)\frac{\lambda_m}{\lambda}\right\}^2 + \beta\left\{-(n^2\beta/2\gamma)\tan\delta_0 \pm h\right\}\left\{\frac{n^2\beta^2-2}{2\gamma}\tan\delta_0 \pm \beta h\right\}\right] - \frac{1}{\gamma}\left\{(n^2\beta/2\gamma)\tan\delta_0 \pm h\right\}(1-n^2\beta^2)\left\{\pm\beta g - (1-\beta^2)\frac{\lambda_m}{\lambda}\right\}\right]\tan\delta_0\right]\left[\left[\left\{\pm\beta g - (1-\beta^2)\frac{\lambda_m}{\lambda}\right\}^2 + \left\{\frac{n^2\beta^2-2}{2\gamma}\tan\delta_0 \pm \beta h\right\}^2\right]\frac{\lambda_m}{\lambda}(1-\beta^2)\right]^{-1}, \quad (n\beta \fallingdotseq 1) \tag{51}$$

$$\mathrm{Re}[Y_{pm}] = \mathrm{Re}[Y_{pm}^{\pm}] = \mathrm{Re}[Y_{cm}^{\pm}] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{n(1-\beta^2)}\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)[\pm g],\ (n\beta \neq 1) \tag{52}$$

$$\mathrm{Re}[Z_{pm}] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[(1-1/n^2)+(\lambda/\lambda_m)^2]\,[4(\lambda_m/\lambda)^2(1-1/n^2)$$
$$\{(1-1/n^2)+(\lambda/\lambda_m)^2\}+\{5(1-1/n^2)+(\lambda/\lambda_m)^2(1+\tan^2\delta_0)\}$$
$$\tan^2\delta_0\,][4(\lambda_m/\lambda)^2(1-1/n^2)\{(1-1/n^2)+(\lambda/\lambda_m)^2\}^2$$
$$+\{-3(1-1/n^2)+(\lambda/\lambda_m)^2(1-\tan^2\delta_0)\}^2\tan^2\delta_0\,]^{-1},\ (n\beta=1) \tag{53}$$

$$\mathrm{Re}[Y_{pm}] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (n\beta = 1) \tag{54}$$

式(51), (53)からわかるように$\mathrm{Re}[Z_{pm}]$は伝導電流モデルの$\mathrm{Re}[Z_{cm}]$に比べて若干複雑となり，一見しただけではその正負は分からないが，図8に示した数値計算例($n = \sqrt{2}$, $\tan\delta_0 = 0.3$)の場合には，

$$\mathrm{Re}[Z_{pm}^{+}] > 0, \quad (n\beta \neq 1) \tag{55}$$

$$\mathrm{Re}[Z_{pm}^{-}] < 0, \quad (n\beta \neq 1) \tag{56}$$

となる．また，式(52)より直ちにつぎの関係式を得る．

$$\mathrm{Re}[Y_{pm}^{+}] > 0, \quad (n\beta \neq 1) \tag{57}$$

$$\mathrm{Re}[Y_{pm}^{-}] < 0, \quad (n\beta \neq 1) \tag{58}$$

つぎに，$n\beta = 1$のときには式(53), (54)から

$$\mathrm{Re}[Z_{pm}] > 0, \quad (n\beta = 1) \tag{59}$$

$$\mathrm{Re}[Y_{pm}] > 0, \quad (n\beta = 1) \tag{60}$$

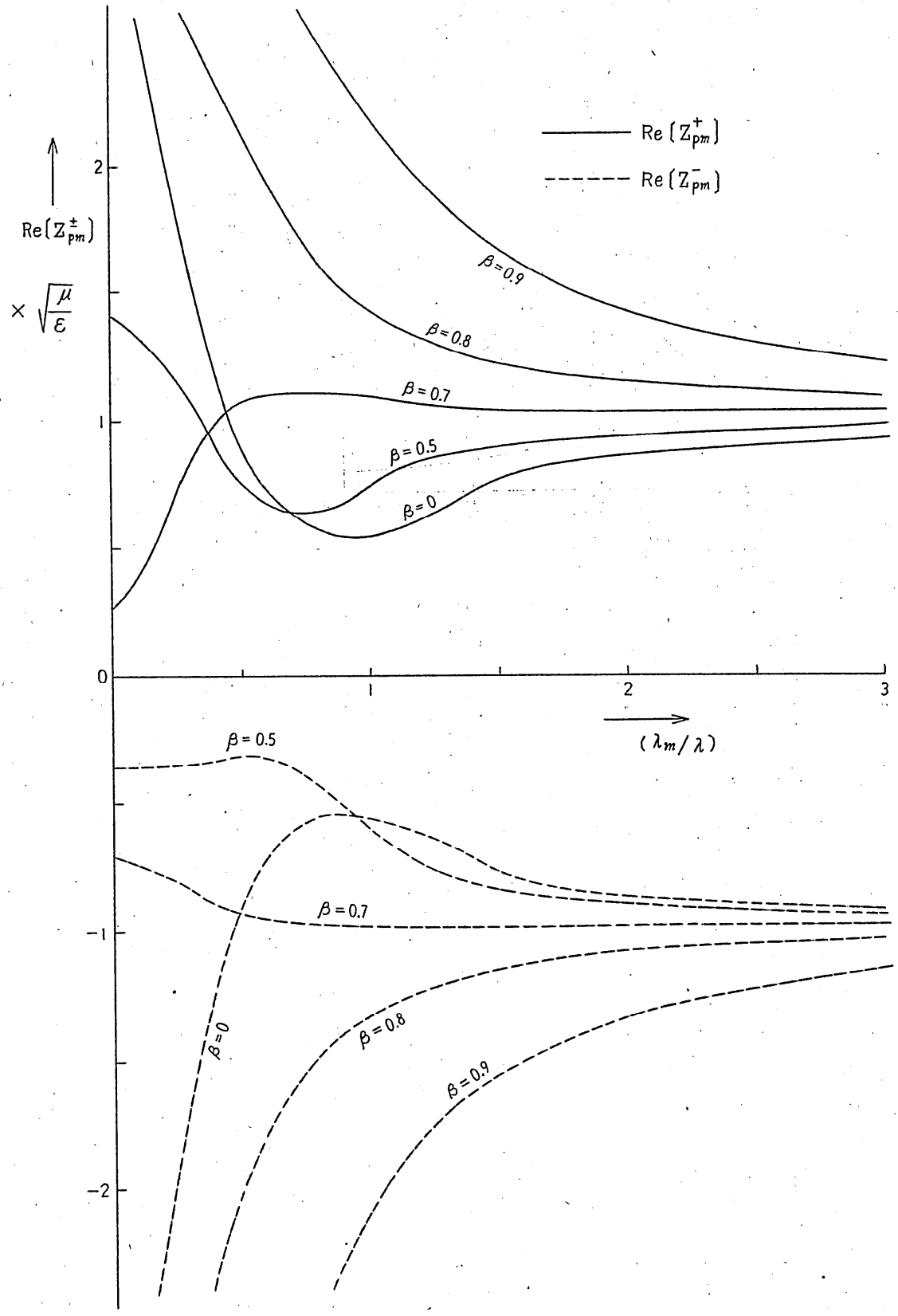



図 8　$\mathrm{Re}[Z_{pm}^{\pm}]$　($n\beta \fallingdotseq 1$,　$\tan\delta_0 = 0.3$,　$n = \sqrt{2}$)

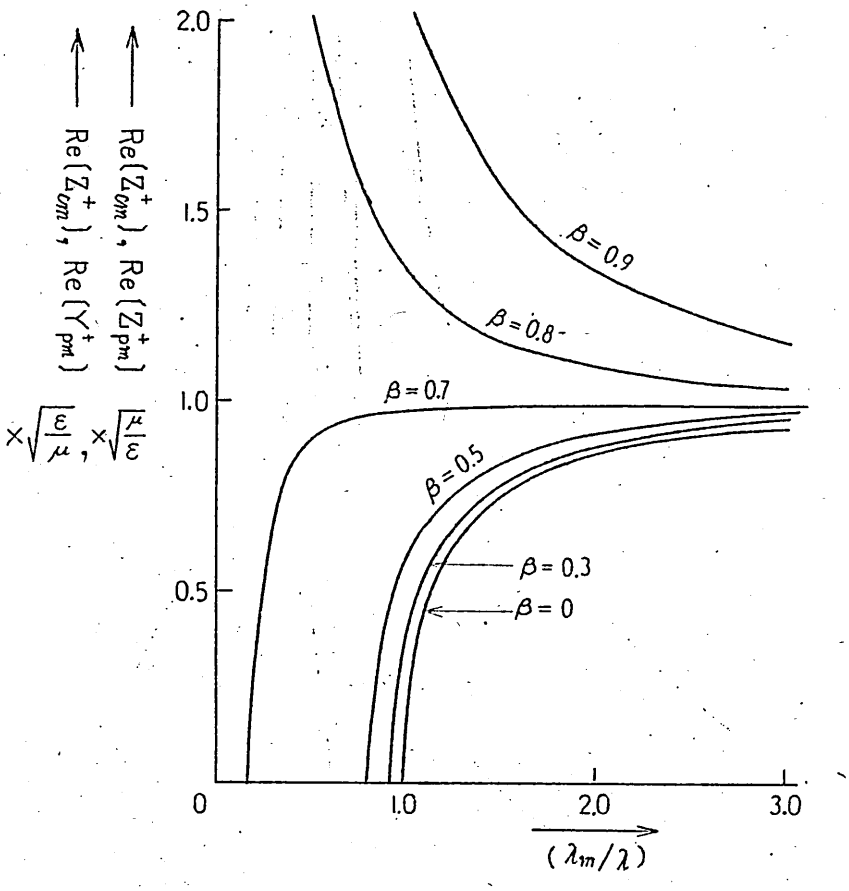



図9　$\text{Re}[Z_{cm}^+]=\text{Re}[Z_{pm}^+]$，$\text{Re}[Y_{cm}^+]=\text{Re}[Y_{pm}^+]$

$(\tan\delta_0 = 0,\ n = \sqrt{2})$

となり，伝導電流モデルの場合と同様に電磁エネルギーの流れの方向は常にzの正の方向であることがわかる．

さて，文献(8)に述べたように伝搬定数はモデルによって変らずどのモデルを用いても等しくなり，したがって式(16)，(17)および式(23)，(24)の結果はそのまま分極電流モデルの場合の伝搬定数として用いることができる．したがって，分極電流モデルを用いた場合でも$n\beta > 1$の場合には，電磁エネルギーの流れの方向がzの負の方向であるにもかかわらず，減衰定数が正となる領域が存在し，"波動増幅"の現象が起ることがわかる．図8は$\mathrm{Re}[Z_{pm}^{\pm}]$の数値計算例である．なお，$\tan\delta_0 = 0$の場合の$\mathrm{Re}[Z_{cm}^{+}] = \mathrm{Re}[Z_{pm}^{+}]$，および$\mathrm{Re}[Y_{cm}^{+}] = \mathrm{Re}[Y_{pm}^{+}]$の数値計算例を図9に示した．ただし，$\mathrm{Re}[Z_{cm}^{-}] = \mathrm{Re}[Z_{pm}^{-}]$，および$\mathrm{Re}[Y_{cm}^{-}] = \mathrm{Re}[Y_{pm}^{-}]$のグラフは図9のグラフを横軸に対して対称に折り曲げることによって得られる．

## 6. 検　　討

式(34)，(50)および式(9)，(44)から明らかなように，TEモードについては電磁エネルギーの流れの式は両モデルにおいて一致する．すなわち，

$$W_{cz}^{TE} = W_{pz}^{TE} \tag{61}$$

このことから，導電性運動媒質の境界面に平面電磁波が入射する場合のエネルギー関係式[7]，[8]の場合と同様に，媒質の運動速度に平行な電界成分がない場合には電磁エネルギーに関するモデルによる差はないことがわかる．しかし，媒質の運動速度に平行な電界成分の存在するTMモードの場合にはすでにみたように電磁エネルギーの流れの式は両モデルにおいて一般に異ったものになる．特に，図6，および図8からわかるように，$\mathrm{Re}[Z_{cm}^{-}]$は$\lambda_m/\lambda$の小さい部分で正となる領域が存在するのに対して，$\mathrm{Re}[Z_{pm}^{-}]$は常に負と

なることが両モデルにおける大きな相違である.

しかし，以上本資料において述べた事柄だけから，伝導電流モデルと分極電流モデルのどちらのモデルを用いるのがより適当であるかを直ちに決論することは困難であり，更に種々の検討が必要であるように思われる．また，いずれのモデルを用いても"波動増幅"を示す領域が存在することは非常に興味深い結果であるが，これについても更に種々の検討が必要であるように思われ現在検討を続けている．

## 謝　　辞

日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに常々ご討論いただく板倉研究室の方々に深謝する．

# 文　　献


(1) J.R. Collier and C.T. Tai, IEEE Trans. MTT-13, 441 (1965).

(2) H. Fujioka, K. Yoshida, and N. Kumagai, IEEE Trans. (Communications), MTT-15, 265 (1967).

(3) 藤岡　弘, 吉田健一, 熊谷信昭, 信学誌, 50, 1227 (1967).

(4) 藤岡　弘, 二瓶文博, 熊谷信昭, 信学誌(投書), 50, 920(1967).

(5) 藤岡　弘, 二瓶文博, 熊谷信昭, 幅射科学研究会資料 (1966-12).

(6) A. Sommerfeld, Electrodynamics (Academic Press Inc., New York, 1964), p. 281.

(7) 藤岡　弘, 二瓶文博, 熊谷信昭, 幅射科学研究会資料 (1968-02).

(8) 藤岡　弘, 二瓶文博, 熊谷信昭, 信学会アンテナ・伝播研資, A.P 67-59 (1968-03).

輻射科学研究会資料

# 不均一誘電体薄膜表面波線路の円形曲りについて

沢 新之輔　　熊谷信昭
(大阪大学・工学部)

1968年4月26日

# 1. まえがき

短ミリ波以下の波長領域における低損失線路の1つとして，誘電体薄膜を用いた表面波線路が，Karbowiak[1]およびLarsen[2]によって提案されている．しかし，彼等の考察した誘電率の一様な誘電体薄膜からなる表面波線路では，膜面と平行な方向に表面波電磁界の分布を集束する効果がなく，そのため，伝送電磁界に影響を与えることなく誘電体薄膜を支持すること，あるいは，外界からの遮へいを行なうことができない．また，別個に特別の工夫を加えないかぎり，膜面と平行な面内での曲りによって生じる伝送損失の増加を避けることができない．

これらの点を改良するため，最近，誘電率が膜面と平行な方向に，中心軸からの距離の関数として減少するような誘電率分布を持つ不均一誘電体薄膜表面波線路が，熊谷等によって提案された[3],[4],[5],[6]．そして，この種の線路では，わずかな誘電率分布の変化によって，膜面と平行な方向にも顕著な収束効果が得られるので，誘電体の支持および外界からの遮へいの問題を，有効に解決できることが示された．しかし，このような線路の曲り部分における伝送特性については，Larsen氏[2]あるいは，倉内，吉田両氏[7]等の簡単な考察があるだけで，まだ詳しく検討された報告は見あたらない．

そこで，本論文では，膜面と平行な面内における円形曲り（H面ベンド）部分の不均一誘電体薄膜表面波線路の伝送特性を，理論的，数値的に検討した．その結果，本線路では，曲りによる伝送損失が本質的に非常に少く，そのうえ，曲り部に対し適当な設計を行なうことによって，曲りの曲率半径がかなり小さくても，表面波ビームを低損失に伝送できることが，少くとも理論的には可能であることが明らかとなった．

誘電体薄膜に与える誘電率分布としては，誘電率が膜面と平行な方向に，中心軸からの距離の二乗で減少するような分布を仮定した[3],[4],[5],[6]．解析の

結果，従来から検討されているガスレンズあるいはレンズガイド等[8),9),10)]の場合と同様に，曲り部分では，直線部と同様に，Gauss-Hermite 関数で表わされる固有姿態があること，曲率の増大にともなって，ビームの中心軸が，あたかも遠心力を受けたかのように，曲率中心の反対側に偏位し，同時に，膜面と平行な方向のスポットサイズが増加すること等が明らかとなった．

直線部から曲り部に入射した基本姿態ビームの姿態変換損失，および基本姿態に対する不要姿態（高次姿態）発生量を，１次近似の範囲で計算した．[11)] その結果，曲りによる不要姿態の発生量を－３０dB 程度以下におさえるための最小許容曲率半径は，波長１(μ)程度の光波領域では，５０～１００cm 程度となり，また，波長１(mm) 程度の短ミリ波領域では，５００～１０００m 程度になることがわかった．

さらに，曲りの曲率半径に応じて，適当な設計を行なうことにより，[9),10),12),16)] 上記の最小許容曲率半径をさらに大幅に減少できることを示した．

## 2. 円形曲り部における伝送特性

### 2.1 誘電体薄膜内部の電磁界

図１(A)に示すように，厚さ2d なる誘電体薄膜が，膜面と平行な面内で曲率半径Rなる円形曲りを生じているとする．直交座標系（x, y, z）と円筒座標系（r, θ, ζ）を同図(B)のようにとる．

誘電体薄膜の誘電率は，ζ 方向および θ 方向には一様で，r 方向には

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(R)\left[1 - \left\{\frac{\pi(r-R)}{L_c}\right\}^2\right] \qquad (1)$$

なる変化をするものとする．

ただし，誘電率の変化率をきめる定数$L_c$，曲率半径R，膜厚2d，および

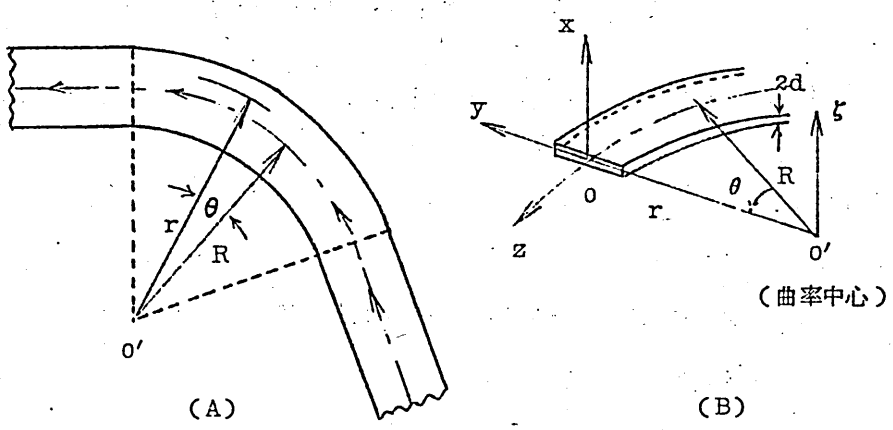



図1　不均一誘電体薄膜表面波線路の円形曲がり部

自由空間波長$\lambda_0$の間に，それぞれ，つぎの関係が成立すると仮定する．

$$\begin{cases} \lambda_0/L_c \ll 1 & (2a) \\ d/\lambda_0 \ll 1 & (2b) \\ L_c/R \ll 1 & (2c) \end{cases}$$

円筒座標系$(r, \theta, \zeta)$によると，電界成分$E_z$ $(=E_x)$に対して，つぎの波動方程式が成立する[8]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_\zeta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_\zeta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 E_\zeta}{\partial \zeta^2}+\omega^2\mu_0\varepsilon(r)E_\zeta=0 \qquad (3)$$

さて，$r-R \ll R$と仮定して，変数変換

$$\left.\begin{aligned} \zeta = x, \quad R\theta = z \\ R\ln(r/R) \fallingdotseq y \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

を行い[8]，さらに，

$$E_x = A\cdot\begin{pmatrix}\cos \\ \sin\end{pmatrix} k_x x)\cdot V(y)\cdot e^{-j\beta_c z} \qquad (5)$$

（ただし，Aは任意定数とする）とおくと，近似的に

$$\frac{d^2V}{dy^2}+\{M_3-M_1(y-M_2/M_1)^2\}V=0 \tag{6}$$

が得られる．

ただし，

$$M_1=k_c^2(0)\pi^2/L_c^2-2\{k_c^2(0)-k_x^2\}/R^2 \tag{7}$$

$$M_2=\{k_c^2(0)-k_x^2\}/R \tag{8}$$

$$M_3=k_c^2(0)-k_x^2-\beta_c^2+M_2^2/M_1 \tag{9}$$

である．また，$k_c^2(0)=\omega^2\mu_0\varepsilon(R)$ であり，$k_x$ はx方向の波数を表わす．

式(6)を解くと，

$$V(y)=e^{-\left(\frac{y-\delta_c}{w_c}\right)^2}H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}(y-\delta_c)}{w_c}\right] \tag{10}$$

となる．ただし，$p=0,\ 1,\ 2,\cdots$ であり，$H_{ep}(x)$ は，p次のHermite多項式を表わす．また，$\delta_c$，$w_c$ および $\beta_c$ は，それぞれ

$$\delta_c=\frac{M_2}{M_1}=\frac{\{k_c^2(0)-k_c^2\}/R}{\frac{k_c^2(0)\pi^2}{L_c^2}-2\{k_c^2(0)-k_x^2\}/R^2} \tag{11}$$

$$w_c=\left[\frac{k_c(0)\pi}{2L_c}\sqrt{1-\frac{2L_c^2}{\pi^2R^2}\left\{\frac{k_c^2(0)-k_x^2}{k_c^2(0)}\right\}}\right]^{-1/2} \tag{12}$$

$$\beta_c=\left[k_c^2(0)-k_x^2+\frac{\{k_c^2(0)-k_x^2\}^2/R^2}{\frac{k_c^2(0)\pi^2}{L_c^2}-2\{k_c^2(0)-k_x^2\}/R^2}-(2p+1)\sqrt{\frac{k_c^2(0)\pi^2}{L_c^2}-2\{k_c^2(0)-k_x^2\}/R^2}\right]^{1/2} \tag{13}$$

で与えられる.

式(5)に(10)を代入して, $E_x$ を求めると

$$E_x = A \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} k_x x \cdot e^{-\left(\frac{y-\delta_c}{w_c}\right)^2} \cdot H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}(y-\delta_c)}{w_c}\right] \cdot e^{-j\beta_c z} \quad (14)$$

となる.

式(14)は, また, つぎのスカラ波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_c(\delta_c)\left\{1-\frac{\pi^2(y-\delta_c)^2}{L_c^2}\right\}\phi = 0 \quad (15)$$

を満足する. ただし, $\varepsilon_c(\delta_c)=\varepsilon(R)$ を表わす.

式(15)は, 直角座標(x, y, z)において, 誘電率分布が,

$$\varepsilon_c(y)=\varepsilon_c(\delta_c)\left\{1-\frac{\pi^2(y-\delta_c)^2}{L_c^2}\right\} \quad (16)$$

で表わされるまっすぐな誘電体薄膜の内部で成立するMaxwellの方程式において, 電磁界分布を $E_x$, $E_z$, $H_y$ および $H_z$ とし, $E_y=H_x=0$ とした場合に, 式(2a)の仮定のもとに, $H_y$ または $E_x$ に対して導かれるスカラ波動方程式[13]を表わす.

そこで, $E_y=H_x=0$ ($E_r=H_\zeta=0$) および,

$$A=\frac{1}{\beta_c}\left(\omega\mu_0-\frac{k_x^2}{\omega\varepsilon_c(y)}\right) \quad (17)$$

とえらぶと磁界成分 $H_y$ は,

$$H_y=\begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} k_x x\, e^{-\left(\frac{y-\delta_c}{w_c}\right)^2} H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}(y-\delta_c)}{w_c}\right] e^{-j\beta_c z} \quad (18)$$

となる．さらに，$E_z(=E_\theta)$ および $H_z(=H_\theta)$ はそれぞれ，

$$E_z=\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_x x\left\{\frac{k_x}{-j\omega\varepsilon_c(y)}\right\}e^{-j\beta_c z}e^{-\left(\frac{y-\delta_c}{w_c}\right)^2}H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}(y-\delta_c)}{w_c}\right] \quad (19)$$

$$H_z=-\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}k_x x\left\{\frac{k_x^2}{j\omega\varepsilon_c(y)}+j\omega\varepsilon_c(y)\right\}\frac{\sqrt{2}e^{-j\beta_c z}}{\omega\mu_0\beta_c w_c}e^{-\left(\frac{y-\delta_c}{w_c}\right)^2}$$

$$\cdot\left\{\frac{\sqrt{2}(y-\delta_c)}{w_c}H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}(y-\delta_c)}{w_c}\right]-2pH_{ep-1}\left[\frac{\sqrt{2}(y-\delta_c)}{w_c}\right]\right\} \quad (20)$$

となる．

## 2．2　誘電体薄膜外部の電磁界

自由空間における電磁界の座標成分を $\phi_0$ とすると，$\phi_0$ は，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_0+k_0^2\phi_0=0 \quad (21)$$

を満足する．ただし，　$k_0^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0=(2\pi/\lambda_0)^2$ (22)

である．

式(21)の解として，平面波

$$e^{-j\beta_c z}e^{jk_{xo}(|x|-d)}e^{jk_{yo}(y-\delta_c)}$$

を重ね合わせて構成される

$$\phi_0=\int_{-\infty}^{\infty}g(k_{yo})e^{-j\beta_c z}e^{jk_{xo}(|x|-d)}e^{jk_{yo}(y-\delta_c)}dk_{yo} \quad (23)$$

なる解を考える．ただし，

$$k_{xo}^2 + k_{yo}^2 + \beta_c^2 = k_o^2 \tag{24}$$

であり，$g(k_{yo})$は，任意関数を表わす．

さて，式(23)において，$g(k_{yo})$を，

$$g(k_{yo}) = B \cdot \frac{(-1)^p}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_{co}^2}{4} k_{yo}^2} H_{ep}\left(\frac{w_{co}}{\sqrt{2}} k_{yo}\right) \tag{25}$$

に等しくえらぶ．[6]ここで，Bおよび$w_{co}$は任意定数とする．

そして，式(24)によって，$k_{xo}$を消去し，さらに

$$k_{yo}^2 \ll \beta_c^2 - k_o^2 \tag{26}$$

と仮定して，$k_{yo}$に関する積分を実行すると，

$$\phi_o = B\, e^{-j\beta_c z}\, e^{-k_{ct}(|x|-d)} \cdot \frac{e^{-\eta^2/w_{co}^{+2}}}{w_{co}^{+}} \cdot \left[\frac{w_{co}^{-}}{w_{co}^{+}}\right]^p \cdot H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}\, w_{co}}{w_{co}^{+} w_{co}^{-}} \eta\right] \tag{27}$$

となる．[3],[4],[6]ただし，

$$\begin{cases} \eta = y - \delta_c & (28) \\ w_{co}^{\pm} = \sqrt{w_{co}^2 \pm 2(|x|-d)/k_{ct}} & (29) \\ k_{ct} = \sqrt{\beta_c^2 - k_o^2} & (30) \end{cases}$$

である．

自由空間における電磁界成分を，$E_{xo}$, $E_{yo}$, $E_{zo}$, $H_{xo}$, $H_{yo}$, および$H_{zo}$と表わす．

まず，境界条件 $H_y|_{|x|=d} = H_{yo}|_{|x|=d}$ を満足しなければならないから式(18)と(27)より

$$w_{co} = w_c, \quad B = w_c \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} k_x d \tag{31}$$

となる．したがって，$H_{yo}$ は，

$$H_{yo}=\frac{W_c}{W_{co}^{+}}\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}k_x d\,e^{-j\beta_{cz}z}\,e^{-k_{ct}(|x|-d)}\,e^{-\left(\frac{y-\delta_c}{W_{co}^{+}}\right)^2}\cdot H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}\,W_c(y-\delta_c)}{W_{co}^{+}W_{co}^{-}}\right] \tag{32}$$

と求められる．

同様にして，境界条件 $E_z|_{|x|=d}=E_{zo}|_{|x|=d}$ より，$E_{zo}$ を求めると，

$$E_{zo}=\frac{W_c}{W_{co}^{+}}\begin{pmatrix}\sin\\ -\cos\end{pmatrix}k_x d\left(\frac{k_x}{j\omega\varepsilon_c(y)}\right)e^{-j\beta_{cz}z}\,e^{-k_{ct}(|x|-d)}\cdot e^{-\left(\frac{y-\delta_c}{W_{co}^{+}}\right)^2}\cdot H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}\,W_c(y-\delta_c)}{W_{co}^{+}W_{co}^{-}}\right] \tag{33}$$

となる．

他の電磁界成分は，式(32)あるいは，式(33)を用いてMaxwellの方程式から求めることができる．

## 2．3　未知量の決定

膜面 $|x|=d$ において，電磁界は，

$$\left.\begin{aligned}H_y&=H_{yo}\ ,\quad H_z=H_{zo}\\ E_y&=E_{yo}=0\ ,\quad E_z=E_{zo}\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

なる境界条件を満足しなければならないことから，

$$k_{ct}\fallingdotseq\frac{k_x}{\varepsilon_c^{*}(0)}\begin{pmatrix}\tan\\ -\cot\end{pmatrix}k_x d \tag{35}$$

$$\varepsilon_c^{*}(0)=\varepsilon_c(0)/\varepsilon_o$$

なる特性方程式が導かれる．

ただし，式(35)は，電磁界の集中範囲を

$$|\pi(y-\delta_c)/L_c|^2 \ll 1 \tag{36}$$

と仮定して導かれた近似式である．

式(13)，(30)，および(35)を用いて，x方向に関して最低次の表面波姿態について，$k_x$，$\beta_c$および$k_{ct}$等の未知量を決定すると，それぞれ，つぎのようになる．

$$\begin{cases} k_x \fallingdotseq k_o \sqrt{\varepsilon_c^*(0) - 1 - \dfrac{\pi(2p+1)\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}}{k_o L_c}\left(1-\dfrac{L_c^2}{R^2\pi^2}\right)} \Big/ \sqrt{1+\dfrac{L_c(2p+1)}{\pi R^2 k_o \sqrt{\varepsilon_c^*(0)}}} & (37) \\ \beta_c \fallingdotseq k_o + \dfrac{k_o^3 d^2 \left\{1-\dfrac{1}{\varepsilon_c^*(0)}-\dfrac{\pi(2p+1)}{k_o L_c\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}}\left(1-\dfrac{L_c^2}{\pi^2R^2}\right)\right\}^2}{2\left\{1+\dfrac{L_c(2p+1)}{\pi R^2 k_o\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}}\right\}^2} & (38) \\ k_{ct} \fallingdotseq k_o^2 d \left\{1-\dfrac{1}{\varepsilon_c^*(0)}-\dfrac{\lambda_o(2p+1)}{2L_c\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}}\left(1-\dfrac{L_c^2}{\pi^2R^2\varepsilon_c^*(0)}\right)\right\} & (39) \end{cases}$$

したがって，

$$\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\lambda_o}{L_c}\right)\left(\frac{L_c}{R}\right)^2\frac{(2p+1)}{\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}} \ll 1 \tag{40}$$

と仮定して，式(11)および(12)に，式(37)を代入すると，$\delta_c$および$w_c$は，それぞれ，

$$\delta_c \fallingdotseq \frac{L_c^2}{R\pi^2\varepsilon_c^*(0)}\left(1+\frac{\lambda_o}{2L_c}\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}\right) \tag{41}$$

および，

$$W_c \fallingdotseq \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda_0 L_c}{\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}}}\left(1+\frac{L_c^2}{2\pi R^2 \varepsilon_c^*(0)}\right) \tag{42}$$

となる．

さらに，ビームの中心 $y=\delta_c$ における界分布が，膜面 $|x|=d$ における値の $1/e$ となるx方向の距離 $\sigma_x^{(c)}$（x方向スポットサイズ）を求めると式(40)の仮定のもとに，

$$\sigma_x^{(c)} = \frac{1}{k_{ct}} \fallingdotseq \frac{\varepsilon_c^*(0)}{k_0^2 d(\varepsilon_c^*(0)-1)}\left\{1+\frac{\lambda_0(2p+1)\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}}{2L_c(\varepsilon_c^*(0)-1)}\right\} \tag{43}$$

となり，曲率半径Rには無関係となる．

## 2．4　円形曲り部と直線部における伝送姿態の比較

式(18)および(32)において，曲率半径Rを，$R\to\infty$とすると，直線部分におけるy方向の磁界成分を表わす式になる．[3],[4],[5],[6]

直線部における値に，添字Sをつけることにすると，薄膜内部におけるy方向の磁界成分 $H_y^{(s)}$ は，

$$H_y^{(s)} = \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} k_x^{(s)} x \; e^{-(y/W_s)^2} \cdot H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}\,y}{W_s}\right] \cdot e^{-j\beta_s z} \tag{44}$$

となる．また，薄膜外部では，

$$H_{yo}^{(s)} = \frac{W_s}{W_{so}^+}\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} k_x^{(s)} d \; e^{-k_{st}(|x|-d)} \cdot e^{-\left(\frac{y}{W_{so}^+}\right)^2} \cdot e^{-j\beta_s z} \cdot H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}\,W_s}{W_{so}^+ W_{so}^-}\right] \tag{45}$$

となる．ただし，

$$
\begin{cases}
w_s = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\lambda_0 L_s}{\sqrt{\varepsilon_s^*(0)}}} & (46)\\[2ex]
k_{st} \fallingdotseq k_0^2 d\left\{1 - \dfrac{1}{\varepsilon_s^*(0)} - \dfrac{\lambda_0(2p+1)}{2L_s\sqrt{\varepsilon_s^*(0)}}\right\} & (47)\\[2ex]
k_x^{(s)} \fallingdotseq k_0\sqrt{\varepsilon_s^*(0) - 1 - \dfrac{\pi(2p+1)\sqrt{\varepsilon_s^*(0)}}{k_0 L_s}} & (48)\\[2ex]
\beta_s \fallingdotseq k_0 + \dfrac{k_0^3 d^2}{2}\left\{1 - \dfrac{1}{\varepsilon_s^*(0)} - \dfrac{\pi(2p+1)}{k_0 L_s\sqrt{\varepsilon_s^*(0)}}\right\}^2 & (49)\\[2ex]
w_{so}^{\pm} = \sqrt{w_s^2 \pm 2(|x|-d)/k_{st}} & (50)
\end{cases}
$$

である．

さらに，直線部における誘電率分布 $\varepsilon_s(y)$ は，式(41)から明らかなように，$\delta_c \to 0$ ($R \to \infty$) であるから，式(16)より，

$$\varepsilon_s(y) = \varepsilon_s(o)\left\{1 - \left(\frac{\pi y}{L_s}\right)^2\right\} \qquad (51)$$

と表わされる．

以上の結果から，$\varepsilon_c^*(0) = \varepsilon_s^*(0)$ および $L_s = L_c$ なる場合について，円形曲り部と直線部との伝送姿態を比較すると，つぎのようになる．

(i) 円形曲り部の伝送姿態は，直線部と同様に，Gauss-Hermite 関数で表わされる．

(ii) ビームの中心軸が，あたかも遠心力を受けたかのように線路の中心軸から曲率中心の反対側に

$$\delta_c = \frac{L_c^2}{R\pi^2\varepsilon_c^*(0)}\left(1 + \frac{\lambda_0}{2L_c}\sqrt{\varepsilon_c^*(0)}\right)$$

だけづれる．

(iii) y方向のスポットサイズ $W_c$ が増大し，直線部のスポットサイズ $W_s$ の

$$1+\frac{(L_s/R)^2}{2\pi\varepsilon_s^*(0)}\left(1+\frac{\lambda_0}{2L_s}\sqrt{\varepsilon_s^*(0)}\right)$$ 倍になる．

(iv) ビームの中心，$y=\delta_c$ における x方向のスポットサイズ $\sigma_x^{(c)}$ は，式(40)の仮定のもとでは，曲率半径Rに無関係である．したがって，ビーム断面のx方向の変形は無視することができる．

## 3. 直線部から円形曲り部に入射した基本姿態ビームに対する不要姿態（高次姿態）の発生量および姿態変換損失

円形曲り部における固有関数は，式(18)または(32)から明らかなように

$$W_c^2 \gg 2(|x|-d)/k_{ct} \tag{52}$$

が成立する範囲では

$$\phi_p^{(c)}=C_p\, e^{-(y-\delta_b)^2/W_c^2}\cdot H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}(y-\delta_b)}{W_c}\right] \tag{53}$$

で表わされる．

ただし，$p=0, 1, 2, \cdots$ であり，また，$\delta_b$ は，

$$\delta_b=\delta_c+\delta_\varepsilon \tag{54}$$

を表わす．ここで，$\delta_\varepsilon$ は，曲り部の誘電率分布の中心軸と，直線部の中心軸との距離を示す．

多項式，$\sum_{p=0}^{\infty}\phi_p^{(c)}$ は，$|y-\delta_b|\leqq\infty$ なる領域で，完備性，ならびに，直交性を満足する．したがって，直線部における基本姿態の固有関数，$e^{-y^2/W_s^2}$ を，曲り部における固有関数を用いて，つぎのように展開することができる．

$$e^{-y^2/W_s^2}=\sum_{p=0}^{\infty}C_p\, e^{-\left(\frac{y-\delta_b}{W_c}\right)^2}H_{ep}\left[\frac{\sqrt{2}(y-\delta_b)}{W_c}\right] \tag{55}$$

ただし，展開係数 $C_p$ は，

$$C_p/C_o = \begin{cases} \dfrac{(-1)^p}{2^p p!}\left(\dfrac{w_c^2-w_s^2}{w_c^2+w_s^2}\right)^{\frac{p}{2}} H_{ep}\left[\dfrac{w_c\delta_b}{\sqrt{2}(w_c^4-w_s^4)}\right], & (w_c \neq w_s) \quad (56) \\ \dfrac{(-1)^p}{2^p p!}\left(\dfrac{\delta_b}{\sqrt{2}\,w}\right)^p, & (w_c = w_s = w) \quad (57) \end{cases}$$

ここで，

$$C_o = \sqrt{\frac{2w_s^2}{w_s^2+w_c^2}}\ e^{-\frac{\delta_b^2}{w_s^2+w_c^2}} \qquad (58)$$

で与えられる．[15]

基本姿態に対する不要姿態発生量，$\gamma_{po}$，および基本姿態に対する姿態変換損失，$\alpha_{co}$，は，1次近似の範囲では，式(56)，(57)および(58)で与えられる $C_p$ および $C_o$ を用いて，それぞれ，$\gamma_{po}=10\log_{10}|C_p/C_o|^2$，(dB)および $\alpha_{co}=10\log_{10}|1/C_o|^2$，(dB)によって計算することができる．[11]式(40)の仮定を考慮して，$\gamma_{po}$ および $\alpha_{co}$ を計算した結果は，それぞれ，付録の式(A・1)および(A・2)に示してある．

円形曲り部に対し，直線部と全く同じ誘電体薄膜を用いる場合，すなわち $\varepsilon_c^*(0)=\varepsilon_s^*(0)$ かつ，$L_c=L_s$ なる場合には，$\gamma_{po}$ および $\alpha_{co}$ は，それぞれ，

$$\gamma_{po} = 10\log_{10}\left\{\frac{(\rho g)^{2p}}{8^p(p!)^2}\cdot H_{ep}^2\left[\frac{\sqrt{\pi g}}{2}\beta\left(\frac{\delta_b}{\delta_c}\right)\right]\right\}_{(dB)} \qquad (59)$$

および

$$\alpha_{co} = -10\log_{10}\left\{1-\frac{(\rho g)^2}{2}-\pi\rho^2 g^3\beta(1-\rho^2 g^2)\left(\frac{\delta_b}{\delta_c}\right)^2\right\}_{(dB)} \qquad (60)$$

となる．

ただし，$\rho$，g，および$\beta$は，それぞれ，式（A・4），（A・5），および（A・6）で与えられる．

式(59)によって，最も問題となるp＝1，およびp＝2 なる高次姿態の発生量を数値計算した例を，図2に，それぞれ実線および点線で示す．また式(60)の計算例を，図3に示してある．

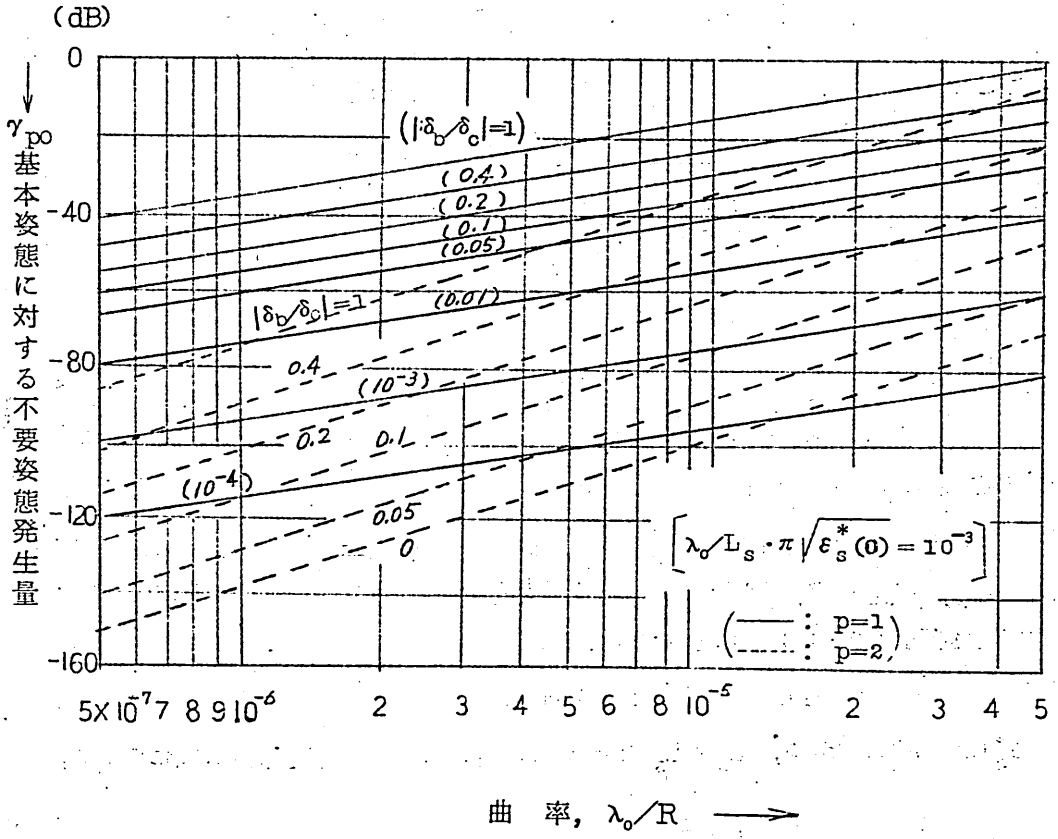



図2　円形曲り部に対し，直線部と同じ不均一誘電体薄膜（表1参照）を用いる場合の基本姿態に対する不要姿態発生量$\gamma_{po}$の数値計算例　($\varepsilon_c^*(0)=\varepsilon_s^*(0)$，$L_c=L_s$)

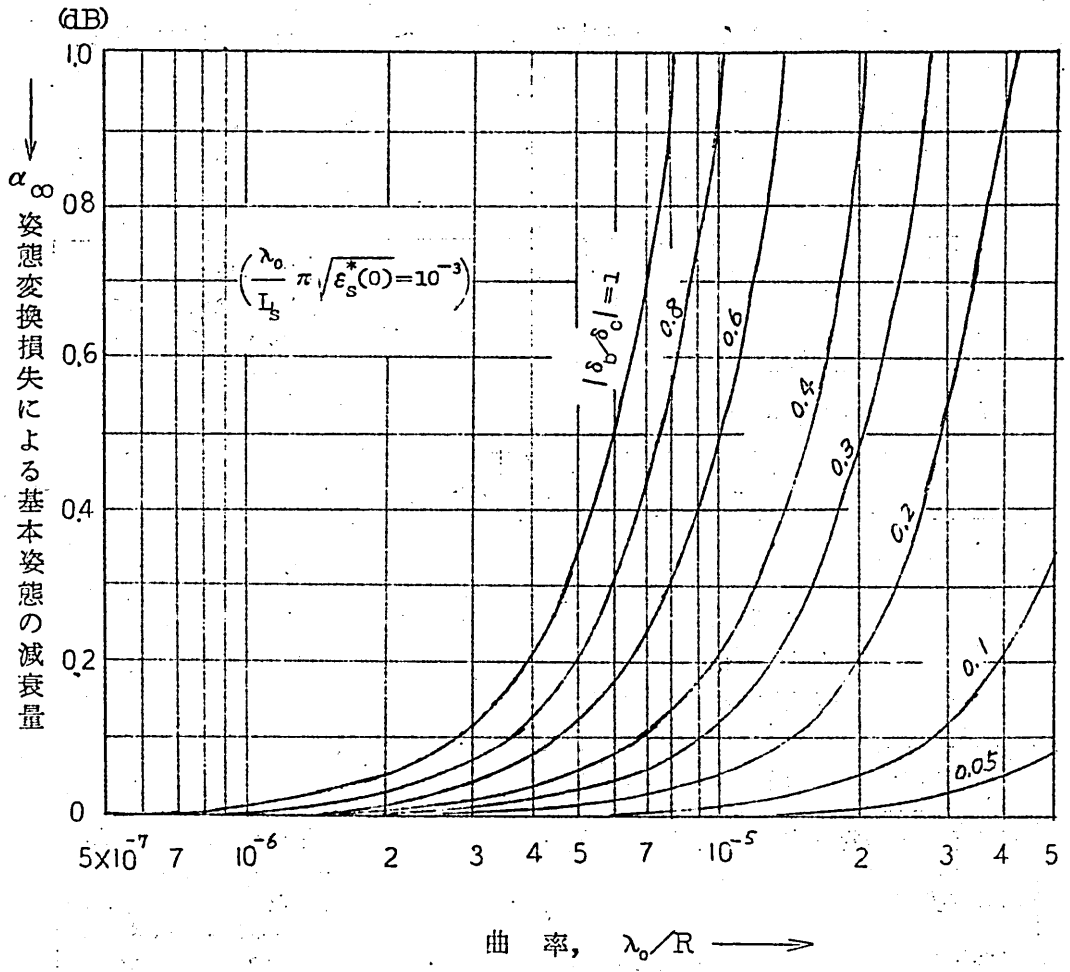



図3　円形曲り部に対し，直線部と同じ不均一誘電体薄膜（表1参照）を用いる場合の姿態変換損失による基本姿態の減衰量
（$\delta_\varepsilon=-\delta_c$, $\varepsilon_c^*(0)=\varepsilon_s^*(0)$, $L_c=L_s$）

直線部分の基礎的伝送特性が表1で与えられるような不均一誘電体薄膜表面波線路において，$|\delta_b/\delta_c|=1$（$\delta_\varepsilon=0$）としたときの$\gamma_{po}$および$\alpha_{co}$の数値例を示すと，表2のようになる．この表からわかるように，不要姿態発生量を−30(dB)以下程度におさえるための最小許容曲率半径$R_{min}$は，波

長$\lambda_0$＝１($\mu$)程度の光波領域では，５０～１００(cm)程度であり，また，波長$\lambda_0$＝１(mm)程度の短ミリ波領域では，５００～１０００(m)程度である．

表１　不均一誘電体薄膜表面波線路の真線部における数値設計例

| 波長 $\lambda_0$ | $L_s$ | 膜厚 | 中心の比誘電率 $\varepsilon_s^*(0)$ | $\tan\delta$ | 誘電体損失による減衰定数 $\alpha_d$ | 全伝送電力の99.9%を含む範囲 (２x×２y) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1($\mu$) | 3.44(mm) | 01($\mu$) | 1.2 | $10^{-8}$ | 7.4(dB/km) | 21($\mu$)×834($\mu$) |
| 1(mm) | 4.45(m) | 25($\mu$) | 2.0 | $10^{-4}$ | 8.4(dB/km) | 2.8(cm)× 8.34(cm) |

表２　表１で与えられる不均一誘電体薄膜表面波線路の円形曲り部における不要姿態発生量$\gamma_{po}$および姿態変換損失$\alpha_{co}$の数値例($\delta_\varepsilon=0$)

| H面内における曲率半径R | | $10^5\lambda_0$ | $2\times10^5\lambda_0$ | $5\times10^5\lambda_0$ | $10^6\lambda_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 基本姿態の姿態変換損失$\alpha_{co}$ | | 1.64 (dB) | 0.355 (dB) | 0.0552(dB) | 0.0134(dB) |
| 基本姿態に対する | p＝1 | −14.06(dB) | −20.08(dB) | −28.08(dB) | −34.06(dB) |
| 不要姿態発生量$\gamma_{po}$ | p＝2 | −34.14(dB) | −46.20(dB) | −62.10(dB) | −74.14(dB) |

なお，S.E. Miller[14]によると，導波系における円形曲りの最小許容曲率半径$R_{min}$は，aをビーム半径とすると，一般に，$2a^3/\lambda_0^2$のオーダで与えられる．表１の数値設計例では，aの値として，全伝送電力の９９.９％を含むy方向の距離，yを用いると，波長$\lambda_0$＝１($\mu$)および１(mm)の場合，それぞれ，$R_{min}$＝１４.３(cm)および１４３(m)となり，確かに，S.E.Millerの結論と一致している．

# 4. 円形曲り部の損失低減設計法

2.4節で述べたように，円形曲り部では，ビームの中心軸が，線路の中心軸（直線部における誘電率分布の中心軸）より，$\delta_c$ だけ，曲率中心の反対側にづれる．さらに，y方向のスポットサイズ $w_c$ が，直線部における値 $w_s$ よりも増大する．そして，曲率半径Rが小さい程，すなわち，曲りが急げきである程，$\delta_c$ および $w_c$ の値は大きくなる．そのため，曲り部に入射したビームは，姿態変換損失を受ける．

そこで，このような円形曲りによる損失を軽減するために，つぎの3つの方法を検討する．

Ⅰ．曲り部における誘電体薄膜の誘電率分布は，直線部と同一とし，その中心軸の位置を，あらかじめ，$|\delta_\varepsilon|$（ただし，$-2\delta_c < \delta_\varepsilon < 0$）だけ曲率中心の方向にづらせておくことによって，ビームの中心軸のづれを補正する．

Ⅱ．曲り部では，直線部とは異った誘電率分布を与える（誘電率分布の変化率を変える）ことによって，y方向スポットサイズ $w_c$ の増大を補正する．

Ⅲ．方法ⅠとⅡを併用する．すなわち，y方向のスポットサイズの増大，およびビームの中心軸のづれを同時に補正できるように，曲り部における誘電体薄膜の誘電率分布およびその中心軸の位置を設計する．[16]

上記の3つの方法を，直線部の伝送特性が表1で与えられるような線路に適用して，それぞれの効果を数値的に検討する．

方法Ⅰ

$\varepsilon_c^*(0) = \varepsilon_s^*(0)$，および $L_c = L_s$ であるから，基本姿態に対する不要姿態発生量 $\gamma_{po}$ および基本姿態の姿態変換損失 $\alpha_{co}$ は，それぞれ，式(59)および(60)で与えられる．$\delta_\varepsilon$ を，$-2\delta_c < \delta_\varepsilon < 0$，$(0 \leqq |\delta_b/\delta_c| \leqq 1)$の範

囲で変化させると，$\gamma_{1o}$，$\gamma_{2o}$および$\alpha_{co}$は，それぞれ，図2および図3に示すように，$|\delta_b/\delta_c|$の減少と共に減少する．特に，$\delta_\varepsilon=-\delta_c$（$|\delta_b/\delta_c|=0$）のときには，

$$\gamma_{po}=\begin{cases}10\log_{10}\left[\dfrac{|K|^{2q}}{64^q(q!)^2}\right]_{(dB)}, & (p=2q\text{のとき}) \quad (61)\\ 0\ _{(dB)}, & (p=2q+1\text{のとき}) \quad (62)\end{cases}$$

となり，基本姿態から奇数次高次姿態への変換は起らなくなる．ここで，$q=0,\ 1,\ 2,\cdots$であり，Kは付録の式（A・3）で与えられる．

また，このときの$\alpha_{co}$は，

$$\alpha_{co}=-10\log_{10}\left(1-\frac{\rho^2g^2}{2}\right) \quad (63)$$

となり最小となる．式(63)の数値計算例を図4に示す．

$\delta_c$は，式(41)において，$L_c=L_s$とおくと，

$$\delta_c=\frac{L_s^2}{R\pi^2\varepsilon_c^*(0)}\left(1+\frac{\lambda_o}{2L_s}\sqrt{\varepsilon_s^*(0)}\right) \quad (64)$$

となる．式(64)の数値計算例を図5に示す．

表3には，直線部の特性が表1で与えられる線路において，$\delta_\varepsilon=-\delta_c$とした場合の数値例を示してある．

この表からわかるように，波長$\lambda_o=1(\mu)$とすると，$R=10(cm)$のとき，$|\delta_\varepsilon|=10(\mu)$となり，$p=2$なる高次姿態の発生量$\gamma_{2o}$は，$-98.06$(dB)となる．また，基本姿態の姿態変換損失$\alpha_{co}$は，$2.17\times10^{-4}$(dB)となり，前節で述べた表2の数値例とくらべると，曲りによる損失が大巾に軽減されることがわかる．

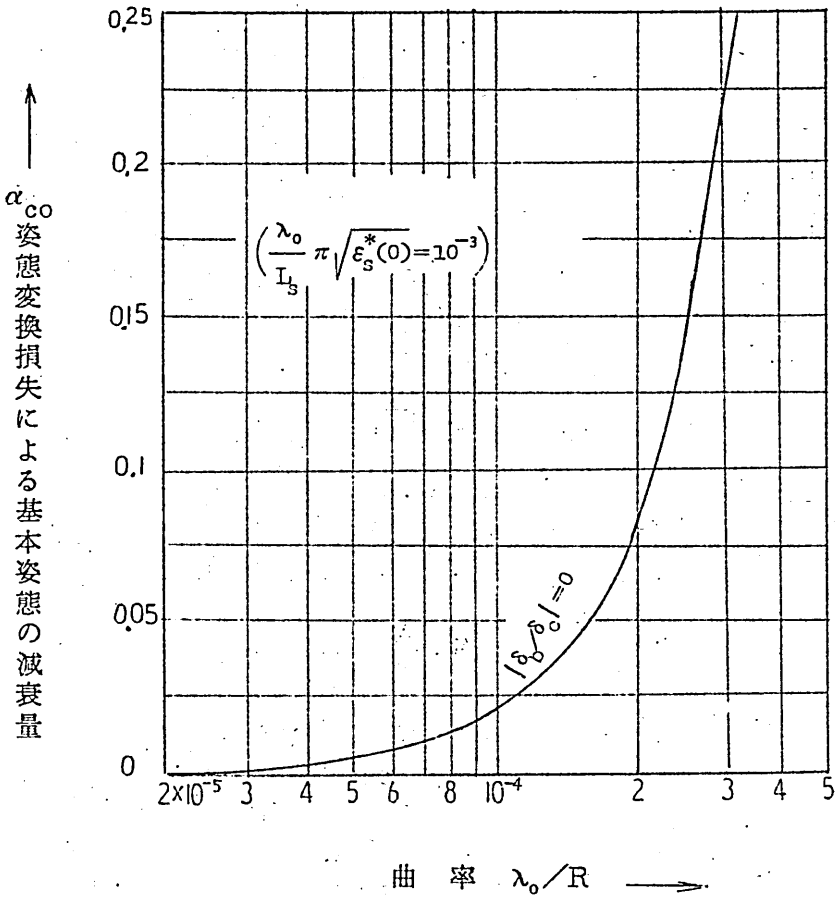



図4　円形曲り部に対し，直線部と同じ不均一誘電体薄膜（表1参照）を用いる場合の姿態変換損失による基本姿態の減衰量
（$\delta_\varepsilon=-\delta_c$, $\varepsilon_c^*(0)=\varepsilon_s^*(0)$, $L_c=L_s$）

方法Ⅱ

式(42)と(46)を等置し，$\varepsilon_c^*(0)=\varepsilon_s^*(0)$とすると，$L_c$と$L_s$との関係は

$$\frac{L_s}{L_c}=1+\left(\frac{\lambda_0}{R}\right)^2\left(\frac{L_s}{\pi\lambda_0\sqrt{\varepsilon_s^*(0)}}\right)^2 \qquad (65)$$

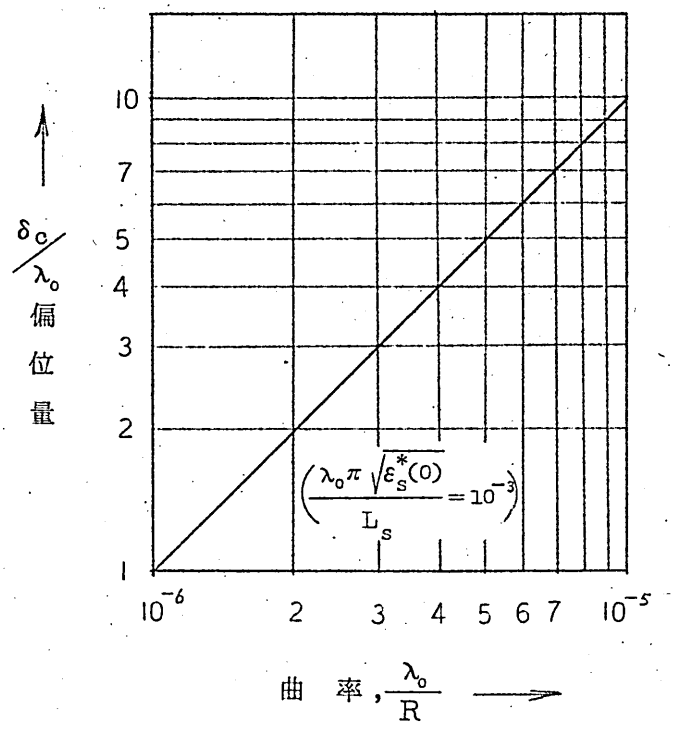



図5　円形曲り部におけるビームの中心軸の偏位量 $\delta_c$ と曲率 $1/R$ との関係

表3　表1で与えられる不均一誘電体薄膜表面波線路の円形曲り部における数値設計例（方法Iによる場合; $\delta_\varepsilon = -\delta_c$, $\varepsilon_c^*(0) = \varepsilon_s^*(0)$, $L_c = L_s$）

| H面内における曲率半径　R | $10^5\lambda_0$ | $2\times10^5\lambda_0$ | $5\times10^5\lambda_0$ | $10^6\lambda_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 基本姿態の姿態変換損失　$\alpha_{co}$ | $2.17\times10^{-4}$ (dB) | $4.34\times10^{-5}$ (dB) | $10^{-5}$ 以下 (dB) | $10^{-5}$ 以下 (dB) |
| 基本姿態に対する p＝2なる高次姿態の発生量 $\gamma_{20}$ | −98.06 (dB) | −110.10 (dB) | −126.02 (dB) | −138.06 (dB) |
| 誘電率分布の中心位置　$\delta_\varepsilon$ | $-10\lambda_0$ | $-5\lambda_0$ | $-2\lambda_0$ | $-\lambda_0$ |

で与えられる．

$\delta_c$ の値は，式 (41) に，式 (65) で定められる $L_c'$ を代入し，式 (2a) および (2c) の仮定を考慮すると，式 (64) と全く同じ式で与えられることがわかる．

式 (65) を，式 (A・3) に代入すると，$K=0$ となる．したがって，$\gamma_{po}$ および $\alpha_{co}$ の値は，式 (A・1) および (A・2) より，それぞれ

$$\gamma_{po} = 10 \log_{10}\left\{ \left(\frac{\pi}{8}\right)^p \cdot \frac{(\rho^2 g^3 \beta^2)^p}{(p!)^2} \cdot \left(\frac{\delta_b}{\delta_c}\right)^{2p} \right\} \tag{66}$$

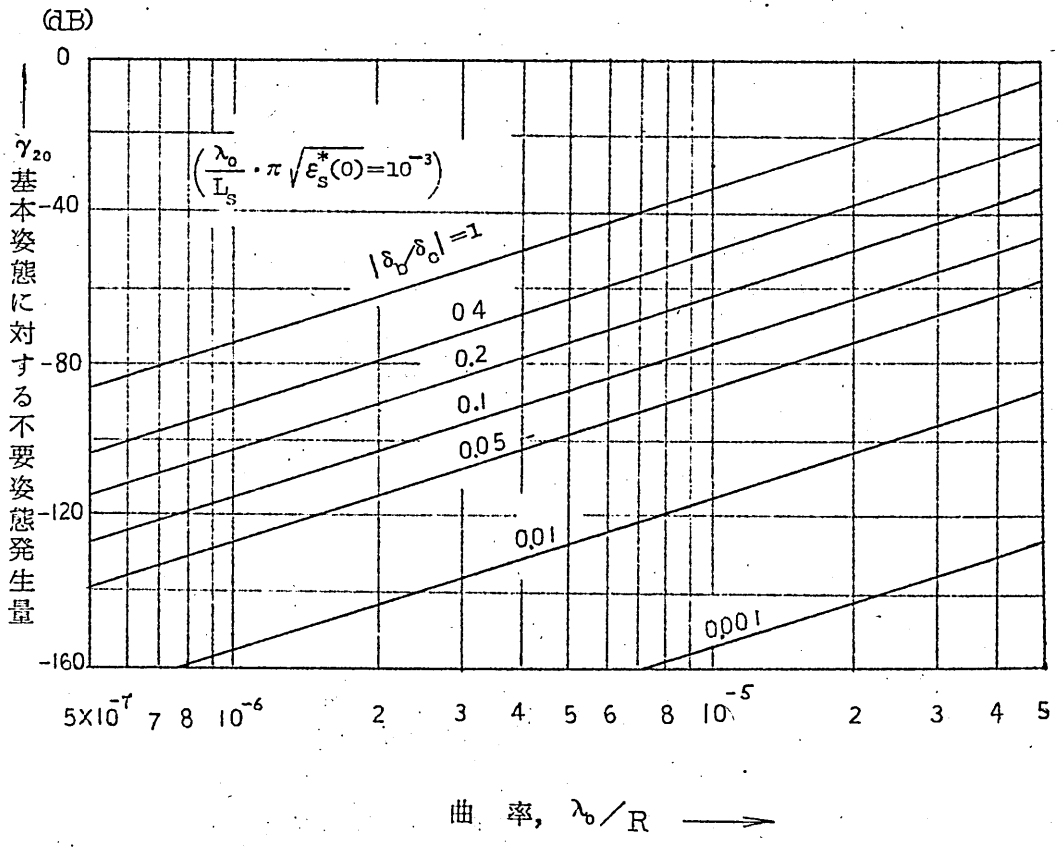



図6　設計方法Ⅱを適用する場合の基本姿態に対する不要姿態発生量 $\gamma_{20}$ の数値計算例
($\delta_\varepsilon = -\delta_c$, $W_c = W_s$, $\varepsilon_c^*(0) = \varepsilon_s^*(0)$)

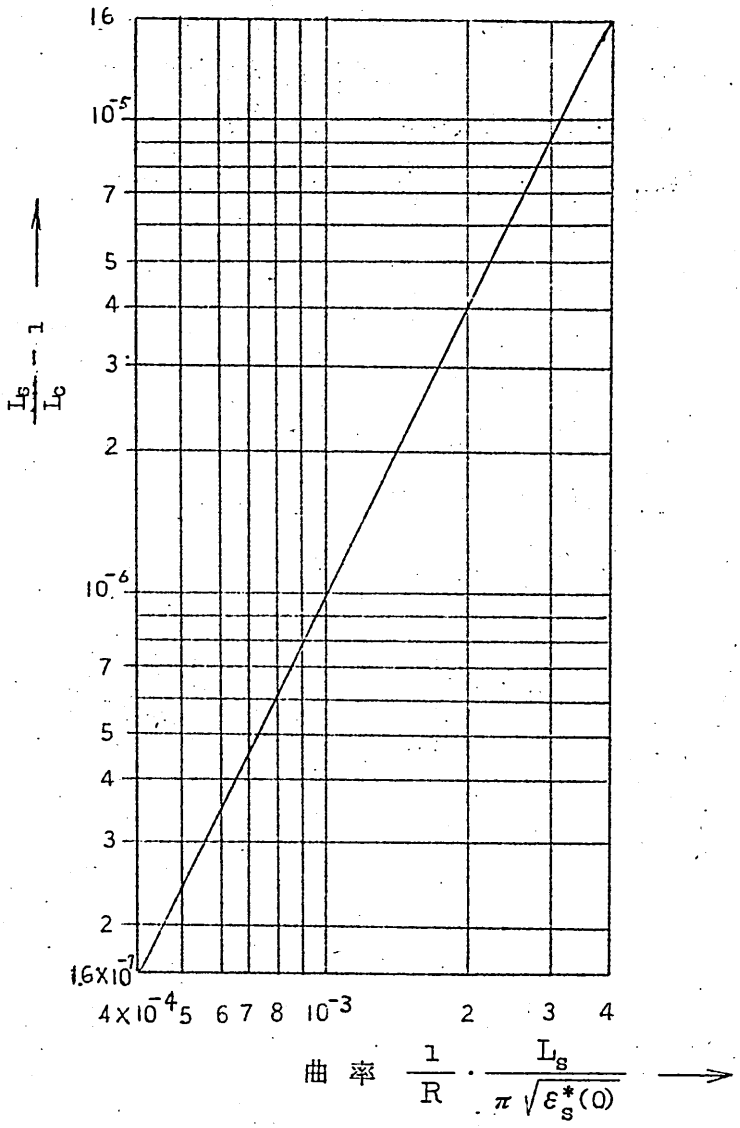



図7　設計方法Ⅱあるいは Ⅲを適用する場合の曲率 $1/R$ と曲り部の誘電率分布の変化率を定める定数 $L_c$ との関係
($w_c = w_s$, $\varepsilon_c^*(0) = \varepsilon_s^*(0)$)

および

$$\alpha_{co} = -10 \log_{10}\left\{1 - \pi\rho^2 g^3 \beta \left(\frac{\delta_b}{\delta_c}\right)^2\right\} \qquad (67)$$

となる．

式(66)で与えられる$\gamma_{10}$の値は，式(59)で与えられる$\gamma_{10}$と同一になる．また，式(67)の$\alpha_{co}$の値は，式(2c)の仮定を考慮すると，$\rho^2 g^2 \ll 1$であるから，式(60)の$\alpha_{co}$とほとんど同じになる．

式(66)で与えられる$\gamma_{20}$の値の計算例を図6に示す．また，式(65)の関係を，図7に示してある．

図2と図6とを比較すればわかるように，この例では，

$$0.05 \lesssim |\delta_b/\delta_c| < 1 \qquad (68)$$

なる範囲では，$\gamma_{20}$の値は，方法Ⅰにおける値とほとんど同じである．しかし$|\delta_b/\delta_c|$の値がさらに零に近づくにつれ，$\gamma_{20}$の値は，方法Ⅰにおける値よりも，さらに小さくなり得ることがわかる．

したがって，方法Ⅱは，$|\delta_b/\delta_c| \simeq 0$なる場合に，方法Ⅰよりもさらに有効となる．

方法Ⅲ

曲り部の誘電率分布を定める定数$L_c$を，式(65)が満されるようにえらびかつ，誘電率分布の中心の位置$\delta_\varepsilon$を，曲率中心側に，$\delta_c$だけ偏位させておく．すると，曲り部におけるy方向スポットサイズおよびビームの中心軸が直線部と完全に一致する．したがって，この方法によれば，本文で考察している不要姿態発生量$\gamma_{po}$および姿態変換損失$\alpha_{co}$は，すべて零となり，曲りによる付加損失はほとんど無くすることができる．

すなわち，この方法が，円形曲り部の最も有効な設計方法であると考えられる．この方法による場合の数値例を表4に示す．この表で，たとえば，波

長$\lambda_0=1(\mu)$の場合，$R=10(cm)$とすると，$|\delta_\varepsilon|=10(\mu)$となり，$L_c=3.4397(mm)$となる．また，波長$\lambda_0=1(mm)$の場合には，$R=100(m)$とすると，$|\delta_\varepsilon|=10(mm)$となり，$L_c=4.4496(m)$となる．

表4　表1で与えられる不均一誘電体薄膜表面波線路の円形曲り部における算適数値設計例　（方法Ⅲによる場合，$\delta_\varepsilon=-\delta_c$，$W_c=W_s$，$\varepsilon_c^*(0)=\varepsilon_s^*(0)$）

| H面内における曲率半径　$R_0$ | $10^5\lambda_0$ | $2\times10^5\lambda_0$ | $5\times10^5\lambda_0$ | $10^6\lambda_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 誘電率分布の中心位置　$\delta_\varepsilon$ | $-10\lambda_0$ | $-5\lambda_0$ | $-2\lambda_0$ | $-\lambda_0$ |
| 誘電率分布の定める定数 $(L_s/L_c)-1$ | $10^{-4}$ | $2.5\times10^{-5}$ | $4\times10^{-6}$ | $10^{-6}$ |

以上に考察したとおり，円形曲りによる損失の低減法としては，方法Ⅲが最も有効である．しかし，実際上，最も簡単なのは，方法Ⅰであって，この方法にしたがって，円形曲り部の設計をしても，前述のとおりかなり急げきな曲りに対して，十分に低損失の伝送を行うことができる．

## 5. あ と が き

本論文では，膜面と平行な面内に円形曲り（H面ベンド）部分を有する不均一誘電体薄膜表面波線路の伝送特性を,理論的，数値的に検討した．

その結果，本線路では，曲りによる伝送損失が本質的に少く，そのうえ，曲り部に対し，適当な設計を行なうことによって，かなり大きな曲率の円形曲り部に沿っても，十分に低損失の伝送を行なうことが，少くとも理論的には可能であることが明らかとなった．

本文では，H面内の円形曲りについてのみ考察したが，さらにE面内の円形曲り，くいちがい，折れ曲りなどについても検討する必要がある．これらの問題についても，現在引続き検討している．

謝　　辞

日頃から御べん撻いただく本学，板倉清保教授，ならびに，有益な御討論をいただいた板倉研究室の方々に深謝する．

# 参 考 文 献


(1) A.E. Karbowiak ; "A close look at optical waveguides", Microwaves, 5, 7, p.37 (July, 1966).

(2) H. Larsen ; "Dielektrische Wellenleiter bei optischen Frequenzen", A.E.Ü., 19, 10, p.535 (Oct., 1965).

(3) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 沢　新之輔, 吉川憲昭 ; "不均一誘電体薄膜表面波線路", 信学誌, 51-B, 3, p.82 (March, 1968).

(4) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 沢　新之輔 ; "レンズ収束作用を有する不均一誘電体薄膜表面波線路", マイクロ波研資, FW67-4 (1967-04).

(5) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 沢　新之輔 ; "短ミリ波, サブミリ波, 光波用低損失薄膜誘電体線路", 昭42連大, 1427.

(6) 沢　新之輔, 熊谷信昭 ; "周期的に収束効果をもつ誘電体薄膜表面波線路", 輻射科学研究会資料 (1967-12).

(7) 倉内憲孝, 吉田健一 ; "光波伝送用表面波線路の曲りによる輻射損失", 昭43連大, 1346.

(8) 末松安晴, 吹抜洋司 ; "理想化されたガス光導波系の解析", 信学誌, 48, 10, p.58 (1965-10).

(9) D. Marcuse ; "Propagation of Light Rays through a Lens-Waveguide with Curved Axis", B.S.T.J., Vol. XLIII, No.2, p.741 (March, 1964).

(10) D. Marcuse ; "Design Considerations for Bent-Beam Waveguides", I.EEE., Trans. MTT-13, 5, p.647 (Sept., 1965).

(11) 熊谷信昭, 吉田健一, 中原恒雄 ; "反射形ビーム・ウェーブガイド", 信学誌, 49, 6, p.1099 (昭41-06).

(12) 山崎友久，中西義郎；"反射形ビーム伝送系の曲り部の最適設計"，マイクロ波研資，マイクロ波66．7-17（1966-07）．

(13) E.A.J. Marcatili; "Modes in a sequence of astigmatic lens-like focusers", B.S.T.J., **43**, p.2887 (Nov., 1964).

(14) S.E. Miller; "Directional Control in Light-Wave Guidance", B.S.T.J., Vol. XLIII, No.4, part 2, p.1727 (July, 1964).

(15) Bateman and Harry; "Higher transcendental functions", N.Y. McGrow-Hill, **2**, p.194 (1953).

(16) 今井正明，松本　正；"ガスレンズの曲りによる姿態変換を打消す誘電率分布"，昭42信全大，534．

# 付　　録

基本姿態に対する不要姿態発生量$\gamma_{po}$および基本姿態の姿態変換損失$\alpha_{co}$を与える式の誘導

式(56)，(57)および(58)に，式(42)および(46)を代入し，式(2c)の仮定を考慮し，さらに，$L_c/L_s - 1 \ll 1$と仮定すれば，$\gamma_{po}$，および$\alpha_{co}$は，$\varepsilon_s^*(0) = \varepsilon_c^*(0)$なる場合，それぞれ，

$$\gamma_{po} = 10\log_{10}\left\{\frac{|K|^p}{8^p(p!)^2} H_{ep}^2\left[\frac{\sqrt{\pi}\rho g^{3/2}\beta}{2\sqrt{|K|}}\left(\frac{\delta_b}{\delta_c}\right)\right]\right\}_{(dB)} \qquad (A\cdot1)$$

および

$$\alpha_{co} = -10\log_{10}\left[1 - \pi\rho^2 g^3\beta\cdot\left(\frac{\delta_b}{\delta_c}\right)^2 - \left\{\frac{1}{2} - \pi\rho^2 g^3\beta\cdot\left(\frac{\delta_b}{\delta_c}\right)^2\right\}K\right]_{(dB)} \qquad (A\cdot2)$$

となる．

ここで，K，$\rho$，g，および$\beta$は，それぞれ，

$$\begin{cases} K = 1 - L_c/L_s - \rho^2 g^2 & (A\cdot3) \\ \rho = \lambda_0/R & (A\cdot4) \\ g = \dfrac{L_s}{\pi\lambda_0\sqrt{\varepsilon_s^*(0)}} & (A\cdot5) \\ \beta = 1 + \dfrac{1}{2\pi g} & (A\cdot6) \end{cases}$$

である．また，$p = 0, 1, 2\cdots$なる整数を表わす．

輻射科学研究会資料

# 集束伝送路用複反射鏡形ロンチャ

武　市　吉　博
竹　居　敏　夫
（三菱電機株式会社 鎌倉製作所）

1968年 4 月26日

# 集束伝送路用複反射鏡形ロンチャ

武 市 吉 博
竹 居 敏 夫
（三菱電機株式会社 鎌倉製作所）

## 1. まえがき

集束伝送路用ロンチャは導波管と集束伝送路との変換器であり，集束伝送路における最も低損失な伝送モードである基本ビームモードへのモード変換を行なうための機構である。

このモード変換の方法にはホーンとレンズとの組合せが研究されたが[1]，この方法ではロンチャ開口面における位相分布を基本ビームモードのそれにほぼ一致させることができるが，振幅分布を一致させることが困難である。さきに提案した複反射鏡形ロンチャ[2]はその開口面における界分布を振幅・位相ともに基本ビームモードの断面内界分布に等しくすることを目的としており，この目的達成のために2枚の反射鏡の形状を決定するものである。

ここではこの複反射鏡形ロンチャについての理論，すなわち設計法および能率計算法について述べる。

## 2. 集束伝送路におけるビームモード

集束伝送路ロンチャを論じるにあたって必要になる集束伝送路のビームモードについて明確にしておく。位相変成器が等間隔 $2b$ で共焦点的に配置された集束送路を考えることにし，位相変成器は損失を持たず位相だけを推移させる理想的なものであると仮定する。

図 1.は集束伝送路を示す。位相変成器の中間点Oを原点，伝播軸をz軸とする円筒座標系（$\rho$，$\varphi$，z）を定義すると集束伝送路のビームモードの式は近似的に(1)である。[3]

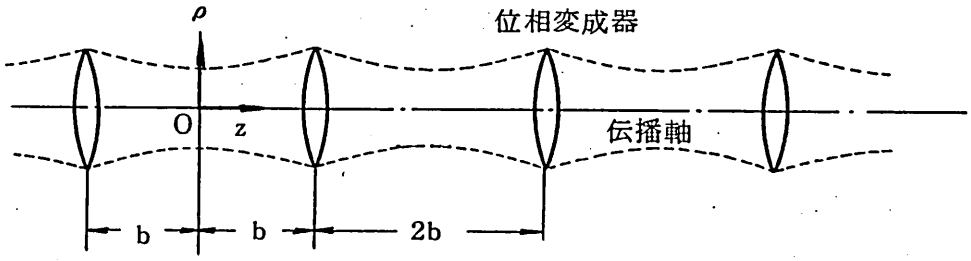



図 1.　等間隔 集束伝送路

$$
\left.
\begin{aligned}
E^{(\pm)}_{n,m} &= E^{(\pm)}_{n,m}\ \mathbf{e}^{(\pm)}_{n,m} \\
E^{(\pm)}_{n,m} &= \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\left(\frac{u^2}{1+v^2}\right)^{\frac{m\pm1}{2}} L_n^{m\pm1}\left(\frac{u^2}{1+v^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{1+v^2}} \\
&\quad \times e^{j\left\{(2n+m\pm1+1)\tan^{-1}v-\frac{1}{2}\cdot\frac{vu^2}{1+v^2}\right.} \\
\mathbf{e}^{(\pm)}_{n,m} &= \mathbf{I}\cos m\varphi \pm \mathbf{J}\sin m\varphi
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

ただし，$\mathbf{I}$は$\rho$方向の，$\mathbf{J}$は$\varphi$方向の単位ベクトルとし，さらに

$$
v=\frac{z}{b}\ ,\qquad u=\rho\sqrt{\frac{k}{b}}\ ,\qquad k=\frac{2\pi}{\lambda}\ ,\qquad \lambda\text{は波長} \qquad (2)
$$

とする。$L_\alpha^\beta(x)$ は Laguerre 関数で，(3) で定義される。

$$
L_\alpha^\beta(x)=\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{\alpha+\beta}{\alpha-i}\frac{(-x)^i}{i!} \qquad (3)
$$

n，m，(±) はビームモードを示すパラメータで，基本ビームモードは n＝0，m＝1,(−) で表示される。

(1) より z 軸に直角な断面 $z=z_0$ におけるビームモードの界分布は(4)となる。

$$\left.\begin{aligned} M^{(\pm)}_{n,m} &= f^{(\pm)}_{n,m}\, e^{j\phi^{(\pm)}_{n,m}} \\ f^{(\pm)}_{n,m} &= \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\left(\frac{u^2}{1+v_0^2}\right)^{\frac{m\pm1}{2}} L_n^{m\pm1}\left(\frac{u^2}{1+v_0^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{1+v_0^2}} \\ \phi^{(\pm)}_{n,m} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0 u^2}{1+v_0^2} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ただし，$v_0=\frac{z_0}{b}$ である。位相分布 $\phi^{(\pm)}_{n,m}$ はビームモードに関係しない。

あとで，ロンチャの能率を求めるときに必要となる界分布のビームモードへの展開について述べておく。いま，断面 $z=z_0$ 内に界分布 G が存在するものとし，これをビームモードに展開する。

$$G = g\, e^{j\Psi} = \sum_{p,q,\pm} a^{(\pm)}_{p,q} M^{(\pm)}_{p,q} \quad (5)$$

各ビームモード間の直交関係を用いて展開係数 $a^{(\pm)}_{n,m}$ を計算する。すなわち，(5)の両辺に $M^{(\pm)*}_{n,m}$ を掛けて断面 $z=z_0$ 上で積分すると，

$$a^{(\pm)}_{n,m} = \frac{\int_A G M^{(\pm)*}_{n,m}\, dS}{\int_A |M_{n,m}|^2\, dS} \quad (6)$$

となる。したがって断面 $z=z_0$ 内の界分布 $G$ に含まれる（m，n，±）モードの電力の割合い $\xi$ は(7)で計算できる。

$$\xi=\frac{\int_A |a_{n,m}^{(\pm)} M_{n,m}^{(\pm)}|^2 dS}{\int_A |G|^2 dS}=\frac{|\int_A g f_{n,m}^{(\pm)} e^{j(\Psi-\Phi_{n,m}^{(\pm)})} dS|^2}{\int_A |g|^2 dS \int_A |f_{n,m}|^2 dS} \quad (7)$$

3. 複反射鏡形ロンチャの設計

複反射鏡形ロンチャは，図2.のように1次反射鏡，2次反射鏡および給電ホーンで構成され，このロンチャ開口面内に基本ビームモードの界分布が得られるように1次・2次反射鏡の鏡面の形を決定するのである。ロンチャと集束伝送路の配置は図3.に示すように，最初の位相変成器との間隔が $b-z_0$ であるとすれば，ロンチャ開口面での基本ビームモードの界分布は(4)を用いて(8)となる。

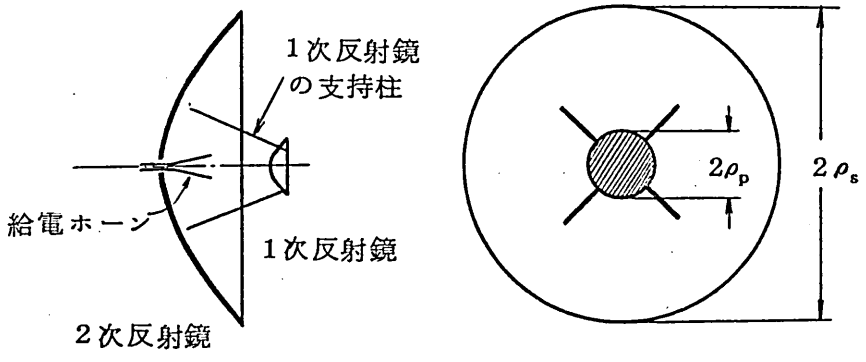



図2. 複反射鏡形ロンチャ

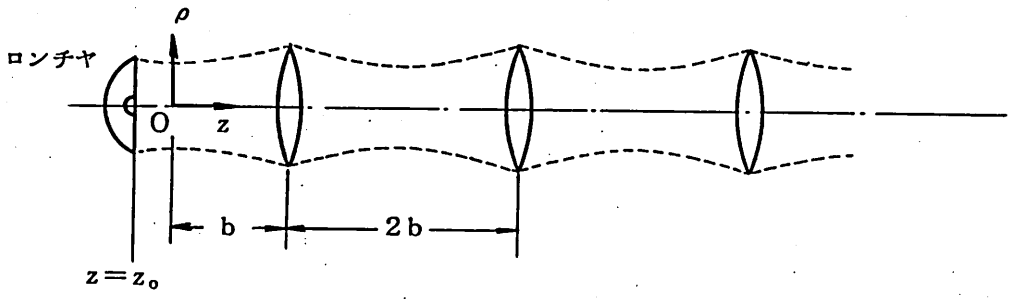



図 3. 集束伝送路とロンチヤの配置

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= f_0\, e^{j\Phi_0} \\ f_0 &= f_{0,1}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{1+v_0^2}}, \quad \Phi_0 = \Phi_{0,1}^{(-)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0\, u^2}{1+v_0^2} \end{aligned}\right\} (8)$$

このロンチャ開口面は1次反射鏡およびその支持柱によって一部分ふさがれている。ロンチャ開口が充分大きく，開口中央の遮蔽がないときには開口面に得る界分布が(8)であるときに最も能率が良くなることは容易に分かるが，複反射鏡形ロンチャでは，1次反射鏡が存在するため後述のように(8)が最良であるとは言えない。そこで開口面に得るべき界分布として(8)を変形して

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= g_0\, e^{j\Phi_0} \\ g_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\, e^{-\frac{a}{2}\cdot\frac{u^2}{1+v_0^2}}, \quad \Phi_0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0\, u^2}{1+v_0^2} \end{aligned}\right\}$$

を考えることにする。aを界分布係数と呼ぶ。a＝1のとき(8)と(9)は一致する。

鏡面の形を求めるために図4.のように座標系と変数を設定する。点Pは給電ホーンの位相中心である。給電ホーンの放射指向特性が

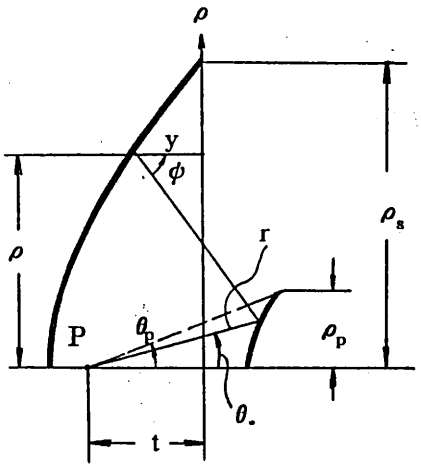



図 4. 鏡面計算のための説明図

$$H(\theta) = h_k(\theta)\ e^{j\textcircled{H}(\theta)} \tag{10}$$

で与えられるとき，開口面界分布(9)を得るための鏡面の決定には，幾何光学近似を仮定し，次の三つの条件を用いる。

（Ⅰ） 振幅分布についての関係式

$$\frac{\int_0^{\rho} |G_0|^2\ \rho\, d\rho}{\int_0^{\rho_s} |G_0|^2\ \rho\, d\rho} = \frac{\int_0^{\theta} |H(\theta)|^2 \sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\theta_p} |H(\theta)|^2 \sin\theta\, d\theta} \tag{11}$$

（Ⅱ） 開口面での位相分布の関係式

$$r + y + \frac{\rho - r\sin\theta}{\sin\phi} - \frac{\textcircled{H}}{k} + \frac{\Phi_0}{k} = \text{const.} \tag{12}$$

(iii) 1次・2次反射鏡での反射の式

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \tan\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right), \qquad \frac{dy}{d\rho} = -\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (13)$$

$\rho$と$\theta$は(11)で，$\phi$と$\theta$は(12)で関係づけられるので(13)は独立変数$\theta$，従属変数$\rho$，yの1階2元連立方程式となり，初期条件を与えて解くことによって両反射鏡の鏡面座標を求めることができる。

4. 複反射鏡形ロンチャの能率

ロンチャに供給される電力は，ビームモードに変換される電力とビームモードに変換されない電力に分けられ，前者はさらに，基本ビームモードに変換されるものと高次ビームモードに交換されるものとに分けられる。集束伝送路での伝送に有効なのは基本ビームモードであるので，ロンチャの能率は，ロンチャに供給された電力のうち集束伝送路に励振された基本ビームモード電力の割合いと定義できる。したがってロンチャの能率は次式で記述できる。[4] [5]

$$\eta = \eta_q \ \eta_m \quad (14)$$

ただし，$\eta_q = \frac{P_q}{P_t}$　$\eta_m = \frac{P_m}{P_q}$ とし，$P_t$ はロンチャに供給される電力，$P_q$ はロンチャ開口面においてビームモードに変換された電力，$P_m$ は基本ビームモードに変換された電力である。

複反射鏡形ロンチャの場合は，上述の能率 $\eta_q$, $\eta_m$ はそれぞれさらに次の

各能率に分けて考えることができる。

① 給電ホーンの放射電力のうち1次反射鏡に当たらない電力による能率 $\eta_{s1}$

② 1次反射鏡の反射電力のうち2次反射鏡に当たらない電力による能率 $\eta_{s2}$

③ 2次反射鏡の反射電力のうち1次反射鏡に妨げられる電力による能率 $\eta_b$

④ 1次反射鏡支持柱によって散乱させられる電力による能率 $\eta_{wq}$

⑤ 抵抗損失その他の損失による能率 $\eta_t$

で構成され，能率 $\eta_m$ は

⑥ 1次・2次反射鏡の大きさによって開口面界分布が有限の範囲に制限されることによる能率 $\eta_a$

⑦ 1次反射鏡支持柱の影の部分に界分布が存在しないことによる能率 $\eta_{wm}$

⑧ 反射鏡鏡面誤差，反射鏡設置誤差およびその他の誤差に基づく能率 $\eta_r$

で構成される。

個々の能率について順に論じる。

$\eta_{s1}$ は給電ホーンと1次反射鏡との関係によって決定され，給電ホーンの放射パターンが (10) であることから，次式となる。

$$\eta_{s1} = \frac{\int_0^{\theta_p} |H(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta}{\int_0^{\pi} |H(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta} \qquad (15)$$

$\eta_{s2}$ は，1次反射鏡からの反射波がほとんどすべて2次反射鏡に当ると考

えられるので，$\eta_{s_2} \simeq 1$ である。

$\eta_b$, $\eta_a$ は1次・2次反射鏡の大きさに直接関係している。ロンチャ開口面に得られる界分布は(9)より

$$G_1 = \begin{cases} G_0 & (\rho_p \leq \rho \leq \rho_s) \\ 0 & (0 \leq \rho < \rho_p,\ \rho > \rho_s) \end{cases} \tag{16}$$

となる。したがって $\eta_b$ は(9),(16)より，また $\eta_a$ は(7)より

$$\eta_b = \frac{\int_{\rho_p}^{\rho_s} |G_1|^2 \rho \, d\rho}{\int_0^{\rho_s} |G_0|^2 \rho \, d\rho} = \frac{e^{-2\pi a N_p} - e^{-2\pi a N_s}}{1 - e^{-2\pi a N_s}} \tag{17}$$

$$\eta_a = \frac{\left| \int_{\rho_p}^{\rho_s} G_1 M_0^* \rho \, d\rho \right|^2}{\int_0^{\rho_s} |G_1|^2 \rho \, d\rho \int_0^{\infty} |M_0|^2 \rho \, d\rho}$$

$$= \frac{4a}{(1+a)^2} \cdot \frac{\left\{ e^{-(1+a)\pi N_p} - e^{-(1+a)\pi N_s} \right\}^2}{e^{-2\pi a N_p} - e^{-2\pi a N_s}} \tag{18}$$

となる。ただし，$N_p = \dfrac{\rho_p^2}{(1+v_0^2)\lambda b}$，$N_s = \dfrac{\rho_s^2}{(1+v_0^2)\lambda b}$ とし，これらはフレネル数に相当した値である。能率 $\eta_b$，$\eta_a$ の一例を図5.，図6.に示した。開口面界分布と能率との関係を調べるために $\eta_b$ と $\eta_a$ の積 $\eta'$ を計算すると，

$$\eta' = \eta_b \quad \eta_a = \frac{4a}{(1+a)^2} \cdot \frac{e^{-(1+a)\pi N_p} - e^{-(1+a)\pi N_s{}^2}}{1 - e^{-2\pi a N_s}} \tag{19}$$

である。図 7.は能率 $\eta'$ の a に対する変化の様子を示す。$\eta'$ を最大にする a の値 $a_{opt.}$ が存在し，$a_{opt.} < 1.0$ であることを示している。

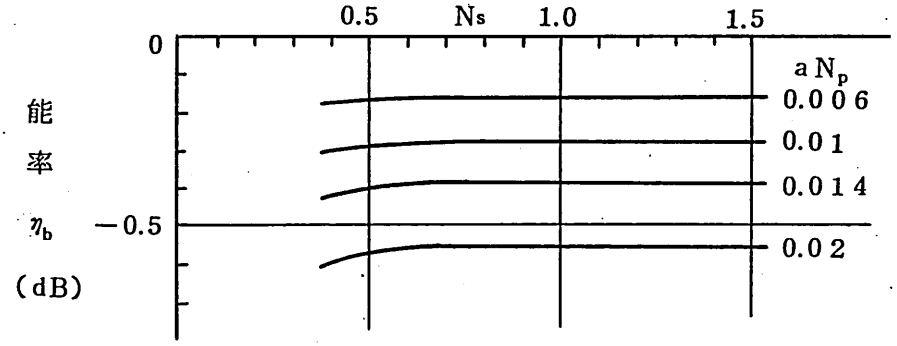



図 5.　1 次反射鏡で妨げられる電力に基づく能率 $\eta_b$

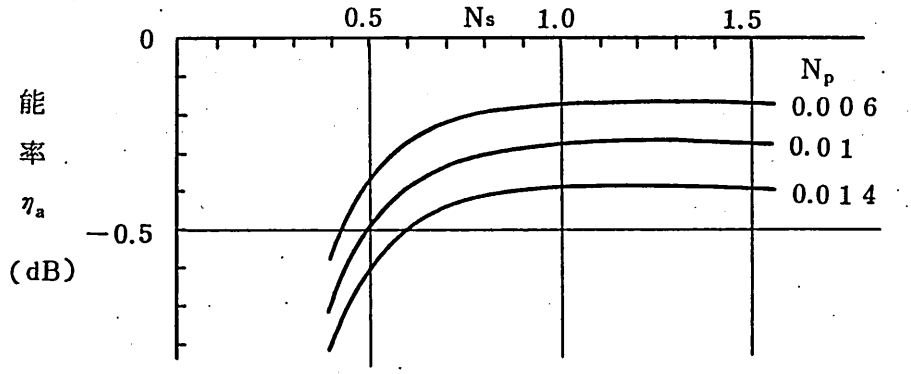



図 6.　1 次反射鏡により開口面が制限されることに基づく能率 $\eta_a$

ただし，$a = 1.0$ と $a = a_{opt.}$ とで能率 $\eta'$ に著しい違いはない。

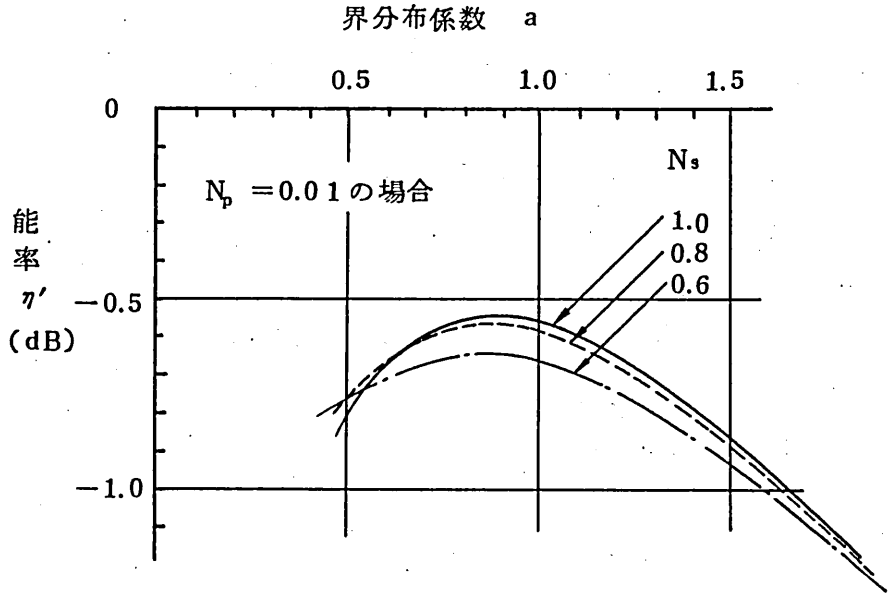



図 7.　1 次反射鏡に基づく二つの能率 $\eta_b$ ，$\eta_a$ の積 $\eta' = \eta_b \ \eta_a$

$\eta wq$ ，$\eta wm$ は 1 次反射鏡支持柱によるもので，支持柱が影響を与える部分が開口面に投影されるときの形によって決定される。この形が図 8. のように

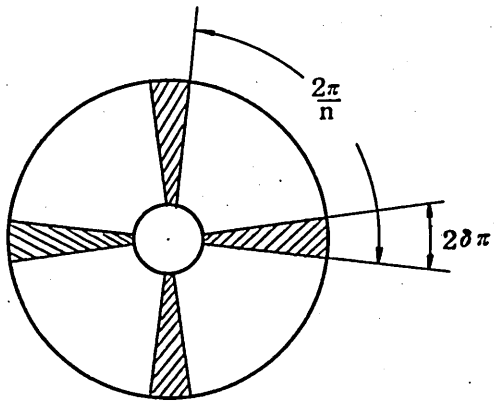



図 8.　1 次反射鏡支持柱により
開口面に生ずる影

開口中心を中心とする角度　$2\pi\delta$ の扇形であると仮定すると，開口面界分布が

$$G_2=\begin{cases} G_0 \ (\rho_p \leq \rho \leq \rho_s \ ; \ 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{n} - 2\pi\delta, \frac{2\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{4\pi}{n} - 2\pi\delta, \cdots) \\ 0 \qquad \text{上記以外} \end{cases} \tag{20}$$

となる。これに基づいて能率を計算すると，

$$\eta'_{wq} = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_p}^{\rho_s} |G_2|^2 \rho \, d\rho}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_s} |G_0|^2 \rho \, d\rho} = (1-n\delta)\eta_b \tag{21}$$

$$\eta'_{wm} = \frac{\left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_p}^{\rho_s} G_2 M_0^* \rho \, d\rho \right|^2}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_p}^{\rho_s} |G_2|^2 \rho \, d\rho \cdot \int_0^{\infty} |M_0|^2 \rho \, d\rho} = (1-n\delta)\eta_a \tag{22}$$

を得る。(20) は1次反射鏡の存在をも考慮しているので，支持柱の影響による能率だけを取り出すと (21),(22) より

$$\eta_{wq} = \eta_{wm} = 1 - n\delta \tag{23}$$

であり，$\eta_{wq}$, $\eta_{wm}$ を合わせて，1次反射鏡支持柱に基づく能率 $\eta_w$ は

$$\eta_w = \eta_{wq} \ \eta_{wm} = (1-n\delta)^2 \tag{24}$$

となって開口面積が変化した割合いの自乗に等しい。

$\eta_t$ として反射鏡での抵抗損失を考える。鏡面がアルミニウム製であるときの損失は約 $0.0005\sqrt{f}$ dB である。ただし f は周波数 (GHz)。したがって2枚の反射鏡を考えてもほとんど損失は無視できる。

最後に $\eta_r$ については ランダムな界分布誤差の影響について考える。振幅誤差の r.m.s. 値を $\tilde{q}_a$ (dB)，位相誤差のそれを $\tilde{q}_p$ (度) とするとき，(7)

を用いて振幅誤差に基づく能率 $\eta_{ra}$，位相誤差に基づく能率 $\eta_{rp}$ を計算した。

その結果をそれぞれ図9.，図10.に示す。

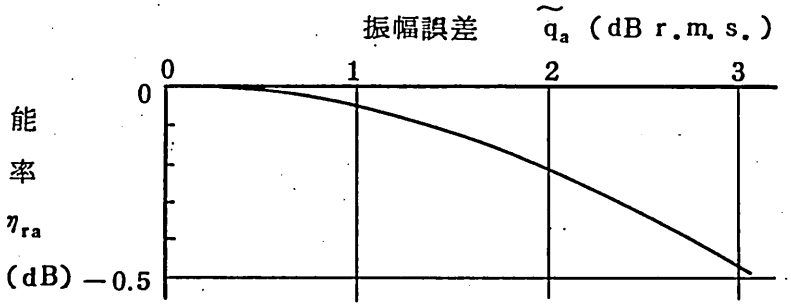



図9. 開口面での振幅誤差に基づく能率 $\eta_{ra}$

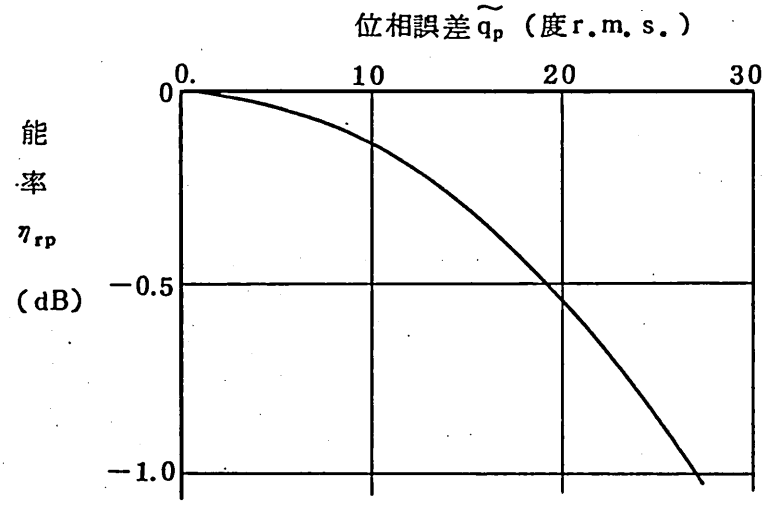



図10. 開口面での位相誤差に基づく能率 $\eta_{rp}$

複反射鏡形ロンチャの能率についてそのすべてを考察したが，前述の8項目

のうち　$\eta_{s1}$，$\eta_t$ は他の能率に比べて無視できる。したがって，複反射鏡形ロンチャの能率 $\eta$ を概算するには，

$$\eta = \eta_q \ \eta_m \simeq \eta_{s1} \ \eta_b \ \eta_{wq} \cdot \eta_a \ \eta_{wm} \ \eta_r \qquad (25)$$

で求めるとよい。

## 5. 複反射鏡形ロンチャの設計例

複反射鏡形ロンチャの性能を調べるために具体的な設計例をあげて能率などを検討する。

このロンチャの性能に大きく影響するのは1次反射鏡の大きさに関するフレネル数Np である。これはロンチャの位置 $z_0$ ，位相変成器間隔 2b および1次反射鏡直径 $2\rho_p$ で決定される。このため能率を良くするには1次反射鏡を小さくすればよいが，これをあまり小さくしすぎると反射鏡としての動作が不充分であるので，$2\rho_p$ には下限が存在することになる。ここでは $2\rho_p = 20\lambda$ として二つの設計例を求めた。その寸法および能率を表1.に示す。

表1.　複反射鏡形ロンチャの設計例　寸法および能率

| | | 例 2. | 例 3. |
|---|---|---|---|
| 集束伝送路の位相変成器間隔 | 2b | $2\times10^4\ \lambda$ | $4\times10^4\ \lambda$ |
| ロンチャの開口面直径 | $2\rho_s$ | 200 $\lambda$ | 280 $\lambda$ |
| の1次反射鏡直径 | $2\rho_p$ | 20 $\lambda$ | 20 $\lambda$ |
| の界分布係数 | a | 1.0 | 1.0 |
| 給電ホーンの開口直径 | | 8 $\lambda$ | 8 $\lambda$ |
| 給電ホーンの軸長 | | 28 $\lambda$ | 28 $\lambda$ |
| 1次反射鏡のフレネル数 | $N_p$ | 0.01 | 0.005 |

| ロンチャ開口のフルネル数 $N_s$ | 1.0 | 1.0 |
|---|---|---|
| $\eta_{s1}$ (dB) | −0.1 | −0.1 |
| $\eta_b$ (dB) | −0.27 | 0.14 |
| $\eta_a$ (dB) | −0.28 | −0.14 |
| $\eta_w$ (dB) | −0.2 | −0.15 |
| $\eta_r$ (dB) | −0.1 | −0.1 |
| 能率の合計 $\eta$ (dB) | −0.95 | −0.64 |

6. むすび

集束伝送路用ロンチャの高能率化の一方法として提案した複反射鏡形ロンチャの設計法および能率計算法について理論的に考察するとともに，このロンチャが高能率であることを数値例によって示した。

このロンチャの能率には1次反射鏡の直径が大きく影響することは最初から予期していたが，その他に1次反射鏡支持柱の影響がかなり大きくなるのでこの点にも留意する必要がある。設計例にみられるようにロンチャ開口のフレネル数を一定に保った場合，このロンチャは位相変成器間隔が大きい集束伝送路になるほど有利であり，間隔$4\times10^4\ \lambda$，1次反射鏡直径$20\lambda$；ロンチャ開口直径$280\lambda$のとき能率約−0.65 dB が得られる。間隔のさらに大きい集束伝送路ではさらに能率が良くなる。1次反射鏡およびその支持柱の影響を避けるには各鏡面をoff−setに配置する必要があり，この場合には能率の一層の向上が期待できる。

なお複反射鏡形ロンチャの実験については別の機会に報告することにしたい。

参考文献

〔1〕 R. J. Chaffin and J.B.Beyer, "A Low − Loss Launcher for the Beam Waveguide," IEEE Trans., MTT−12, 555, 1964

〔2〕 喜連川, 武市, 竹居, "集束伝送路用高能率ロンチャ," 昭 42 四学会連大, NO.1290, April 1964

〔3〕 G. Goubau and F. Schwering, "On the Guided Propagation of Electromagnetic Wave Beams," IRE Trans., AP−9, 248〜256, 1961

〔4〕 武市, 竹居, "集束伝送路ロンチャの能率," 信学会マイクロ波研資料, MW67−17, July 1967

〔5〕 武市, 竹居, "集束伝送路の複反射鏡形ロンチャの能率," 昭 42 信学会全大, NO. 514, Oct. 1967

輻射科学研究会資料

# レンズとガウスフィルターを併用したビーム導波線路の解析

根本承次郎　　牧本利夫
（大阪大学　基礎工学部）

1968年 4月 26日

## 1. まえがき

最近，振幅透過係数がガウス分布をした，いわゆるガウスフィルターとレンズとを併用したビーム導波線路およびガウスフィルターを挿入した共焦点共振器に関する二，三の論文が発表され[1],[2],[3] ガウスフィルターがレンズの設置誤差によるビーム波のずれを減少させる作用，姿態分離作用などをもつことが示されたが，これらの論文ではレンズおよび鏡面の有限性が考慮されていない。ここではレンズとガウスフィルターを併用したビーム導波線路につき，開口の有限性を考慮して回折損失を求め，ガウスフィルターの姿態分離作用を明らかにするとともに，ガウス分布のひろがりをせまくするほど，任意のガウス分布励振に対し，より少ないレンズ枚数で定常状態に達する，すなわち伝送すべき基本姿態波が形成されることを示した。また本論文では一般に非共焦点系を取り扱っており，従来近似的な解析しかなされていなかった非共焦点系の回折損失を求めてレンズの設置誤差に対する目安を与えるとともに，最近の論文[4]で得られた，非共焦点系の回折損失を与える式は本文での結果式を近似することによって得られることを示した。

## 2. 回折積分の正規化

円筒座標 $(r,\theta,z)$ において，$z=0$ なる平面に一致する完全電波吸収板にあけた半径 $a$ なる円孔による，フレネル領域の点 $P(r,\theta,z)$ での回折波 $U$ は，次の回折積分で与えられる。[5]

$$U(r,\theta,z)=\frac{jk}{2\pi z}e^{-jkz}\int_0^a\int_0^{2\pi}U_0(\rho,\varphi)\,e^{-\frac{jk}{2z}[\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)]}\,\rho\,d\rho\,d\varphi \qquad (1)$$

ただし $(\rho,\varphi)$ は $z=0$ での $(r,\theta)$ 座標であり，$U_0(\rho,\varphi)$ は入射波の開口面上での界分布である。以下 $U_0$ が $\rho$ のみの関数である場合を考え

$$U_0(\rho,\varphi)\equiv\psi_0(\rho) \tag{2}$$

とおく。よって(1)式は

$$U(r,\theta,z)=\frac{jk}{2\pi z}e^{-jkz}\int_0^a\psi_0(\rho)e^{-\frac{jk}{2z}(\rho^2+r^2)}\rho d\rho\int_0^{2\pi}e^{\frac{jk}{z}\rho r\cos(\varphi-\theta)}d\varphi$$

$$=\frac{jk}{z}e^{-jkz}\int_0^a\psi_0(\rho)J_0\left(\frac{k\rho r}{z}\right)e^{-\frac{jk}{2z}(\rho^2+r^2)}\rho d\rho \tag{3}$$

となり, $U$ は $\theta$ によらない。そこで $z$ を固定して

$$U(r,\theta,z)\equiv\psi(r) \tag{4}$$

とおくことにする。よって(3)式は

$$\psi(r)=\frac{jk}{z}e^{-jkz}\int_0^a\psi_0(\rho)J_0\left(\frac{k\rho r}{z}\right)e^{-\frac{jk}{2z}(\rho^2+r^2)}\rho d\rho \tag{5}$$

となる。上式で次の変数変換

$$\sqrt{\frac{k}{z}}\rho=P\ ,\ \sqrt{\frac{k}{z}}r=R\ ,\ \sqrt{\frac{k}{z}}a=A \tag{6}$$

をおこない

$$\psi_0(\rho)\equiv\Psi_0(P)\ ,\ \psi(r)\equiv\Psi(R)\ ,\ je^{-jkz}\equiv C \tag{7}$$

とおけば次の正規化された回折積分が得られる。

$$\Psi(R)\sqrt{R}=\int_0^A K(P,R)\Psi_0(P)\sqrt{P}\,dP \tag{8}$$

$$K(P,R)=C\sqrt{PR}\,J_0(PR)e^{-\frac{j}{2}(P^2+R^2)} \tag{9}$$

## 3. ガウスフィルターを用いたレンズ列ビーム導波系の固有姿態および回折損失

ビーム導波線路として図1に示したような, 半径 $a$ なる円形開口をもった吸収板が等間隔 $d$ で配列されている系を考え, 各開口に透過係数 $T$ が

$$T(R)=e^{-\gamma R^2}, \quad R=\sqrt{\frac{k}{d}}r \tag{10}$$

$$\gamma=\alpha-j\beta, \quad \alpha\geq 0, \beta\geq 0 \tag{11}$$

で与えられるフィルターが挿入されているものとする。$\alpha=0, \beta>0$ の場合は無損失な凸レンズ(焦点距離 $f=d/2\beta$)のみが挿入されている場合であり，$\alpha>0, \beta=0$ の場合はガウスフィルターのみが挿入されている場合である。$\alpha=0, \beta=1$ の場合は Goubau らの論文[6]で取り扱われている。また $\alpha=0, \beta\neq 1$ の場合は最近 米山らの論文[4]で変分問題として取り扱われたが，そこでの結果式(積分方程式の固有値)は本文での結果式を近似することによって得られることをのちに示す。なお焦点距離 $f$ なるレンズを等間隔 $d=2f$ で配列した系($\beta=1$ の場合)は共焦点系と呼ばれ，$d\neq 2f$ ($\beta\neq 1$)なる系は非共焦点系と呼ばれている。

図1における $(m-1)$ 番目の吸収板直前(左側)の界分布を $\Psi_{m-1}(R)$ とすると，この吸収板直後(右側)の界分布 $\Psi^{t}_{m-1}(R)$ は

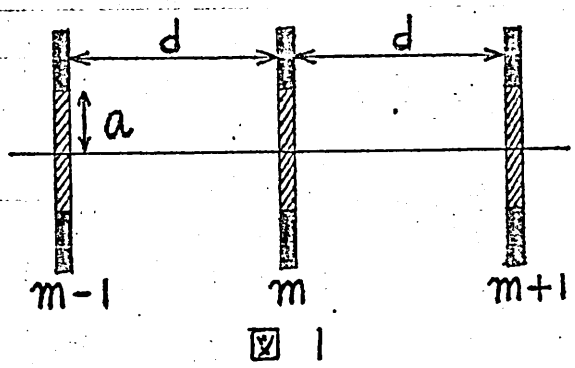


図 1

$$\Psi^{t}_{m-1}(R)=\Psi_{m-1}(R)\,e^{-\gamma R^2}, \quad 0\leq R\leq A \tag{12}$$

である。$m$ 番目の吸収板直前の界分布 $\Psi_m(R)$ は上式と(8)式より

$$\Psi_m(R)\sqrt{R}=\int_0^A K(P,R)\,\Psi_{m-1}(P)\,e^{-\gamma P^2}\sqrt{P}\,dP \tag{13}$$

で与えられる。今，$\Psi_{m-1}(R)$ と $\Psi_m(R)$ の間に $\sigma$ を複素定数として

$$\mathfrak{T}_m(R) = \sigma\, \mathfrak{T}_{m-1}(R) \tag{14}$$

なる関係式が成り立つものとすれば，すなわち定数倍を除いて界分布が再生される状態にあると仮定したとき

$$\mathfrak{T}_{m-1}(R)\sqrt{R} \equiv \mathfrak{T}(R),\quad K(P,R)e^{-\gamma P^2} \equiv N(P,R),\quad \frac{1}{\sigma} \equiv \lambda \tag{15}$$

とおくと次式が成り立つ．

$$\lambda \int_0^A N(P,R)\,\mathfrak{T}(P)\,dP = \mathfrak{T}(R) \tag{16}$$

上式は非対称核 $N(P,R)$ をもつ，フレドホルム型第二種斉次積分方程式である。特に今の場合 (9)式より $K(P,R)=K(R,P)$ であるから

$$N(P,R) = K(P,R)e^{-\gamma P^2} \tag{17}$$

は準対称核と呼ばれる。準対称核をもつ積分方程式は対称核をもつ積分方程式に変換できる。すなわち (16)式は対称核 $H(P,R)$ をもつ次の積分方程式に変換できる。

$$\lambda \int_0^A H(P,R)\,\varphi(P)\,dP = \varphi(R) \tag{18}$$

$$H(P,R) = K(P,R)e^{-\frac{\gamma}{2}(P^2+R^2)} \tag{19}$$

$$\varphi(R) = \mathfrak{T}(R)e^{-\frac{\gamma}{2}R^2} \tag{20}$$

よって (16)式の固有値，固有関数を求める問題は，(18)式の固有値固有関数を求める問題に帰着された。(18)式の固有値を求める準備として次の積分方程式を考える．

$$\lambda \int_0^\infty H(P,R)\,\varphi(P)\,dP = \varphi(R) \tag{21}$$

上式の解を次のように仮定してみる．

$$\varphi(R) = \xi e^{-\frac{\eta}{2}R^2} L_n(\zeta R^2)\sqrt{R},\quad \begin{array}{l}\xi,\eta,\zeta：未知な複素定数\\ L_n(z)：ラゲールの多項式\end{array} \tag{22}$$

この式を(21)式の左辺に代入し，積分公式[7]を用いた結果は

$$\lambda\int_0^\infty H(P,R)\varphi(P)\,dP = \xi\frac{\lambda C(-1)^n}{\eta+\gamma+j}\left(\frac{2\zeta-\eta-\gamma-j}{\eta+\gamma+j}\right)^n \times e^{-\frac{1}{2}(\gamma+j+\frac{1}{\eta+\gamma+j})R^2} \times L_n\left[\frac{\eta R^2}{(\eta+\gamma+j)(2\zeta-\eta-\gamma-j)}\right]\sqrt{R} \qquad (23)$$

$$\mathrm{Re}(\eta+\gamma)>0$$

である。よって(22)式の $\varphi(R)$ が(21)式の解であるためには，上式と(22)式とを比較して次の三式が成り立たねばならない。

$$\left.\begin{aligned} &\gamma+j+\frac{1}{\eta+\gamma+j}=\eta, \quad \frac{\lambda C(-1)^n}{\eta+\gamma+j}\left(\frac{2\zeta-\eta-\gamma-j}{\eta+\gamma+j}\right)^n=1 \\ &(\eta+\gamma+j)(2\zeta-\eta-\gamma-j)=1 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

この三式より次式が得られる。

$$\eta^2=\gamma^2+2j\gamma, \quad \zeta=\eta, \quad \lambda^{-1}=C(-1)^n(\eta-\gamma-j)^{2n+1} \qquad (25)$$

よって(21)式の解すなわち固有関数 $\varphi_n(R)$ および固有値 $\lambda_n$ は次式で与えられる。

$$\varphi_n(R)=\xi e^{-\frac{\eta}{2}R^2}L_n(\eta R^2)\sqrt{R} \qquad (26)$$

$$\lambda_n^{-1}=C(-1)^n(\eta-\gamma-j)^{2n+1} \qquad (27)$$

$$\eta^2=\gamma^2+2j\gamma \qquad (28)$$

(28)式で与えられる $\eta$ の二つの分枝のうち，(23)式の成り立つ条件式 $\mathrm{Re}(\eta+\gamma)>0$ をみたすためには $\mathrm{Re}(\eta)>0$ なる分枝を採用しなければならない。核 $H(P,R)$ の対称性により固有関数 $\varphi_n(R)$ に関して次式が成り立つ。

$$\int_0^\infty \varphi_n(R)\varphi_m(R)\,dR=0, \quad \lambda_n\neq\lambda_m \qquad (29)$$

今の場合，ラゲールの多項式の直交性より

$$\int_0^\infty \varphi_n(R)\varphi_m(R)\,dR = \xi^2\int_0^\infty e^{-\eta R^2} L_n(\eta R^2) L_m(\eta R^2) R\,dR$$

$$= \frac{\xi^2}{2\eta}\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_m(t)\,dt \qquad \because \mathrm{Re}(\eta) > 0$$

$$= \frac{\xi^2}{2\eta}\delta_{nm} \tag{30}$$

であるから $\lambda_n \neq \lambda_m$ でなくても $\eta \neq m$ であれば固有関数は直交する。この固有関数系を正規化するために $\xi = \sqrt{2\eta}$ とえらぶことにする。すなわち

$$\varphi_n(R) = \sqrt{2\eta R}\, e^{-\frac{\eta}{2}R^2} L_n(\eta R^2), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{31}$$

は正規直交固有関数系をなす。この関数系により核 $H(P,R)$ は次のように展開できる。

$$H(P,R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(P)\varphi_n(R)}{\lambda_n} \tag{32}$$

上式は次の二式を用いることにより得られる。

$$\lambda_n \int_0^\infty H(P,R)\varphi_n(P)\,dP = \varphi_n(R), \quad \int_0^\infty \varphi_n(R)\varphi_m(R)\,dR = \delta_{nm} \tag{33}$$

以上で (18)式の，すなわち (16)式の固有値を求める準備は終わったが以下しばらくは $\varphi_n(R)$, $\lambda_n$ に関連したことがらについて述べる。

$\lambda_n$ は (21)式の固有値であると同時に (16)式で形式的に $A \to \infty$ とした

$$\lambda \int_0^\infty N(P,R)\,\text{亜}(P)\,dP = \text{亜}(R) \tag{34}$$

の固有値でもある。この固有値 $\lambda_n$ に対応する上式の固有関数 $\text{亜}_n(R)$ は (20), (31)式より

$$\text{亜}_n(R) = \varphi_n(R) e^{\frac{\gamma}{2}R^2} = \sqrt{2\eta R}\, e^{-\frac{1}{2}(\eta-\gamma)R^2} L_n(\eta R^2) \tag{35}$$

であるが，この $\text{亜}_n(R)$ が次の不等式

$$\left|\int_A^\infty N(P,R)\,\text{亜}_n(P)\,dP\right| \ll \left|\int_0^A N(P,R)\,\text{亜}_n(P)\,dP\right| \tag{36}$$

をみたすなら，$\Phi_n(R)$ は (16)式の，すなわち A の有限な積分方程式の近似的固有関数とみなすことができる。このとき $\Phi_n(R)$ を $\sqrt{R}$ で割った

$$\Psi_n(R) \equiv \Phi_n(R)/\sqrt{R} = \sqrt{2\eta}\, e^{-\frac{1}{2}(\eta-\gamma)R^2} L_n(\eta R^2) \tag{37}$$

を有限開口ビーム導波系の近似的第 $n$ 固有姿態波と呼ぶことにし，(36)式が成り立たない場合は形式的に，無限開口ビーム導波系の第 $n$ 固有姿態波と呼ぶことにする。またこれらの場合を一括して $\Psi_n(R)$ を単に $n$ モードと呼ぶことにする。この $n$ モードは (12)式に関して述べたように吸収板直前の界分布であり，吸収板直後の界分布 $\Psi_n^t(R)$ は次式で与えられる

$$\Psi_n^t(R) = \Psi_n(R) e^{-\gamma R^2} = \sqrt{2\eta}\, e^{-\frac{1}{2}(\eta+\gamma)R^2} L_n(\eta R^2) \tag{38}$$

これらの $n$ モードは $\alpha=0$ のとき（ガウスフィルターが挿入されていないとき）にかぎり次の直交関係をみたす。

$$\int_0^\infty \Psi_n(R)\Psi_m^*(R) R\,dR = \int_0^\infty \Psi_n^t(R)\Psi_m^{t*}(R) R\,dR = \delta_{nm} \tag{39}$$

また $n$ モードに対する，吸収板一枚あたりのパワーの損失を $P_n$ (db) とすると (27)式および $|C|=1$ より $P_n$ は次式で与えられる。

$$P_n = -10\log_{10}|1/\lambda_n|^2 = -20(2n+1)\log_{10}|\eta-\gamma-j|, \quad (\mathrm{db}) \tag{40}$$

次ページの図2に，共焦点系での 0，1 モードの $\alpha$ による変化を，また図3には共焦点系での $P_n$ ($n=0,1,2,3$) の $\alpha$ による変化を示す。

ここで数値計算に必要な，(28)式をみたす $\eta$ ($\mathrm{Re}\,\eta>0$) を求めた結果を示しておく。

$$\left.\begin{aligned} &\eta = \eta_r + j\eta_i \\ &\eta_r = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\chi}+y)}, \quad \eta_i = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\chi}-y)}, \quad 1-\beta \gtrless 0 \\ &\chi = (\alpha^4+\beta^4) + 4(\alpha^2+\beta^2)(1-\beta) + 2\alpha^2\beta^2 \\ &y = \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

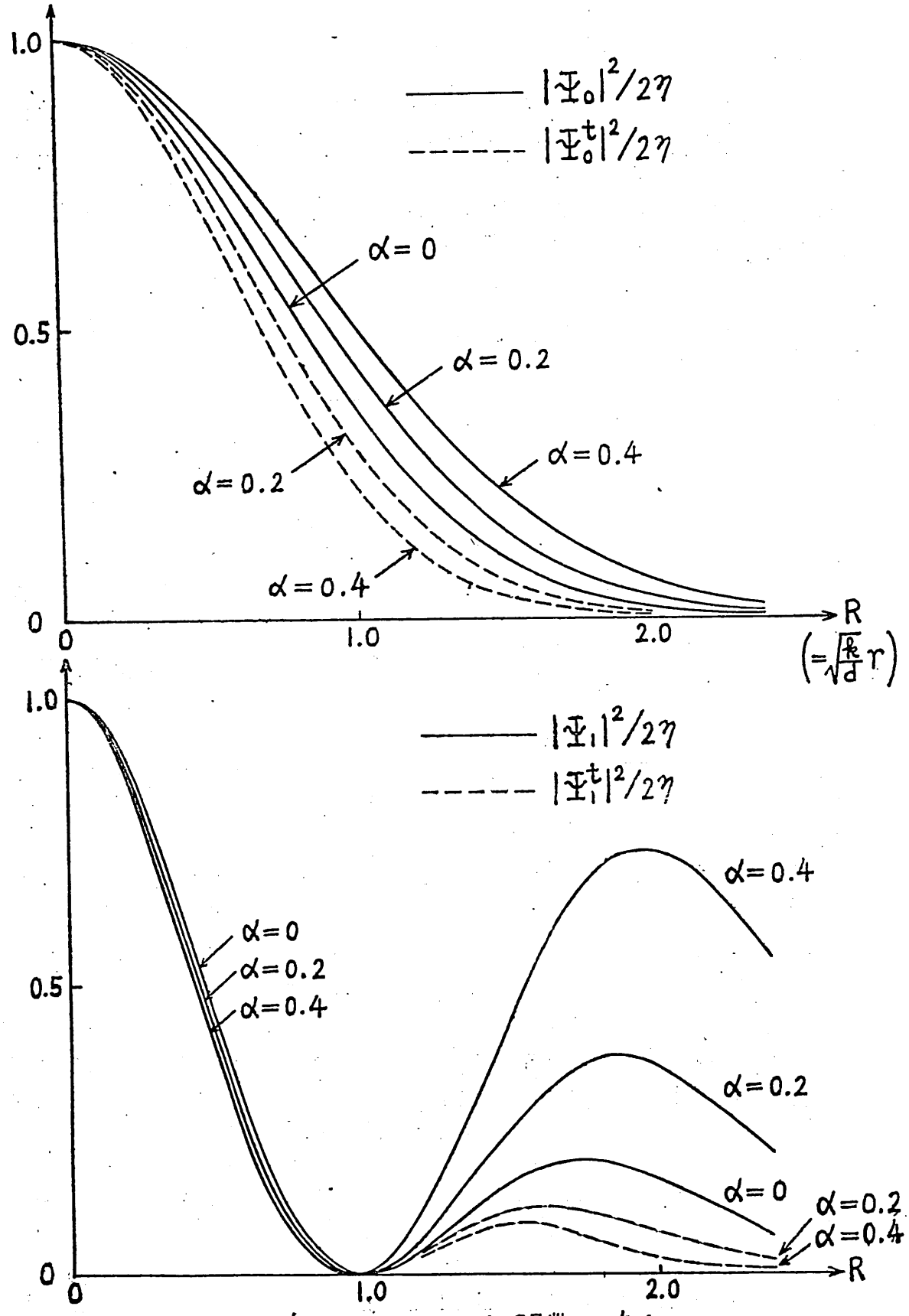



図 2　$\alpha$ の変化によるモード関数の変化

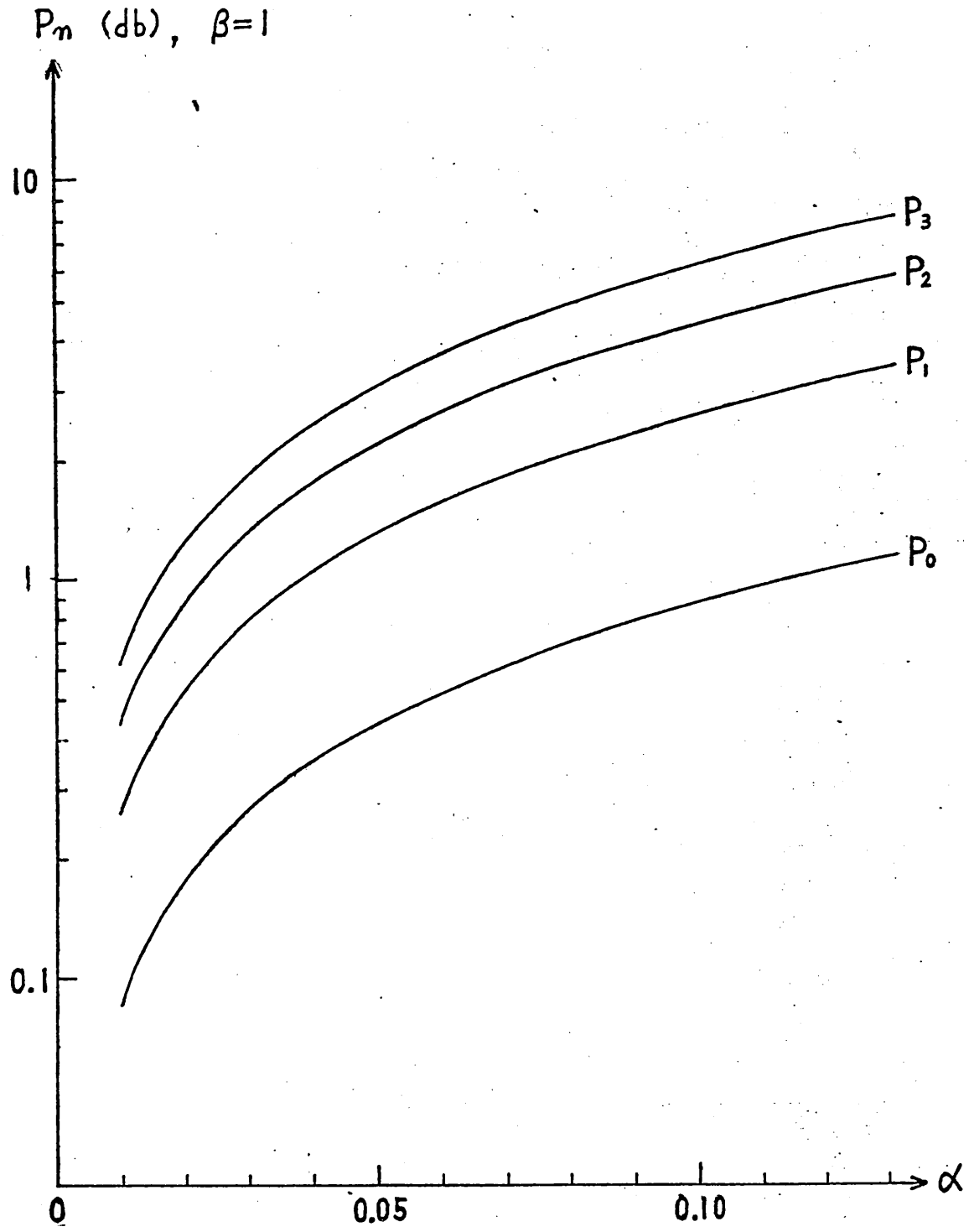



図3　共焦点系における0～3モードの吸収板一枚あたりのパワーの損失量

つぎに最初の目的であった (18)式の，すなわち(16)式の固有値を求める問題に入る。(18)式を再び記すと

$$\lambda\int_0^A H(P,R)\varphi(P)\,dP=\varphi(R) \tag{42}$$

である。上式左辺に (32)式を代入すると次式が得られる。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda_n}\varphi_n(R)\int_0^A\varphi_n(P)\varphi(P)\,dP=\varphi(R) \tag{43}$$

今，(42)式の解 $\varphi(R)$ が $\{\varphi_m(R)\}$ で展開可能とする。すなわち次式が成り立つものと仮定する。

$$\varphi(R)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\varphi_m(R) \tag{44}$$

$$a_m=\int_0^{\infty}\varphi(R)\varphi_m(R)\,dR \tag{45}$$

(43)式の両辺に $\varphi_m(R)$ をかけ，R について $(0,\infty)$ で積分すると $\varphi_n(R)$ の正規直交性より次式が得られる。

$$\frac{\lambda}{\lambda_m}\int_0^A\varphi_m(P)\varphi(P)\,dP=\int_0^{\infty}\varphi(R)\varphi_m(R)\,dR \tag{46}$$

上式右辺は (45)式の $a_m$ にほかならない。よって $m$ を $n$ に置きかえると次式が成り立つ。

$$\frac{\lambda}{\lambda_n}\int_0^A\varphi_n(P)\varphi(P)\,dP=a_n \tag{47}$$

上式左辺に (44)式を代入すると次式が得られる。

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda_n}\alpha_{nm}a_m=a_n\quad,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{48}$$

$$\alpha_{nm}=\int_0^A\varphi_n(P)\varphi_m(P)\,dP \tag{49}$$

特に $A\to\infty$ のとき $\alpha_{nm}\to\delta_{nm}$ であるから $\lambda\to\lambda_n$ となり前述した結果が得られる。(48)式を書きかえると

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\alpha_{nm}-\delta_{nm}\right)a_m=0\,,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{50}$$

となる。上式が $a_m=0$, $m=0,1,2,\cdots$ 以外の解をもつためには

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\alpha_{nm}-\delta_{nm}\right)=0 \tag{51}$$

であることが必要であり，第一近似として次式

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{\lambda_0}\alpha_{00}-1 & \frac{\lambda}{\lambda_0}\alpha_{01} \\ \frac{\lambda}{\lambda_1}\alpha_{10} & \frac{\lambda}{\lambda_1}\alpha_{11}-1 \end{vmatrix}=0 \tag{52}$$

より固有値 $\lambda$ を求める。上式より

$$\frac{\Delta}{\lambda_0\lambda_1}\lambda^2-\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)\lambda+1=0\,,\quad \Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{vmatrix} \tag{53}$$

が得られ，よって

$$\lambda=\frac{\lambda_0\lambda_1}{2\Delta}\left[\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)^2-\frac{4\Delta}{\lambda_0\lambda_1}}\right] \tag{54}$$

が得られる。特に $A\to\infty$ のとき $\alpha_{00}, \alpha_{11}, \Delta\to 1$ であるから上式は

$$\lambda(\text{下符号})\to\lambda_0\,,\quad \lambda(\text{上符号})\to\lambda_1 \tag{55}$$

となる。よって (54) 式の複号のうち下符号の

$$\lambda_{(0)}\equiv\frac{\lambda_0\lambda_1}{2\Delta}\left[\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)-\sqrt{\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)^2-\frac{4\Delta}{\lambda_0\lambda_1}}\right] \tag{56}$$

が有限開口ビーム導波系の 0 モードの近似的固有値を，また上符号の

$$\lambda_{(1)}\equiv\frac{\lambda_0\lambda_1}{2\Delta}\left[\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)+\sqrt{\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)^2-\frac{4\Delta}{\lambda_0\lambda_1}}\right] \tag{57}$$

が 1 モードの近似的固有値を与えることがわかる。また固有値 $\lambda$ の第二近似値は次の三次方程式の根で与えられる。

$$u\lambda^3-v\lambda^2+w\lambda-1=0 \tag{58}$$

$$u=\frac{1}{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}\left(\alpha_{00}\alpha_{11}\alpha_{22}+2\alpha_{01}\alpha_{12}\alpha_{20}-\alpha_{00}\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{20}^2-\alpha_{22}\alpha_{01}^2\right)$$

$$\left.\begin{aligned} U &= \left(\frac{\alpha_{00}\alpha_{11}-\alpha_{01}^2}{\lambda_0\lambda_1}\right)+\left(\frac{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2}{\lambda_1\lambda_2}\right)+\left(\frac{\alpha_{22}\alpha_{00}-\alpha_{20}^2}{\lambda_2\lambda_0}\right) \\ W &= \frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}+\frac{\alpha_{22}}{\lambda_2} \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

すなわち第二近似をおこなうと三つの近似的固有値 $\lambda_{(0)}, \lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ が得られる。なお $A \gg 1$ のとき，これらの固有値は $A \to \infty$ のときの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とはわずかしか異ならないと考えられるから

$$\lambda_{(i)} = \lambda_i(1+\delta_i), \quad |\delta_i| \ll 1, \quad i = 0, 1, 2 \quad (60)$$

とおき，上式を (58)式の方程式に対する根と係数の関係式に代入して $\delta_i$ の二次以上の項を無視すると $\delta_i$ は次式の解で与えられる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_0(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1(\lambda_2+\lambda_0) & \lambda_2(\lambda_0+\lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1/U\lambda_0\lambda_1\lambda_2)-1 \\ (V/U)-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2) \\ (W/U)-(\lambda_0\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_0) \end{bmatrix} \quad (61)$$

有限開口ビーム導波系の $n$ モードに対する，吸収板一枚あたりのパワーの損失を $P_{(n)}$ (db) とすると

$$P_{(n)} = -10 \log_{10} |1/\lambda_{(n)}|^2 \quad (62)$$

である。第一近似で求めた共焦点系での $P_{(0)}, P_{(1)}$ を次ページの図4に，また，この図から $P_{(1)} - P_{(0)}$ を求めた結果を図5に示す。図5をみると，$\alpha \neq 0$ のときの $P_{(1)} - P_{(0)}$ は $\alpha = 0$ のときのそれより大きく，ガウスフィルターが姿態分離作用をもっていることがわかる。また図6には $\alpha = 0$ のときの非共焦点系 ($\beta \neq 1$) での $P_{(0)}, P_{(1)}$ を示す。この図より，レンズ間隔が $d = 2f$ から $d = 2.5f, 1.5f$ へ ±25% 変化しても回折損失はわずかしか増加しないことがわかる。よって共焦点系からの設置誤差程度の変化による回折損失の増加は無視できる。またレンズ間隔を共焦点系でのそれよりある程度

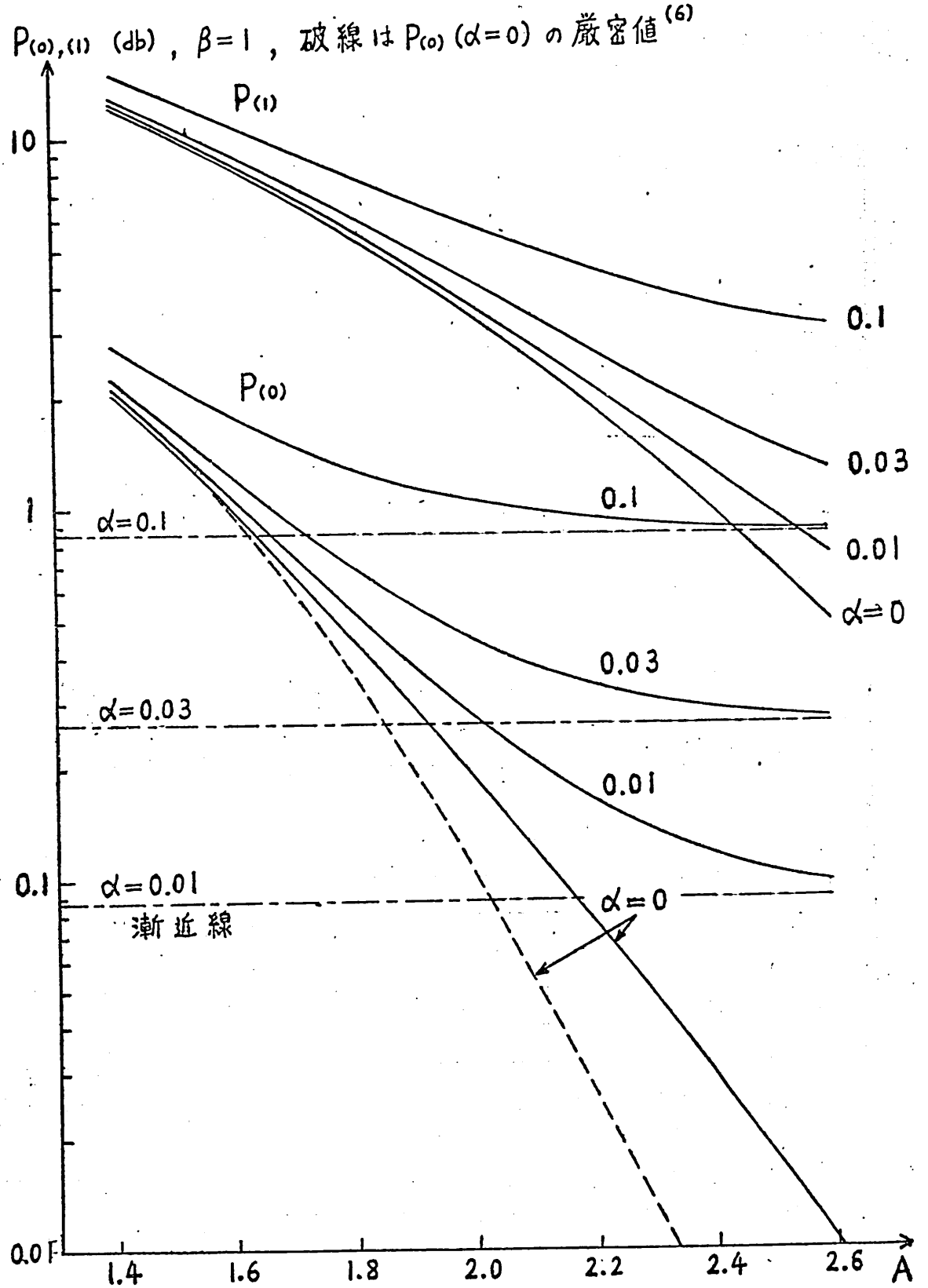



図 4　有限開口共焦点系での 0,1 モードに対する
吸収板一枚あたりのパワーの損失量

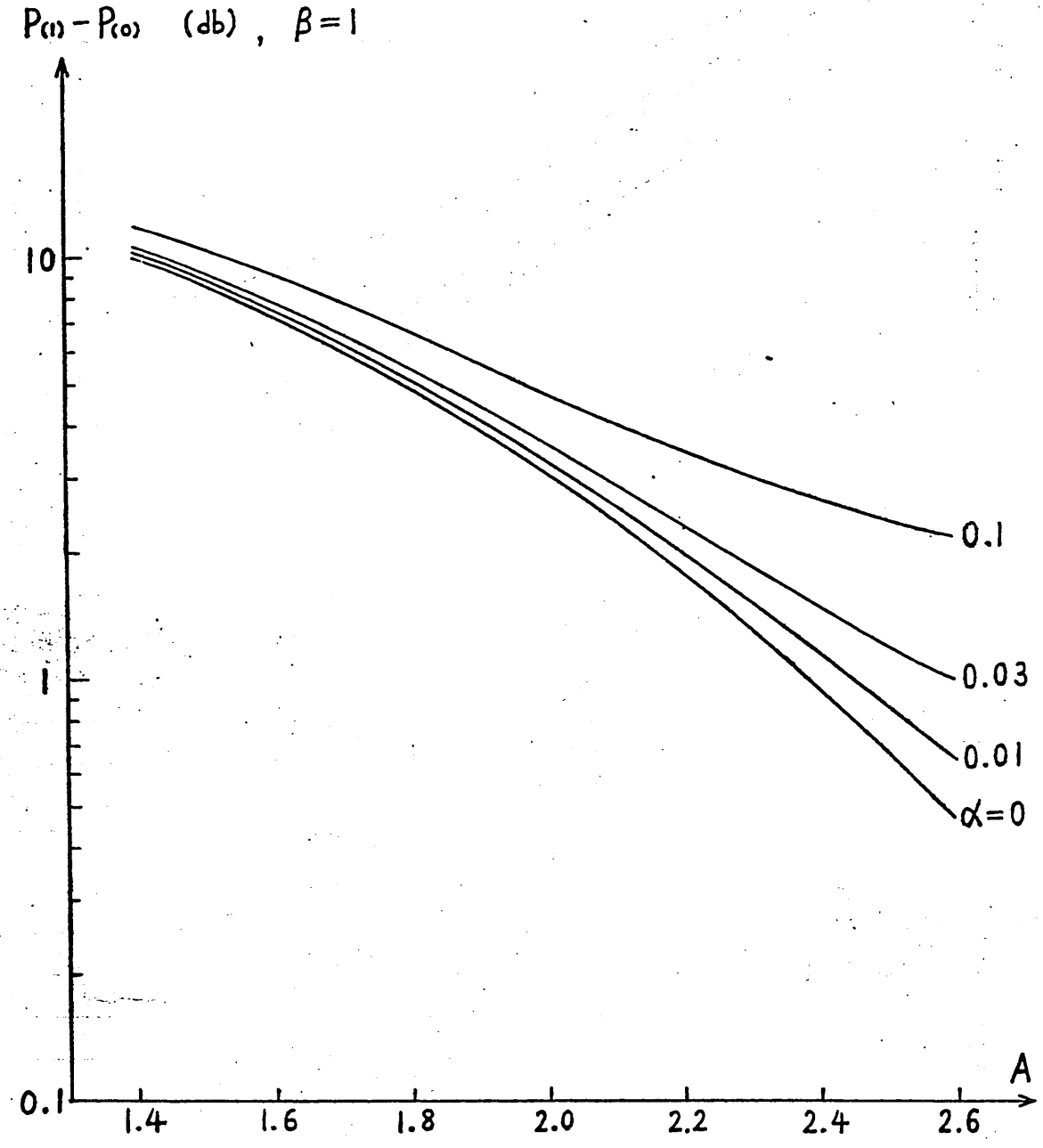



図 5　　α , A の変化による $P_{(1)} - P_{(0)}$ の変化

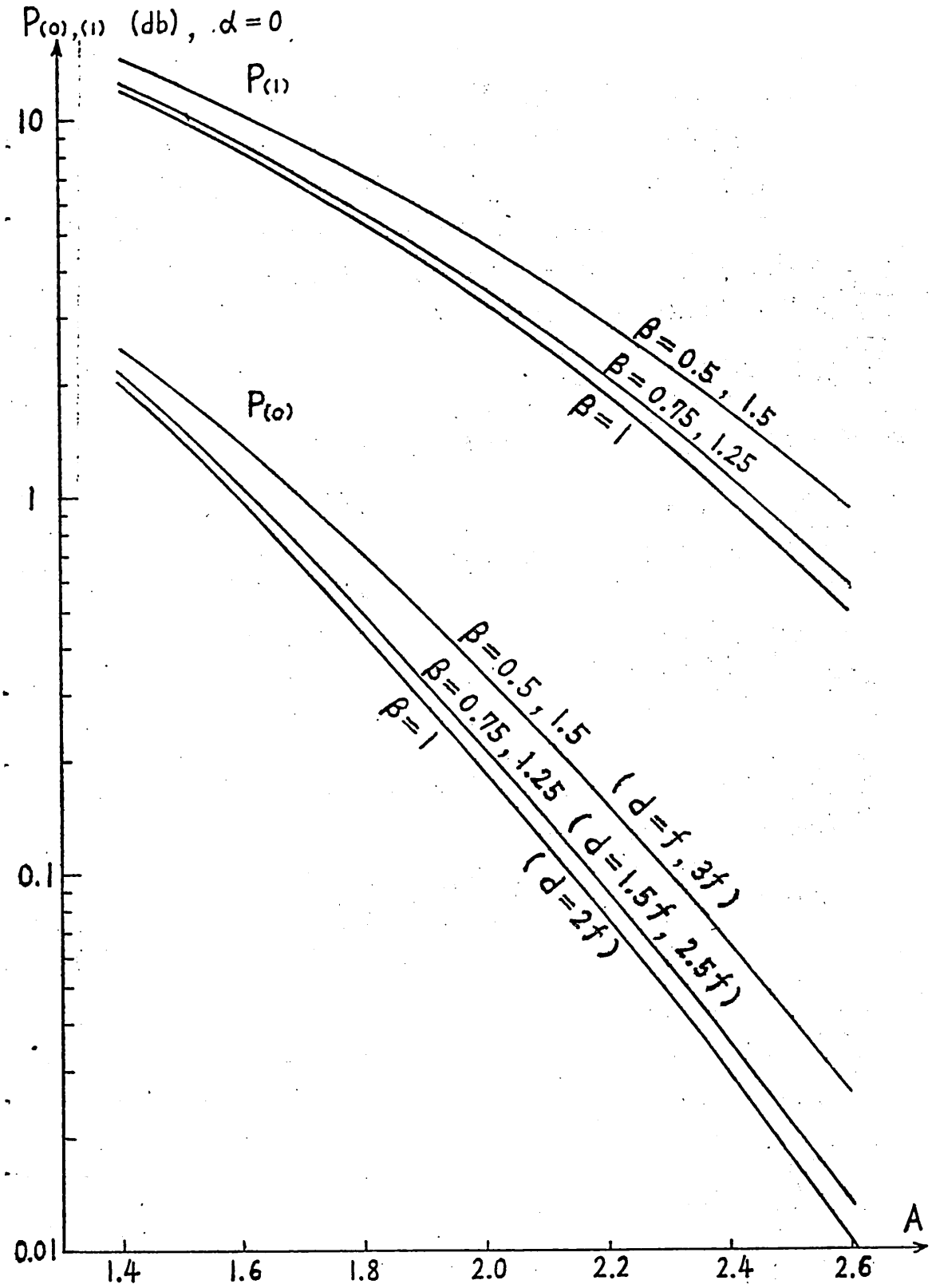



図6　ガウスフィルターを用いない有限開口非共焦点系での
0,1モードに対する吸収板一枚あたりのパワーの損失量

大きくすることにより，一定の距離間ビーム波を伝送するのに必要なレンズ枚数を少なくすることができ，したがってまた，回折損失よりはるかに大きなレンズ表面による反射損失を減らしてビーム導波系全体の損失を減らすことができる。なお図4での破線は文献(6)で得られた，$\alpha=0$，$\beta=1$のときの$P_{(0)}$の厳密な計算値である。ここで参考までにガウスフィルターの透過特性$|T(R)|$の$R=A$での値

$$|T(A)|=e^{-\alpha A^2},\quad A=\sqrt{\frac{\pi}{d}}a \tag{63}$$

の，$\alpha$および$A$を変えたときの数値を下表に示しておく。

表1　$\alpha$，$A$の種々な値に対する$|T(A)|$の値

| A ＼ α | 0.01 | 0.03 | 0.05 | 0.1 | 0.2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.5 | 0.978 | 0.935 | 0.894 | 0.799 | 0.638 |
| 2.0 | 0.961 | 0.887 | 0.819 | 0.670 | 0.449 |
| 2.5 | 0.939 | 0.829 | 0.732 | 0.535 | 0.287 |
| 3.0 | 0.914 | 0.763 | 0.638 | 0.407 | 0.165 |

本文で得られた有限開口ビーム導波系における0モードの近似的固有値$\lambda_{(0)}$を再び記すと

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{(0)}&=\frac{\lambda_0\lambda_1}{2\Delta}\left[\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)-\sqrt{\left(\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0}+\frac{\alpha_{11}}{\lambda_1}\right)^2-\frac{4\Delta}{\lambda_0\lambda_1}}\right]\\ \Delta&=\begin{vmatrix}\alpha_{00}&\alpha_{01}\\ \alpha_{10}&\alpha_{11}\end{vmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

である。上式は$\Delta$を

$$\Delta\simeq\alpha_{00}\alpha_{11} \tag{65}$$

で近似すると

$$\frac{1}{\lambda_{(0)}}\simeq\frac{\alpha_{00}}{\lambda_0} \tag{66}$$

となる。上式に$\alpha=0$のときの$\lambda_0^{-1}$，$\alpha_{00}$すなわち

$$\frac{1}{\lambda_0}=je^{-jkd}\left[\sqrt{2\beta-\beta^2}+j(\beta-1)\right],\quad \alpha_{00}=1-e^{-\sqrt{2\beta-\beta^2}A^2} \tag{67}$$

を代入すると

$$\frac{1}{\lambda_{(0)}} \simeq j[\sqrt{2\beta-\beta^2}+j(\beta-1)][1-e^{-\sqrt{2\beta-\beta^2}A^2}]e^{-jkd} \tag{68}$$

となり，さらに文献(4)で用いられたパラメーター $g$, $T$ すなわち

$$g \equiv 1-\beta, \quad T \equiv \sqrt[4]{1-g^2}A \tag{69}$$

を用いると

$$\frac{1}{\lambda_{(0)}} \simeq (g+j\sqrt{1-g^2})(1-e^{-T^2})e^{-jkd}$$
$$= e^{j\cos^{-1}g}(1-e^{-T^2})e^{-jkd} \tag{70}$$

となる。上式は $e^{-jkd}$ を除いて文献(4)の(41)式にほかならない。上式に含まれる $T^2$ は(69)式より

$$T^2 = A^2\sqrt{1-g^2} = A^2\sqrt{\beta(2-\beta)} \tag{71}$$

であるが，上式に $A^2 = ka^2/d$ , $\beta = d/2f$ を代入し，さらに Boyd, Gordon の論文[8]で用いられたパラメーター $a'$, $b'$ (ビーム導波線路に等価な共振器を形成する鏡面の開口半径および曲率半径であり，今の場合 $a'=a$, $b'=2f$ である)を用いると次式のようになる。

$$T^2 = \frac{2\pi a'^2}{d\lambda}\left[2\frac{d}{b'} - \left(\frac{d}{b'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{72}$$

文献(4)で指摘されているように，上式右辺の量は $2\pi$ を除いて文献(8)の(29)で与えられる量，すなわち非共焦点共振器(またはそれに等価な非共焦点系ビーム導波線路)の回折損失を近似的に定める量である。

## 4. 界分布再生のための条件およびそれに関連したガウスフィルターの働き

前節での解析の出発点は，$(m-1)$ 番目の吸収板直前の界分布が定数倍を除いて $m$ 番目の吸収板直前で再生される状態にあると仮定したことにあった。本節ではこの仮定が成り立つための条件について考察する。ただし開口の有限性を考慮すると考察が困難になるので，回折積分の上限を無限大で近似した場合について検討する。このことは前節で定義した

有限開口ビーム導波系の近似的第n固有姿態波すなわちnモードが形成されるための条件について検討することであるが以下では特に共焦点系において0モードが形成されるための条件を求め，その条件がみたされないときのガウスフィルター働きについて述べる。

共焦点系($\beta=1$)における0モードは(37),(38),(41)式より次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_0(R) &= \sqrt{2\sqrt{\alpha^2+1}}\, e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha+j)R^2} \quad (\text{吸収板直前}) \\ \mathfrak{T}_0^t(R) &= \sqrt{2\sqrt{\alpha^2+1}}\, e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha-j)R^2} \quad (\text{吸収板直後}) \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

今，0番目の吸収板直後の界分布$\mathfrak{T}_0^t(R)$(0モードの意味ではない)が次式で与えられるものとする。

$$\mathfrak{T}_0^t(R) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_0^2}-j\right)R^2} \tag{74}$$

このとき1番目の吸収板直前の界分布$\mathfrak{T}_1(R)$は(8)式より次式で与えられる。

$$\mathfrak{T}_1(R)\sqrt{R} = \int_0^A K(P,R)\,\mathfrak{T}_0^t(P)\sqrt{P}\,dP \tag{75}$$

上式を，$|\mathfrak{T}_0^t(P)| \ll 1$，$A<P<\infty$ と仮定して次式で近似する。

$$\mathfrak{T}_1(R)\sqrt{R} \simeq \int_0^\infty K(P,R)\,\mathfrak{T}_0^t(P)\sqrt{P}\,dP \tag{76}$$

上式右辺に(9),(74)式を代入して積分公式(7)を用いると次式が得られる。

$$\mathfrak{T}_1(R) = CW_0^2 e^{-\frac{1}{2}(W_0^2+j)R^2} \tag{77}$$

1番目の吸収板直後の界分布$\mathfrak{T}_1^t(R)$は共焦点系($\beta=1$)を考えているから次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1^t(R) &= \mathfrak{T}_1(R)\, e^{-(\alpha-j)R^2} = CW_0^2 e^{-\frac{1}{2}(W_0^2+2\alpha-j)R^2} \\ &\equiv CW_0^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_1^2}-j\right)R^2}, \quad \frac{1}{W_1^2} \equiv W_0^2+2\alpha \end{aligned} \tag{78}$$

以上の計算をくり返すと一般にm番目の吸収板直前，直後の界分布$\mathfrak{T}_m(R)$ $\mathfrak{T}_m^t(R)$は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \Psi_m(R) &= C^m\left[\prod_{l=0}^{m-1} W_l^2\right] e^{-\frac{1}{2}(W_{m-1}^2+j)R^2} \\ \Psi_m^t(R) &= C^m\left[\prod_{l=0}^{m-1} W_l^2\right] e^{-\frac{1}{2}(W_m^{-2}-j)R^2} \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

$$W_m^2 = \frac{1}{2\alpha + W_{m-1}^2}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \quad (80)$$

上式に関して

① $\alpha = 0$, $W_0^2 = 1$, のとき次式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{m+1}(R) &= C\Psi_m(R), \quad m = 1, 2, 3, \cdots \\ \Psi_{m+1}^t(R) &= C\Psi_m^t(R), \quad m = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

すなわち隣り合った吸収板の間で界分布が再生される。

② $\alpha = 0$, $W_0^2 \neq 1$ のとき次式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{m+1}(R) &= C^2\Psi_{m-1}(R), \quad m = 2, 3, 4, \cdots \\ \Psi_{m+1}^t(R) &= C^2\Psi_{m-1}^t(R), \quad m = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

すなわち吸収板一枚おきに界分布が再生される。

③ $\alpha \neq 0$ のとき界分布は再生されず, $\sigma$ を $m$ によらない定数として次式

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{m+1}(R) &\simeq \sigma\Psi_m(R), \quad m \geq M \\ \Psi_{m+1}^t(R) &\simeq \sigma\Psi_{m+1}^t(R), \quad m \geq M-1 \end{aligned}\right\} \quad M \geq 1 \quad (83)$$

が成り立つための条件, すなわち M番目の吸収板以後, 近似的に界分布が再生されるための条件は上式と(79)式より

$$W_m^2 \simeq W_{m-1}^2, \quad CW_m^2 \simeq \sigma \quad (84)$$

である。かりに

$$W_m^2 = W_{m-1}^2 \equiv W^2, \quad m > M \quad (85)$$

が成り立つとすれば上式と(80)式より

$$W^4 + 2\alpha W^2 - 1 = 0 \quad (86)$$

$$\therefore W^2 = \sqrt{\alpha^2+1} - \alpha, \quad W^{-2} = \sqrt{\alpha^2+1} + \alpha \quad (87)$$

が得られ，この式と(79)，(85)式より

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_m(R) &= C^m(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha)^m e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha+j)R^2}, \quad m \geq M \\ \mathfrak{T}_m^t(R) &= C^m(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha)^m e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha-j)R^2}, \quad m \geq M-1 \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

であるから，振幅を除いて(73)式の0モードが得られることがわかる。なおこのとき

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_{m+1}(R) &= C(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha)\mathfrak{T}_m(R), \quad m \geq M \\ \mathfrak{T}_{m+1}^t(R) &= C(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha)\mathfrak{T}_m^t(R), \quad m \geq M-1 \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

である。以上の考察から明らかになったことは(74)式のようなガウス分布励振がおこなわれたとき1番目の吸収板以後ただちに界分布が再生されるための条件が $\alpha=0$，$W_0^2=1$ であることであり，$W_0^2 \neq 1$ なる励振がおこなわれたとき，$\alpha=0$，$\alpha \neq 0$ のいずれの場合にも界分布は隣り合った吸収板の間では再生されないことである。しかし $W_0^2 \neq 1$ の場合，$\alpha=0$ のときは初期状態がいつまでもくり返されるのみであるのに対し，$\alpha \neq 0$ のときは近似的にではあるが界分布が再生される。なぜならこのとき(80)式の連分数は(87)式に示したような極限値をもつからである。このことを数値的に検討するために $W_0^2=0.81$ の場合について $100\times(W_m-W)/W$ (%) および $\prod_{l=0}^{m-1} W_l^2$ の $m$ による変化を $\alpha$ をパラメーターとして求めた結果を図7および図8に示した。これらのグラフより一般にビーム導波系は $\alpha$ の大きな，すなわちガウス分布の広がりの小さなガウスフィルターを用いるほど，少ないレンズ枚数で定常状態に達することがわかる。

## 5. むすび

以上の解析で次の諸点が明らかになった。

1. ガウスフィルターは姿態分離作用をもっており，ガウス分布で与えられる振幅透過特性の広がりを小さくするほど，この作用は大きくなる。
2. ガウス分布の広がりの小さなガウスフィルターを用いるほど，任意のガウス分布励振に対し，より少ないレンズ枚数で定常状態に達する，すなわち伝送すべき基本モードが形成される。
3. 非共焦点系での回折損失を求めた結果，レンズ間隔が共焦点系での

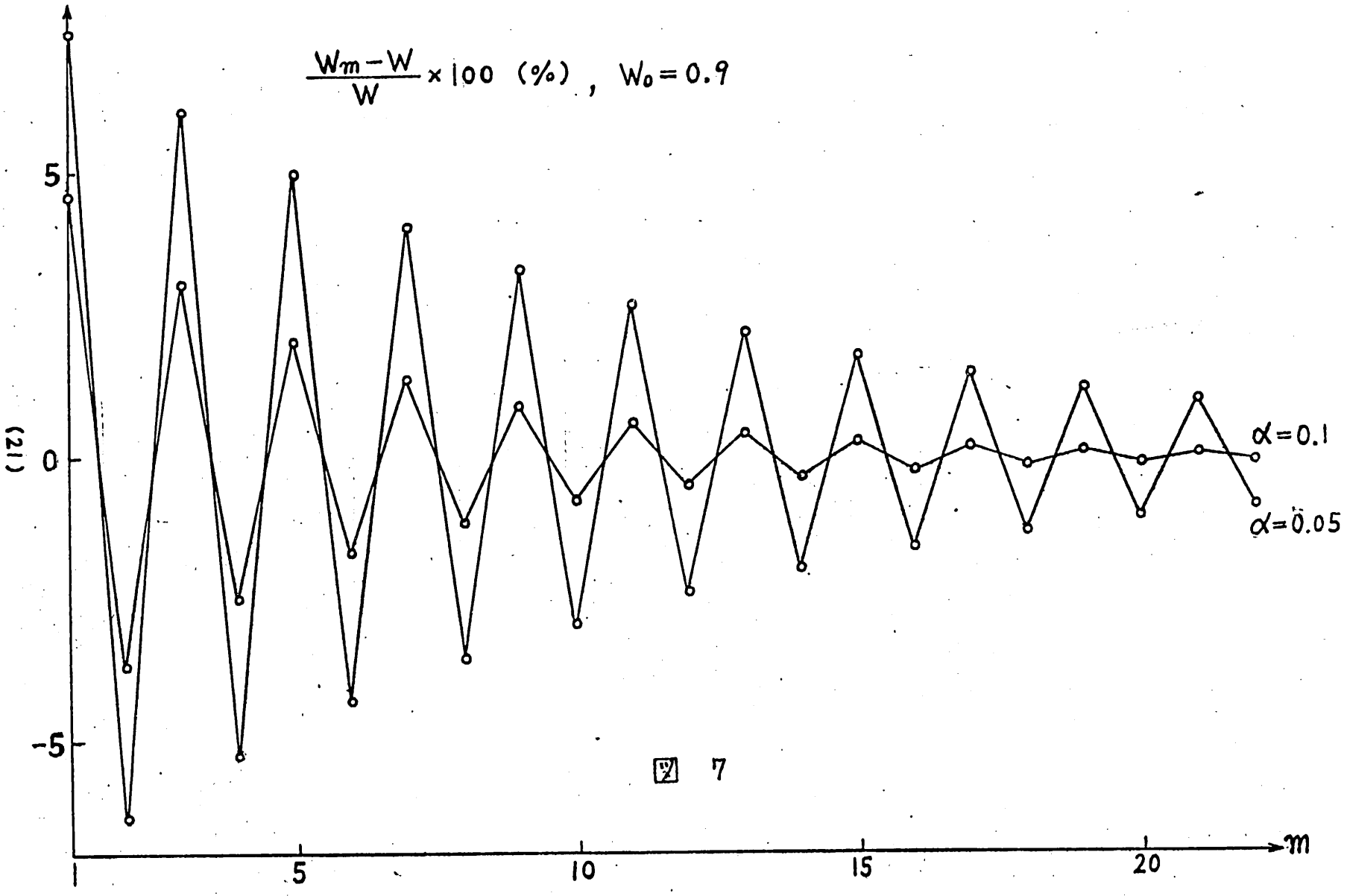



図 7

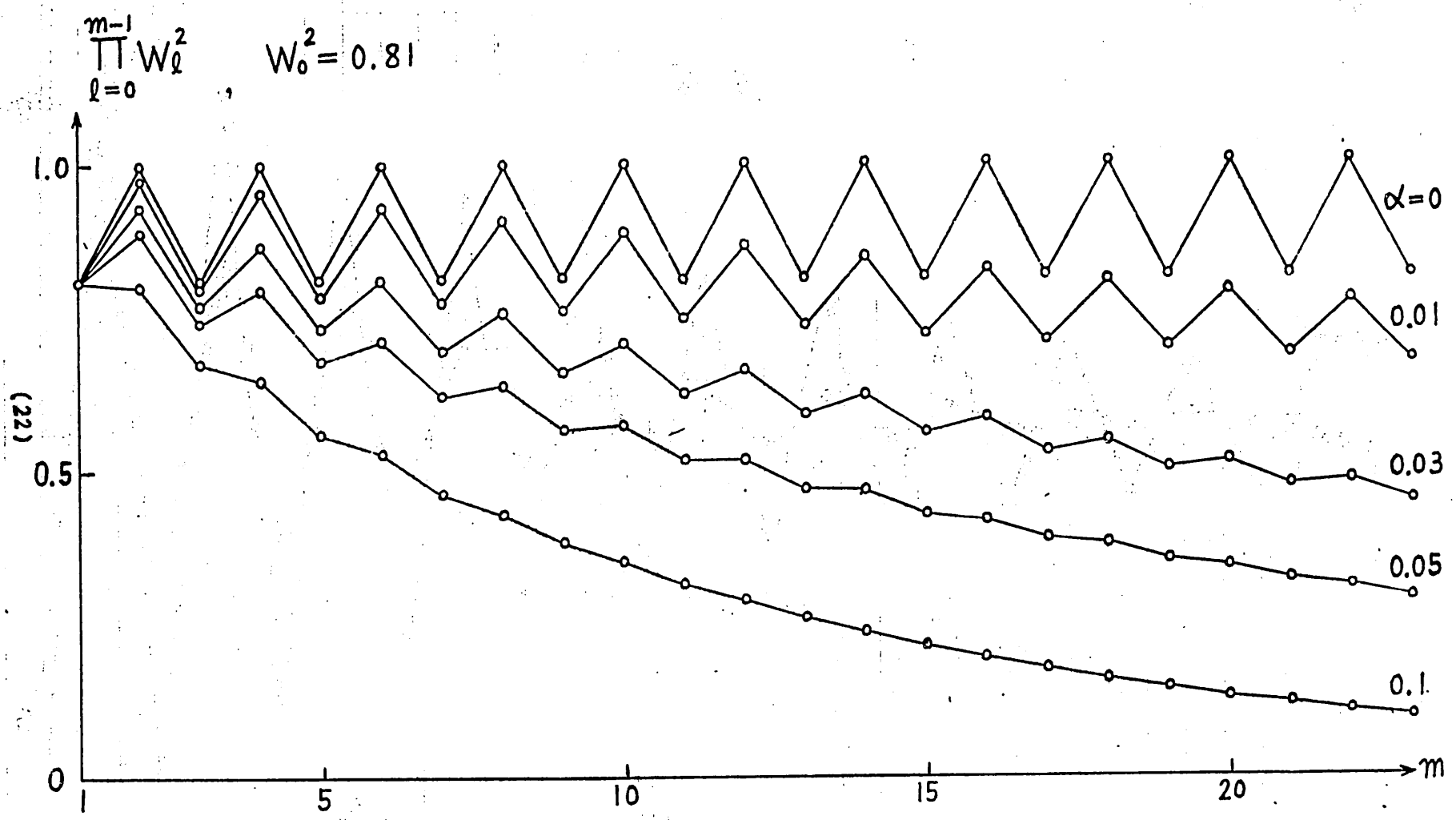



図 8

それから ±25% 程度大きく変化しても回折損失の増加はそれほど顕著でなく，特に共焦点系からの設置誤差程度の変化による回折損失の増加は無視できる。

## 参考文献


(1) 末松，伊賀，長嶋，北野："ガウスモードフィルタ(GMF)とレンズを併用した光ビーム導波系"，信学全大 537 (昭42-10)

(2) 末松，伊賀，北野，長嶋："ガウスモードフィルタとレンズを併用した光ビーム導波系の伝送姿態"，マイクロ波研究会資料 (昭42-10)

(3) 植垣，熊谷："ガウス絞りを含む共焦点共振器"，輻射科学研究会資料 (昭42-12)

(4) 米山，西田："Beam Waveguide 解析の一方法"，マイクロ波研究会資料 (昭42-10)

(5) S. Silver："Microwave Antenna Theory and Design" PP. 169～175, McGraw-Hill Book Co. (1949)

(6) G. Goubau and F. Schwering："On the Guided Propagation of Electromagnetic Wave Beams", IRE Trans., AP-9, 3, P. 248 (May 1961)

(7) A. Erdely："Tables of Integral Transforms", vol. 2, P. 43, McGraw-Hill Book Co. (1954)

(8) G. D. Boyd and J. P. Gordon："Confocal Multimode Resonator for Millimeter Through Optical Wavelength Masers", Bell Syst. tech. J., P. 489 (Mar. 1961)

# 光変調された微小反射アンテナによる電界分布測定

滝山　敬
豊永俊郎　（同志社大学工学部）
三宅　勝　（日本電気KK）
堀　正彦　（同志社大学工学部）

1968年4月26日

輻射科学研究会

# 光変調された微小反射アンテナによる電界分布測定

滝山 敏 (同志社大学工学部)
豊永 俊郎
三宅 勝 (日本電気)
堀 正彦 (同志社大学工学部)

## 序言

放射源近傍の電界分布を測定する場合，従来から用いられているプローブ法ではプローブアンテナから検波器に接続してある伝送線路が被測定界を乱し，大きな測定誤差を生じる可能性が多い。本報告では近傍界の精密測定のための光変調された微小反射アンテナによる測定法に検討を加え，特に10GHz帯にて実用に供しうる微小反射アンテナにつき種々設計試作[1]を行い，更にこれを各種実際の測定に応用して[2]，この測定系の高信頼性を明らかにしたものである。

## 1. 測定原理

図1は本測定法の原理図である。Aアンテナは送信アンテナで電流源$I_1$により励振されており，Bアンテナは端子2に負荷$Z_L$を有する反射アンテナである。$V_1$, $I_1$と$V_2$, $I_2$を端子1, 2における電圧，電流とし，両アンテナの周囲の媒質が直線性であれば端子1, 2を有する

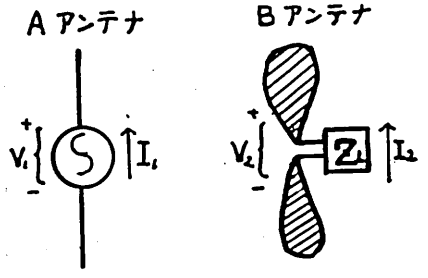



図 1

2.

四端子回路と等価と考えられる。従って

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

媒質が等方性であれば $Z_{12} = Z_{21}$ , 又

$$V_2 = -I_2 Z_L \quad (1.2)$$

である。(1.1)式と(1.2)式より $V_1$ は

$$V_1 = \left( Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_L} \right) I_1 \quad (1.3)$$

次に反射アンテナBの無い時の端子1の電圧を $V_{10}$ とすると

$$V_{10} = Z_1 I_1$$

ここに $Z_1$ は反射アンテナBの無い時のAアンテナの入力インピーダンスである。従って背部散乱電圧 $V_S$ は $V_S = V_1 - V_{10}$ で定義されているから

$$V_S = \left[ (Z_{11} - Z_1) - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_L} \right] I_1 \quad (1.4)$$

ここで反射アンテナBが十分小さくAアンテナの電界を乱さないものとすると $Z_{11} \simeq Z_1$ と考えることが出来る。したがって

$$V_S = -\left( \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_L} \right) I_1 \quad (1.5)$$

一方 $Z_{12}$ は次式によって定義出来る[3)]

$$Z_{12} = -\frac{1}{I_1 I_2} \iint \mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{J}_2 \, ds \quad (1.6)$$

ここで $\mathbb{E}_1$ は反射アンテナの無い時のその場所での電界，$\mathbb{J}_2$ はAアンテナにより反射アンテナ上に誘起される電流であり，積分は反射アンテナ表面について行なうものである。今反射アンテナが薄

い直線状で長さ $\ell$ が非常に短かいアンテナとすれば

$$Z_{12} = -E_1^t \ell / I_1 \qquad (1.7)$$

ここで $E_1^t$ は A アンテナによる反射アンテナ方向の電界成分である。(1.7)式を(1.5)式に代入すれば

$$V_S = -\left[\frac{(E_1^t)^2}{Z_{22} + Z_L}\right]\frac{\ell^2}{I_1} \propto (E_1^t)^2 \qquad (1.8)$$

即ち,反射アンテナを十分短く薄い直線アンテナとすれば,送信アンテナには反射アンテナの位置におけるアンテナ方向の電界の二乗に比例した量の電圧が現われる。この反射アンテナよりの信号は微弱である為周囲物体よりの反射電界と区別しにくい欠点がある。この為 $Z_L$ を周期的に変化させて $V_S$ に変調をかける方法が提案された。[4)5)]

吾々は被測定界を出来る限り乱さない為に光変調によつて $Z_L$ を周期的に変化する方法をとつた。[5)] 測定回路は図2の構成である。クライストロン電力は20dB結合器によつて,一方はマジックTより送信アンテナに,他方は基準信号となつて位相器をとおり検出部に入る。送信アンテナから放出された電力は反射アンテナにより再放射される際に,光変調による $Z_L$ の変化により変調され再び同一のアンテナで受信されてマジックTを通り検出部に至る。この検出部のマジックTでは基準信号

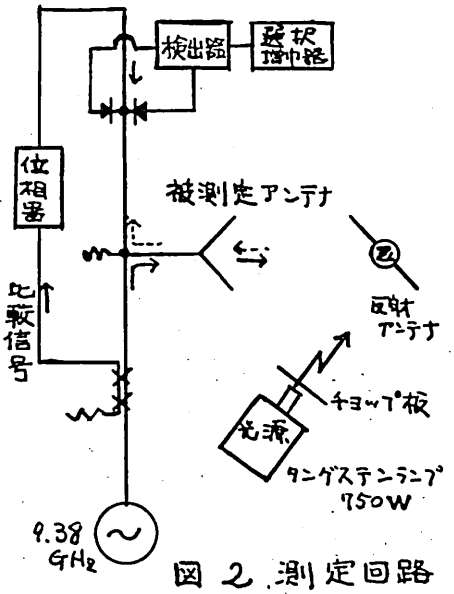



図 2. 測定回路

$E_0 \cos(\omega t+\gamma)$ と周囲物体からの反射波 $E_u \cos(\omega t+\beta)$ および変調された反射波信号 $E_s \cos(\omega t+\alpha)\, m(t)$ とが混合されマジック T の両端のクリスタルで検波される。両クリスタルに到来する信号を $E_1$, $E_2$ とすれば

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t+\gamma) + [E_u \cos(\omega t+\beta) + E_s \cos(\omega t+\alpha)\, m(t)]$$
$$E_2 = E_0 \cos(\omega t+\gamma) - [E_u \cos(\omega t+\beta) + E_s \cos(\omega t+\alpha)\, m(t)] \qquad (1.9)$$

$\omega$ はクライストロンの発振角周波数，$\alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ $E_s$, $E_u$, $E_0$ の位相角，$m(t)$ は変調関数である。検出部では $Z_L$ の変調周波数で選択増巾を行なっているから，クリスタルで二乗検波された出力電圧の変調周波数成分は

$$V_1 = \frac{1}{2} E_{as}^2 + E_0 E_s \cos(\alpha-\gamma) + E_u E_s \cos(\alpha-\beta)$$
$$V_2 = \frac{1}{2} E_{as}^2 - E_0 E_s \cos(\alpha-\gamma) + E_u E_s \cos(\alpha-\beta) \qquad (1.10)$$

検出器で $V_1$ と $V_2$ の差を取り出せば出力電圧 $V_3$ は

$$V_3 = 2 E_0 E_s \cos(\alpha-\gamma) \qquad (1.11)$$

となるが，前述のごとく $E_s \propto E_t^2$ であるから

$$V_3 = K E_0 E_t^2 \cos(2\alpha-\gamma) \qquad (1.12)$$

従って基準信号伝送路の位相器により $2\alpha=\gamma$ とすれば出力電圧が最大となり $V_3 = K E_0 E_t^2$ で $E_0$ が一定ゆえ $E_t$ が求まる。又位相器の読みより位相 $\alpha$ も直ちに得られる。

## 2. 微小反射アンテナ

### 2-1. 設計法

前述した微小反射アンテナの設計にあたっては，アンテナが被測定電界を乱さないように可能なかぎり小形でかつ感度が良いことが重要である。この為には (1.4) 式が重要な条件式となる。

(1.4)式における各インピーダンス・パラメータ $Z_{11}-Z_1$, $Z_{12}$, $Z_{22}$ は両アンテナの形状配置により定まり，反射アンテナの形状変化に対しても複雑な変化を示す。したがって これらの値と負荷インピーダンスの変化値を適当に設定することにより最適値が求まる訳である。

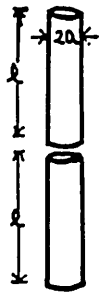


図 3

ここで(1.4)式に背部散乱断面積の概念を導入すると，図3のような円筒アンテナの背部散乱断面積はその半径 $a$，長さ $\ell$ が $\ell \gg a$ であれば近似的に次式のようになる[6]

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{900\pi}\left|(Z_{11}'-Z_1') - \frac{Z_{12}'^2}{Z_{22}'+Z_L}\right|^2 \qquad (2.1)$$

但し $Z_{11}'-Z_1'$, $Z_{12}'$, $Z_{22}'$ は $a$ と $\ell$ のみにより決定される量であり，$Z_L$ はこのダイポールに負荷したインピーダンスである。(インピーダンス・パラメータの式については文献(6)を参照されたい)

したがって $Z_L$ を変化させた時の $\sigma$ の変化中が(1.4)式の $V_3$ を示すと考えられるから使用する $Z_L$ の変化を測定し，(2.1)式を $\ell$ の変化にともなって計算すれば最適長が求まることになる。

## 2-2. 試作

$Z_L$ としてダイオード(SD46. NEC)を使用し，これにバイアスをかける為の太陽電池(SPD551. sharp)を何加して光変調素子とし前述の方法により最適長を求めた。先ず $Z_L$ として用いた太陽電池バイアスのダイオードの使用周波数 9.38 GHz でのインピーダンスが必要であるが，太陽電池には 210 Hz で4ヨップされている光が当るので

その過渡特性を求める必要がある。その為ダイオードを同軸線路内に装荷して，この定在波をブラウン管上に画き，各時間に対する定在波比を測定する方法でインピーダンスを求めた。7)
なお，太陽電池は 9.38 GHz にては高インピーダンスを示し，この影響は無視している。その結果を図4に示す。これより過渡値を含めて7点のインピーダンスを求め(2.1)式に代入してのアンテナ長に対する変化を計算した。そのうちでのが最大，最小となる $Z_L$ についての変化を示したものが図5であり，この中が変調度と考えられる。

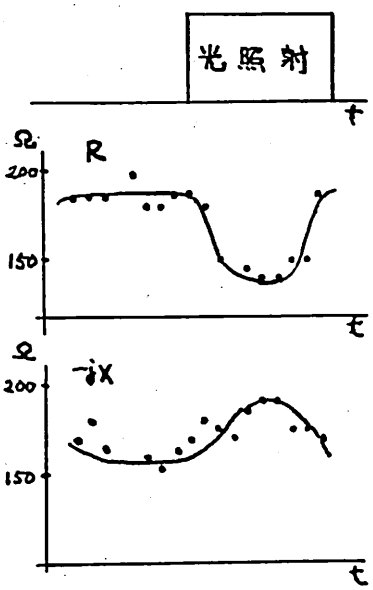


図 4 インピーダンス変化

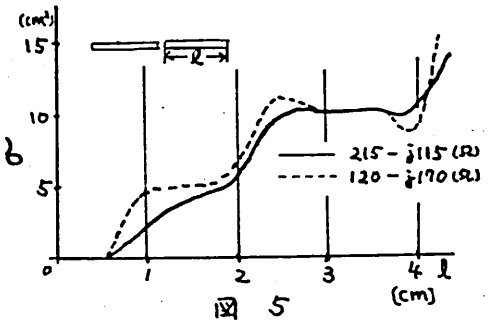


図 5

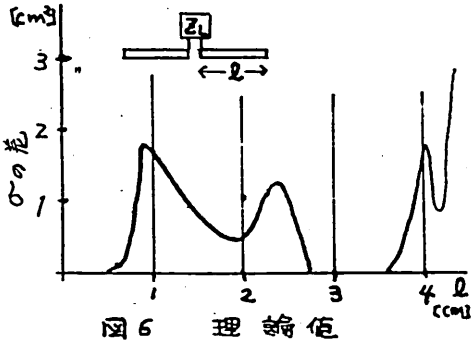


図 6 理論値

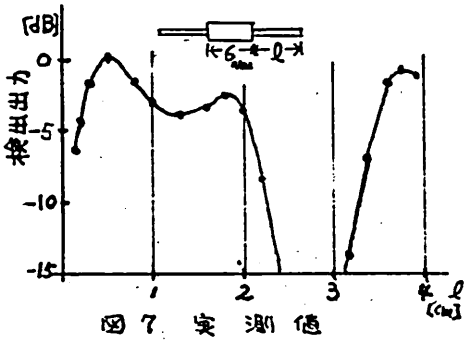


図 7 実測値

図6にはこの二曲線の差を示す。図7はこのアンテナ長を実際に変化させて受信出力を実験的に求めたものである。図6と比較すると3mm位の差で傾向がよく一致しているが，この3mmは図に示すようにダイオードのガラス封入部分が約6mmであるので，これを考えに入れるとこの設計法が正しいことがわかる。

微小反射アンテナとしては前述したダイオードと太陽電池の組合せの他にバラクタと太陽電池及びCdSを用いたものを試作した。図8はこの二種のアンテナの長さの変化に対する感度を実験的に求めたものである。これに前述のを加えた三種のアンテナの比較を表1に示す。

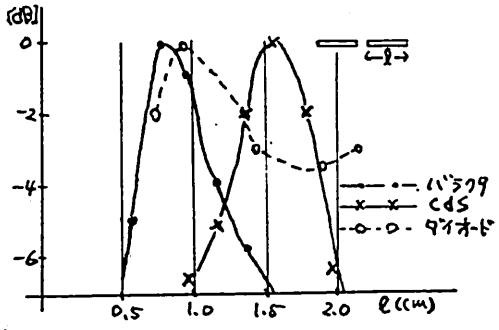



図8

| ZL | 反射アンテナ全長 線径 | 相対感度 | |
|---|---|---|---|
| ダイオード 太陽電池 | 1.8cm 0.5mm | 0 (dB) | ダイオード NEC SD-46 |
| バラクタ 太陽電池 | 1.6cm 0.8mm | -1.5 (dB) | バラクタ AEL 1000X |
| 光導電セル (CdS) | 3.3cm 0.8mm | -3.1 (dB) | CdS ナショナル SPR22 |
| | 2.3cm 0.8mm | -5.8 (dB) | |

太陽電池 シャープ SPD55T

表1

これより ZL としてダイオードヌはバラクタと太陽電池を使用すれば全長は約 λ/2 になり十分実用に耐える大きさであると考えられる。又太陽電池の大きさは 3×5mm であるのでアンテナへの取付け位置や角度による影響が考えられるが，実験の結果では影響は認められなかった。　又 CdS を ZL として用いると時定数が大きいので光変調周波数や光の明暗時の割合によって感度が変化する。この影響を測定したのが図9.10で，図9には変調周波数による出力の変化，図10には光照射時間の変化に対する出力変化

を示す。図9によれば変調周波数は低い程良いことになるが，実際はノイズや増巾器の特性で余り低い周波数は使用出来ない。又図10より明暗の割合は大体1:1でないことがわかる。以上より吾々は210Hzで1:1の割合の変調で使用している。なお太陽電池は時定数が小さいのでこのような考慮は不用であり，それは図4からも明らかである。

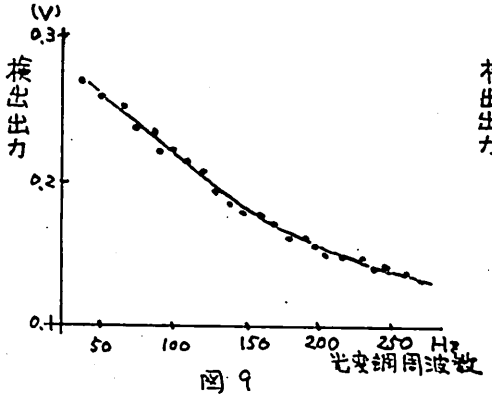


図9

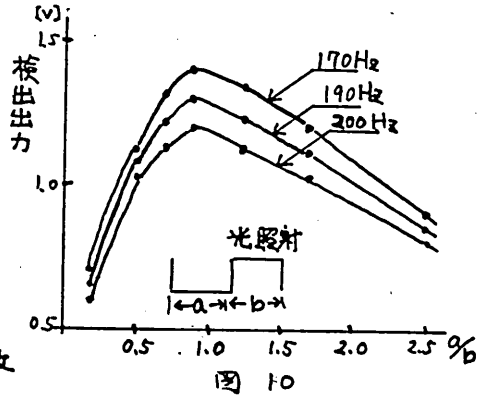


図10

## 3. 測定例

前述の試作アンテナのうち高感度の得られたダイオード反射アンテナを用いて測定系の精度検査を兼ねて種々の測定を行った。

### 3-1. 金属板による反射

電磁波が金属板により反射し完全定在波の立っている状態を測定したのが図11.12である。図13に示すようにホーンアンテナ前方1mにアルミ板をおき，ホーンアンテナの中心軸上をアルミ板より $\lambda/2$ の位置から測定したものであり周波数は9.38GHzである。図11.12はこの測定法が被測定電界を乱さない精度の高い測定法であることを示している。

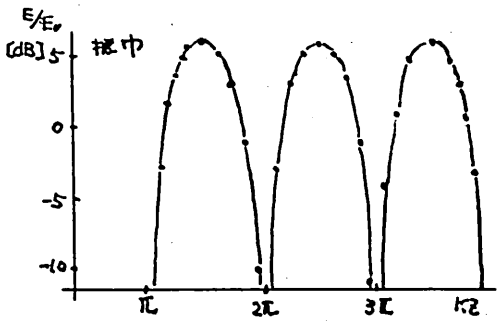


図 11

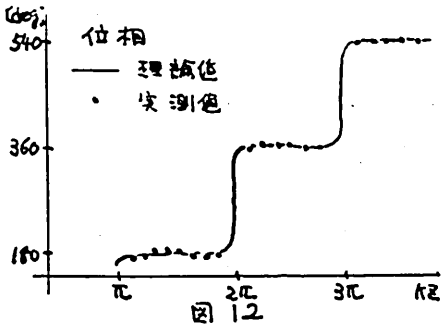


図 12

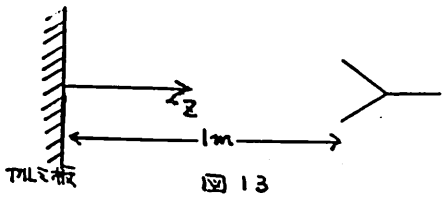
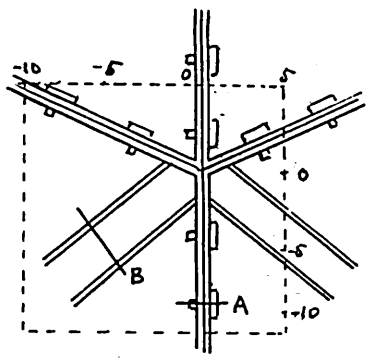


図 13

## 3-2. レドーム近傍の電界分布測定

実用測定の一例としてレーダーレドーム近傍の電界分布測定を行なった。レドームは図14に示すように断面A, Bの支骨部を有する強化プラスチック製である。　測定はホーンアンテナ前方80cmにレドームを置き，その後方約



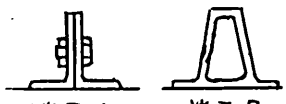



図 14

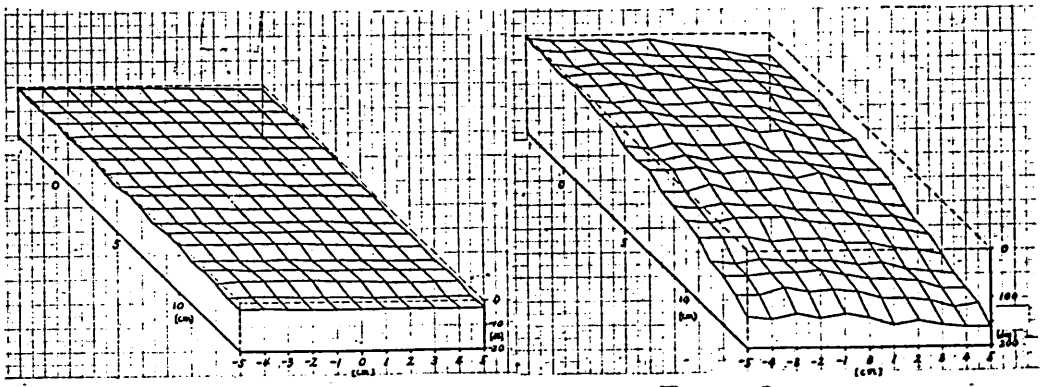
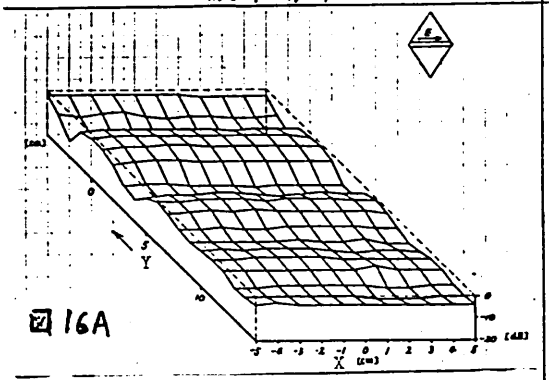
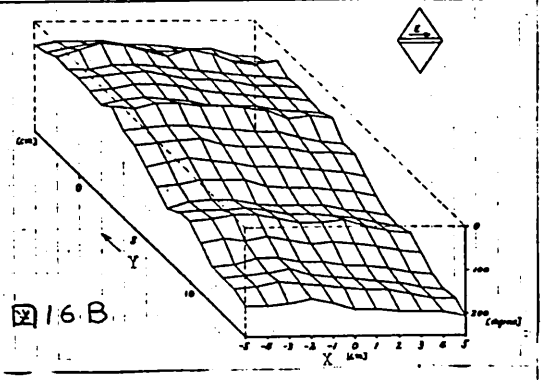
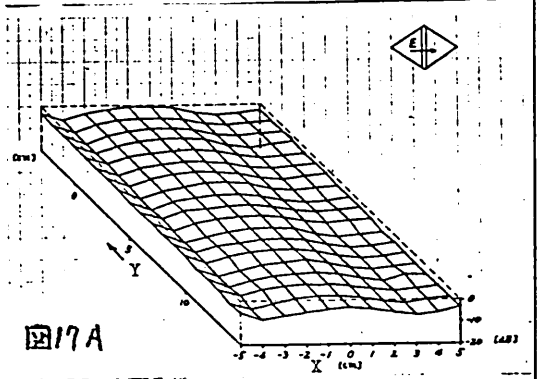
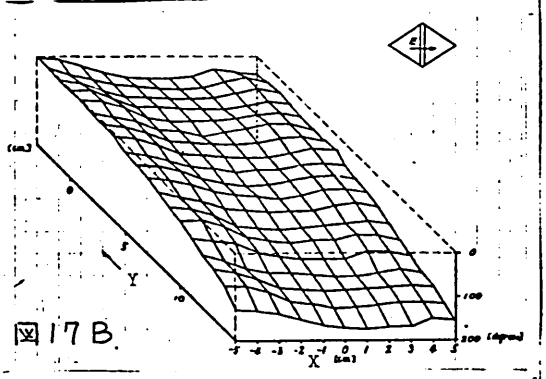
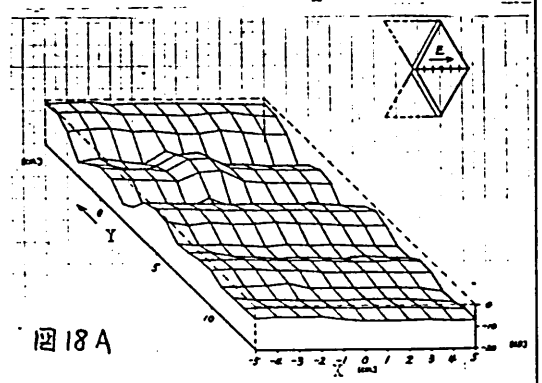
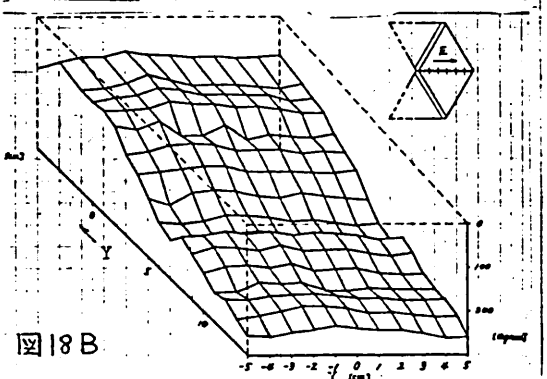
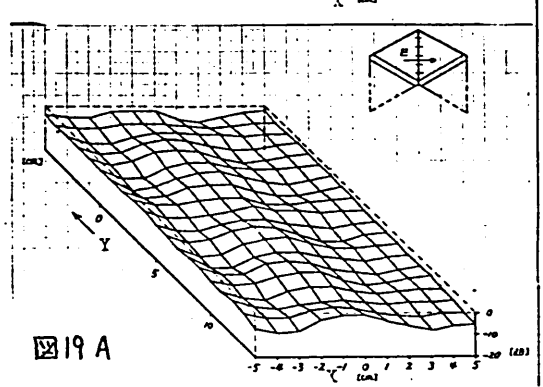
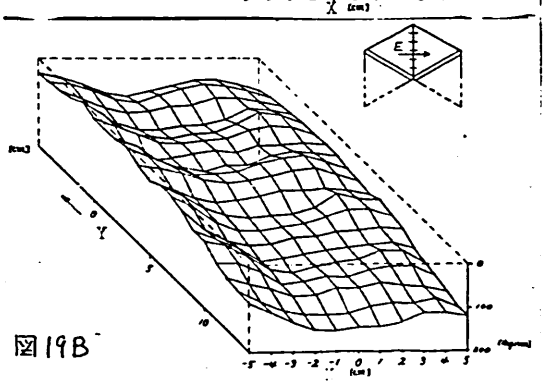


図 15 A　　図 15 B

| 振巾分布 | 位相分布 |
| --- | --- |
|  |  |
| 図16A | 図16B |
|  |  |
| 図17A | 図17B |
|  |  |
| 図18A | 図18B |
|  |  |
| 図19A | 図19B |

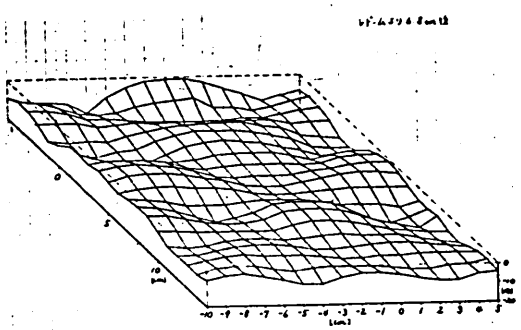


図 20 A

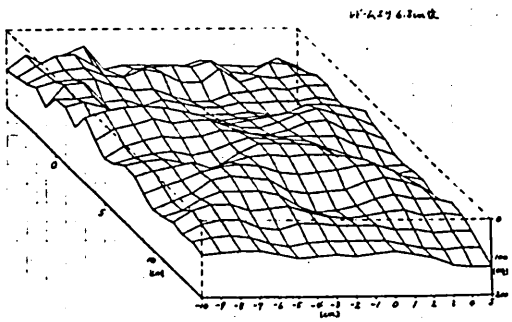


図 20 B

5cmの所で電界を測定した。図15 A·B はこの位置でのレドームが無い時の電界の振巾と位相で，位相は球面波的であるが，振巾はほゞ一定とみなしうる。図16 A·B より図19 A·B までにはA·B断面に電界が平行·垂直に当った時の振巾·位相を示す。これらは支骨後方に電界の集中が起り，それにともなって位相が遅れていることを示しており，支骨部分によりレンズ効果が生じていることがわかる。又同じ支骨でも電界が垂直より平行に入射する方が大きな影響を受けることがわかる。図20 A·Bはこれらを組合せた図14のパネル後方の電界の振巾·位相で，図16～19での分布の合成されたパターンが見られる。

3-3. 近傍電界分布よりアンテナ指向性の推測

一般にアンテナ指向性の計算は開口面上の電磁界分布を仮定して行なわれるが，これでは壁面電流や工作精度による乱れ等が考えられないので誤差の原因になっている。ところが前述したように本測定法では近傍電界の精度の高い測定が可能であるから，これより遠方界が推定出来ることになる。

考え方を簡単にする為に二次元に限って考えると，放射源から外方へ伝搬する波のMaxwellの方程式の解は，図21の座標系においては

$$E(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z_n(kr)\exp(jn\phi) \qquad (3.1)$$

と表わされる。 $Z_n(kr)$ は適当なベッセル関数であるが，Z方向偏波に対しては $H_n^{(2)}(kr)$ を，又φ方向偏波に対しては $H_n^{(2)\prime}(kr)$ を用いる。 即ち

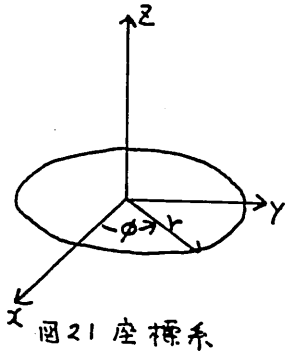


図21 座標系

$$E_\phi(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(2)\prime}(kr)\exp(jn\phi) \qquad (3.2)$$

$r=b$ 上において $E\phi$ が測定出来たとすれば

$$E_\phi(b,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(2)\prime}(kb)\exp(jn\phi) \qquad (3.3)$$

フーリエ変換を行なうと

$$a_n=\frac{1}{2\pi H_n^{(2)\prime}(kb)}\int_0^{2\pi} E_\phi(b,\phi)\exp(-jn\phi)\,d\phi \qquad (3.4)$$

したがって (3.4)式により $a_n$ を計算し (3.2)式に代入すれば，任意点での $E\phi$ を求めることが出来る。

ここでは図22に示すように導波管の両側に0.6cm周期で直径0.3cmの円穴をあけた漏洩アンテナの指向性を推測してみた。実測は $r=10$ cm の点で $E\phi$ を測定した。このような漏洩アンテナでは放射電界が微弱な為今まで述べてきた送・受信アンテナが同一の方法では測定が不可能なことが多い。その為送信アンテナと

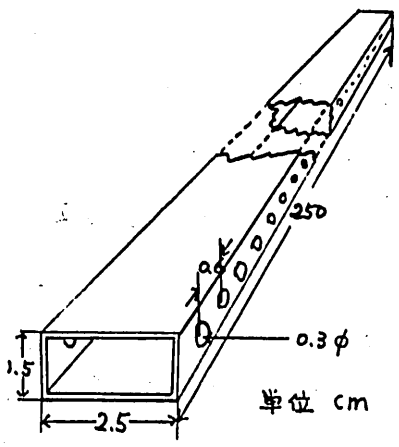



図 22

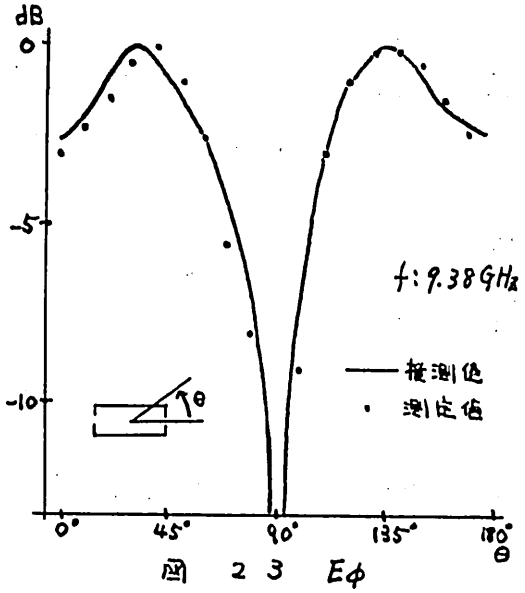



図 23 Eφ

は別の受信アンテナを用いる方法により測定を行なった。この時には (1.4)式は次のようになる。

$$\Delta V_r = \left[ (Z_{rt} - Z_{rt}^{\circ}) - \frac{Z_{rs} Z_{st}}{Z_{ss} + Z_L} \right] I_t \qquad (3.5)$$

ここで $\Delta V_r$ は受信アンテナに現れる電圧，$Z_{rt}$ は受信・送信アンテナの相互インピーダンス，$Z_{rt}^{\circ}$ は反射アンテナの無い時の $Z_{rt}$，$Z_{rs}$・$Z_{st}$ は受信アンテナと反射アンテナ間，反射アンテナと送信アンテナ間の相互インピーダンス，$Z_{ss}$ は反射アンテナの自己インピーダンスである。この場合は (3.5)式より反射アンテナと受信アンテナの相対位置を等しくして $Z_{rs}$ を一定にしておくと $\Delta V_r$ は反射アンテナの位置点のアンテナ方向の電界に比例することになる。図23はこのようにして求めた $r=10$ cm の $E\phi$ より $r=50$ cm の位置での $E\phi$ を推測したものであり，実測値とよく一致していることがわかる。

## 結言

本報告により任意のインピーダンス負荷の微小反射アンテナの最適長設計が可能なこと及びそれを用いた測定が高精度であることがたしかめられた。又理論計算の不可能な回折やアンテナ指向性に対しても十分実用に耐える測定や推測が可能である事が示され，放射系の研究のため有用な手段として活用できるものと考える。

終りにレドーム資材のご配慮を頂いた住友電工倉内・長尾両氏に謝意を表します。又熱心に実験に協力された本学々生藤井（早川），新井（そ石），栄長（富士通）山本（国際電々），今井の諸君に感謝します。

## 参考文献

1), 滝山・豊永・三宅・坂 "Light-Modulated Scattering 法に用いる微小反射アンテナについて" 電気四学会連合大会 1165 昭43-3

2), 滝山・豊永・三宅・坂 "Light-Modulated Scattering 法によるレドームの近傍電界分布測定" 電気四学会連合大会 1166 昭43-3

3), 例えば R.F.Harrington, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields", chap.7, Mc-Grow hill ; 1961

4), J.H. Richmond, "A Modulated Scattering Technique for Measurement of Field Distributions", IRE Trans., Vol.MTT-3, PP 13-15; July 1955

5), A. Vural, D.K. Cheng & B.J. Strait, "Measurement of Diffraction Fields of Finit Cones by a Scattering Technique Using Light Modulation" IEE Trans., Vol. AP-11, PP. 200-201 ; May 1963

6). Y.Y. Hu, "Back-Scattering Cross Section of a Center-Loaded Cylindrical Antenna" IRE Trans. Vol. AP-6, pp. 140-148 ; January 1958

7) K. Iizuka, "A Method of Measuring the Time-Dependent Impedance of the Load" The Microwave Journal, PP. 86-91 ; November 1962

輻射科学研究会資料

# アバランシェダイオード(なだれ素子)の発振効率におよぼす要因

吉田達明
(現在富々公社)
石川順三
佐々木昭夫
高木俊宜
京都大学工学部

1968年 4月26日

# 目　次

頁

1. まえがき……1

2. マイクロ波発振特性……1

3. 動作温度……2

4. なだれの一様性とマイクロプラズマ……3

5. 不純物濃度分布と内部電界分布……6

6. あとがき……13

参考文献

## 1. まえがき

空間電荷層内の電界分布が一様で，なだれ現象により生じた電子と正孔が飽和速度で走行する理想的な構造のなだれ素子に対して，理論解析がすでに行われている。[1] 実際に作られる素子においては，半導体の純度の問題あるいは他の制約から理想的な構造のものはでき難い。同じ工程で作られたと考えられる素子に対してもそのマイクロ波発振効率に差が生ずる。より良い効率のなだれ素子を得るためには，効率低下の原因を知る必要がある。本報告では効率低下の原因を実験的立場から調べ，得られた結果について述べる。なおバイアス電圧－接合容量特性から接合部の電界分布を得るための近似式もあわせて記す。

## 2. マイクロ波発振特性

試料として用いたなだれ素子は8個のバラクタダイオードである。[註] 構造はシリコンプレーナ型，P-ν-n型ダイオードであり，不純物密度はP領域では約$10^{20}$/cm³，ν領域では約$6\times10^{14}$/cm³，n領域では約$10^{19}$/cm³である。表1に使用素子の静特性および発振の有無等を示す。発振の有無に関して，試料Ⅰ，Ⅱ，Ⅲは発振開始のバイアス電流は比較的小さく連続波発振を得ることができる。発振周波数は1.3～2.4 GHzで，発振出力は最高2mW程度である。試料Ⅳ，Ⅴは発振開始のバイアス電流が大きい。熱破壊を防ぐためパルス電圧をかけて測定すると，わずかに発振出力を検出できる（発振効率が非常に小さい）。試料Ⅵ，Ⅶ，Ⅷはまったく発振しないもの（発振効率が零）である。

---

註：本実験の目的上，発振特性に特に差のあるものを選んだ。

| 試料番号 | 接合面積 | 降伏開始電圧(室温23°C) | 発振の有無および発振開始バイアス電流 | 降伏電圧近傍のV－I特性 | 降伏開始電圧時に空間電荷層が複雑を含むか含まないか |
|---|---|---|---|---|---|
| I | [300μφ] | 139V | 有(28mA) | 急峻 | 含む |
| II | [300μφ] | 147V | 有(30mA) | 急峻 | 含む |
| III | 300μφ | 138V | 有(40mA) | 急峻 | 含む |
| IV | 300μφ | 154V | 有(100mA以上) | ゆるやか | 含まない |
| V | | 168V | 有(100mA以上) | ゆるやか | 含まない |
| VI | 700μφ | 141V | 無 | ゆるやか | 含む |
| VII | | 152V | 無 | ゆるやか | 含む |
| VIII | | 135V | 無 | ゆるやか | 含む |

表.1　使用素子の規格，発振の有無および他の特性
[ ] 内は推定値

## 3. 動作温度

なだれ素子のマイクロ波発振において，素子の動作温度を低めることにより発振効率が良くなることが知られている。[2] 本実験では，まず動作温度を低める目的で素子の周囲温度を変えて発振特性の変化を調べた。周囲温度を室温(23°C)と－70°Cに保って発振出力および効率を調べてみると，温度の低いときの方がこれらはともに大きくなる。効率は図.1から約2倍程度よくなることを知る。また発振を開始するときのバイアス電流は5mA程度少なくなり，温度の低い方が発振効率の上昇とともにより発振し易くなる。なだれ素子のマイクロ波発振に影響をおよぼす物理定数のうち温度依存性をもつものは，なだれ現象のイオン化率α，不純物原子のうちイオン化するものゝ密度，導電率等が考えられる。これらのうち，なだれ素子の負コンダクタンスに直接影響をおよぼすものはイオン化率αであると考えられる。これは負コンダクタンスがイオン化率αに直接比例するからである。[1] 他方，発振しない(発振効率が零の)試料VI，VII，VIIIについては，周囲温度を低めることによる効果は見られなかった。したがってマイクロ波発振におよぼす

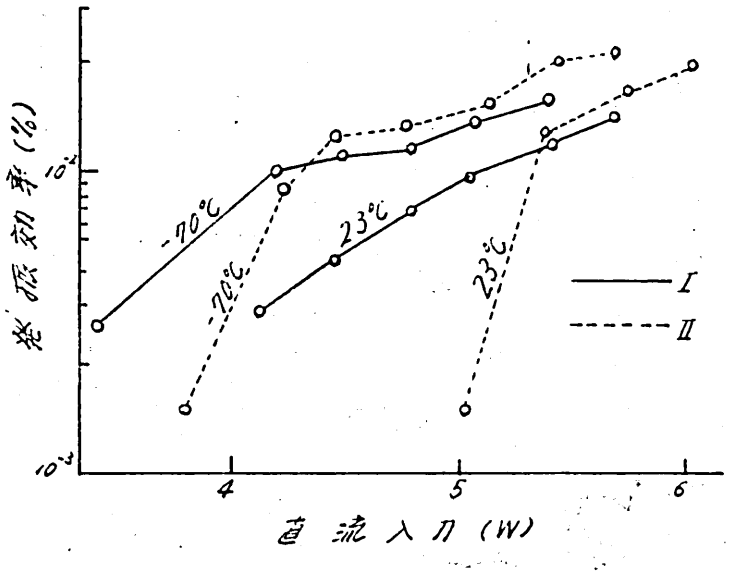



図.1　試料Ⅰ，Ⅱの発振効率

原因として，動作温度以外に他の原因があるものと考えられる。

## 4. なだれの一様性とマイクロプラズマ

半導体のP－n接合に逆方向電圧をかけその電圧を増していくとなだれ増倍現象が起り，電流が急に流れ始める。一般にこの降伏電圧の付近でなだれが局所的に，主に集中的に起っているマイクロプラズマが観測される。マイクロプラズマの存在は接合部のなだれ破壊現象が一様に起っていないことを示すもので，これらの原因として，半導体接合部における転位，不純物拡散の不均一性，空間電荷層の一部に誘電率の違った汚染物の固まり（不純物濃度が局所的に大きいかまたは小さい）があることなどが考えられる。[3] マイクロプラズマのうちしばしば観測されるもので電流パルスの出るものがある。[4][5] この種のものは，図.2に示すように，あるバイア

ス電圧に対して一定の電流振幅をもった電流パルスがシンクロスコープで観測され，パルス幅およびパルス間隔はまったく任意である。

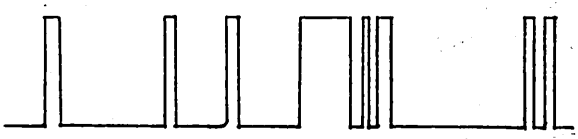


図.2　電流パルスのでるマイクロプラズマをシンクロスコープでみた一例
(試料Ⅶ)
掃引時間1/msec，電流パルス振幅15μA

なだれ素子のマイクロ波発振に際して，接合面近傍の結晶の一様性がいかなる影響をおよぼすかを調べるために，マイクロプラズマを観測する。マイクロ波発振が期待される高電流(数10mA)では，なだれの一様性を判断することが困難になる。したがって降伏電圧の近傍におけるV－I特性，マイクロプラズマとマイクロ波発振との関係を調べた。降伏電圧のごく近傍のV－I特性をX－Yレコーダで測定した一例を図.3に示す。

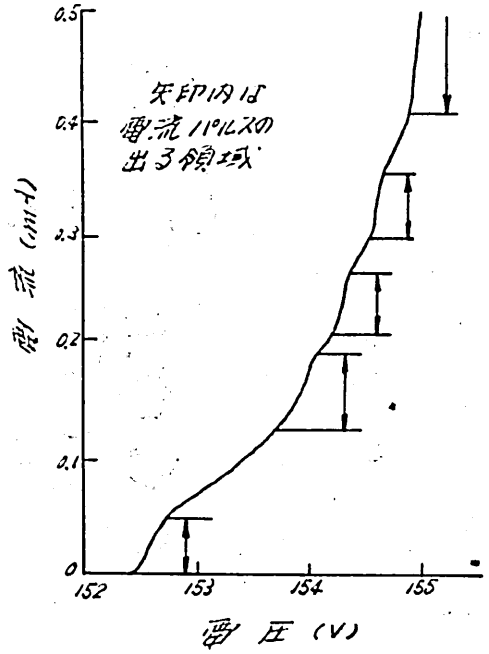



図.3　降伏開始電圧ごく近傍のV－I特性をX－Yレコーダで測定した一例(試料Ⅶ)。
V－I特性の不連続の急峻な部分と電流パルスの出る位置とが一致する。

この特性の不連続の急峻な（図中矢印の）部分で雑音性の電流パルスが観測され，矢印内以外の部分では観測されない。　矢印は電流パルスが発生し始めてから消滅するまでの区間を示し，一つの矢印内で一個あるいは数個の電流パルスが観測される。　このマイクロプラズマはすべての試料において観測され，このマイクロプラズマの有無だけで発振の有無を区別することはできなかった。　しかし，発振する試料には降伏電圧のごく近傍において比較的電流振幅の大きいマイクロプラズマのあることが見られる。

電流パルスを出す以外のマイクロプラズマはすべてV－I特性をゆるやかにする傾向を持つ。　比較的少ないバイアス電流で発振する試料（I，II，III）は，図.4に示すように他の試料に比べて降伏点近傍のV－I特性は非常に急峻である。　なだれ素子の逆電圧V－I特性

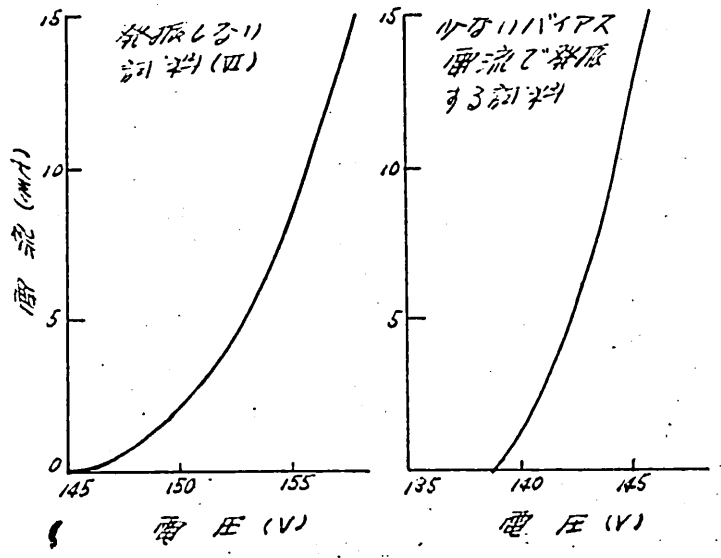



図.4　降伏領域電圧近傍のV－I特性の一例

全体の傾きがおもにはまるのは接合部の温度上昇によるものであるが，降伏電圧近傍のV－I特性は直流入力による発熱が少ないため温度による影響は少なく，マイクロプラズマなどによる特徴がよく現われるものと考えられる。　したがって比較的少ないバイアス電流で発振

とするものには，V－I特性をゆるやかにするマイクロプラズマが極めて少ないことがわかる。他のものは比較的降伏開圧近傍のV－I特性がゆるやかである。[註] 以上のことがうから，効率良いマイクロ波発振を得るには，できる限り一様ななだれが生ずるようにしなければならないものと判断される。

試料IV，Vは，降伏開圧近傍のV－I特性はゆるやかであるにもかかわらずバイアス開流を多く流せば発振する。またこれらのものはV－I特性全体をみた場合，その傾きが他のものに比べてかなりゆるやかである特徴を持つ。したがって発振効率におよぼす他の原因をさらに調べるため，試料の不純物濃度分布，内部電界分布を調べる。

## 5. 不純物濃度分布と内部電界分布

内部電界分布は素子の不純物濃度分布と密接な関係がある。図.5に示す接合部近傍のドナ分布が$N_d(x)$，

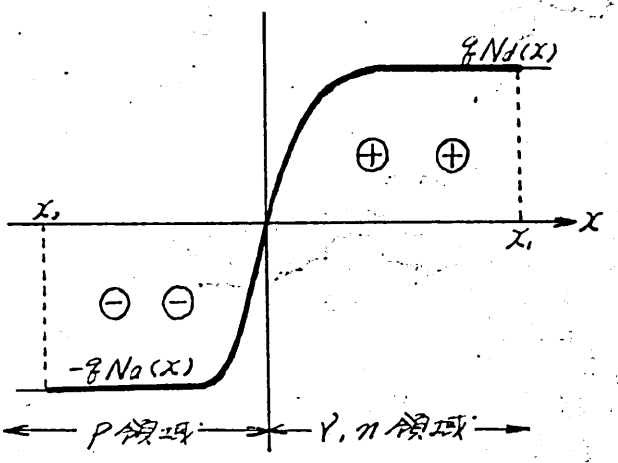



図.5　不純物濃度分布

---

註：　V－I特性がゆるやかになる他の原因として，なだれ素子表面の漏洩開流も考えられる。

アクセプタ分布が$N_a(x)$である系子を考える。まず系子の接合容量ーバイアス電圧特性から，不純物濃度分布$N_d(x)$，$N_a(x)$ならびに電界分布を求める式を導く。つぎに，得られた式を実験に用いた試料に適用して，内部電界分布とマイクロ波発振効率との関係を調べていく。

一次元のポアッソンの式

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = -\frac{qN_d(x)}{\epsilon} \qquad (x>0) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{qN_a(x)}{\epsilon} \qquad (x<0) \tag{2}$$

ここで$\epsilon$は誘導率，$q$は電子の電荷の絶対値である。空間電荷層の両端の面$x=x_1$，$x=x_2$で電界がほとんど零，P領域，N（またはV）領域の境界面$x=0$で電界が連続であると云う条件

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{x=x_1} \cong 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial V_2}{\partial x}\right|_{x=x_2} \cong 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial V_2}{\partial x}\right|_{x=0}$$

を用いて

$$Q_1(x_1) = Q_2(x_2) \tag{3.a}$$

を得る。ここで

$$Q_1(x) = \int_0^x qN_d(x)dx \quad , \quad Q_2(x) = \int_x^0 qN_a(x)dx \tag{3.b}$$

である。(3.a)式は空間電荷層のP領域，N（またはV）領域の空間電荷量が等しいことを意味する。さらに$x_2$における電位が零，$V_2(x_2)=0$，$x=0$において電位が連続，$V_1(0)=V_2(0)$，$x_1$における電位が拡散電位$V_d$と系子へのバ

イアス電圧 $V_a$（負値）との和で与えられる関係式

$$V_1(x_1) = V_d - V_a \equiv V'$$

を用いて

$$V'(x_1) = -\frac{1}{\epsilon}\left\{R_1(x_1) + R_2(x_2)\right\} + \frac{1}{\epsilon}Q_1(x_1)(x_1 - x_2) \quad (4.a)$$

を得る。 ここで $R_1(x_1)$, $R_2(x_2)$ は

$$R_1(x_1) = \int_0^{x_1} Q_1(x)\,dx \quad , \quad R_2(x_2) = \int_{x_2}^{0} Q_2(x)\,dx \quad (4.b)$$

で与えられる。 (4.a)式はバイアス電圧と不純物濃度，空間電荷層の幅 $d = (x_1 - x_2)$ との関係を与える式である。(4.a)式を $x_1$ で微分して

$$\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} = \frac{d}{\epsilon}\frac{\partial Q_1(x_1)}{\partial x_1} = \frac{dQ}{\epsilon}Nd(x_1) \quad (5)$$

を得る。 容量の定義式を用いて接合容量 $C$ を求めると

$$C = \frac{\partial Q}{\partial V'} = \frac{\dfrac{\partial Q_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial V'}{\partial x_1}} = \frac{\epsilon}{d} \quad (6)$$

を得る。 (6)式は接合容量が不純物濃度分布にかかわらず空間電荷層の幅 $d$ のみの関数であることを示している。 試料に用いた P－V－n 型なだれ素子においては，P 領域の不純物濃度が V，n 領域の不純物濃度よりも十分大きい。 このことと(3.a)式を考慮して

$$d = x_1 - x_2 \cong x_1 \tag{7}$$

の近似を得る。・容量，濃度分布は

$$C = g(V') \cong \frac{\epsilon}{x_1} \tag{8}$$

$$N_d(x_1) \cong \frac{\epsilon}{q x_1} \frac{\partial V'}{\partial x_1} \tag{9}$$

で与えられることになる。ここで $C = g(V')$ はバイアス電圧と接合容量との関係を示すものである。電圧 $V'$，容量 $C$ の測定値から式(8)，(9)を用いて電界 $\partial V'/\partial x_1$，不純物濃度 $N_d(x_1)$ を求めることは一般に困難である。したがって図.6のように $V'$，$n$ 領域を小区分し，各区分内で濃度が一定であると仮定して，順次耐界，濃度を求めていく方法を取る。

P領域の不純物濃度が $\nu$，$n$ 領域のそれにくらべて十分大きいとして，電界の増分，$x_{n-1} \leqq x \leqq x_n$ における不純物濃度は次式で与えられる。

$$\Delta E_n = \frac{V_n' - V_{n-1}'}{\frac{1}{2}\nu_n + x_{n-1}} \tag{10}$$

$$N_{dn} = \frac{\epsilon}{q} \frac{V_n' - V_{n-1}'}{\nu_n\left(\frac{1}{2}\nu_n + x_{n-1}\right)} \tag{11}$$

ここで $x_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$ であり，上記は $n = 1, 2, \cdots$ において

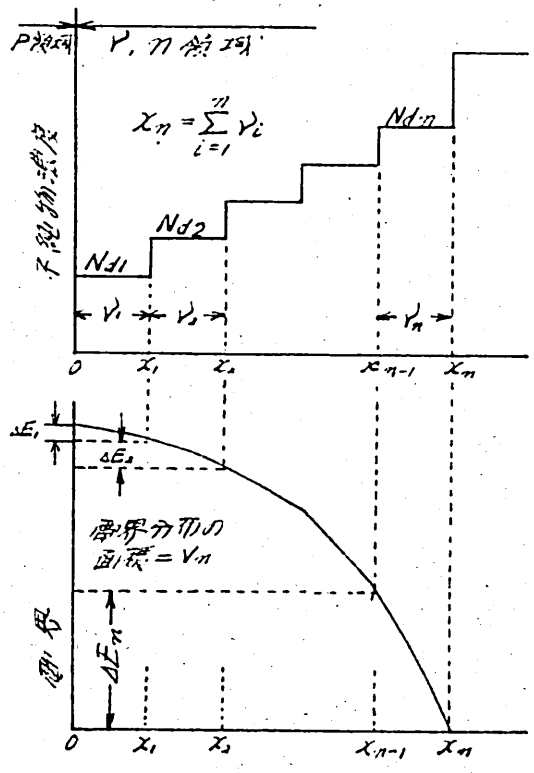



図.6　不純物濃度分布を階段状と仮定したときの濃度分布と電界分布。

いて成立つ。 ただし $V_0'=0$, $\chi_0=0$ とする。 また $V_m$ は $\chi_m$ に対して

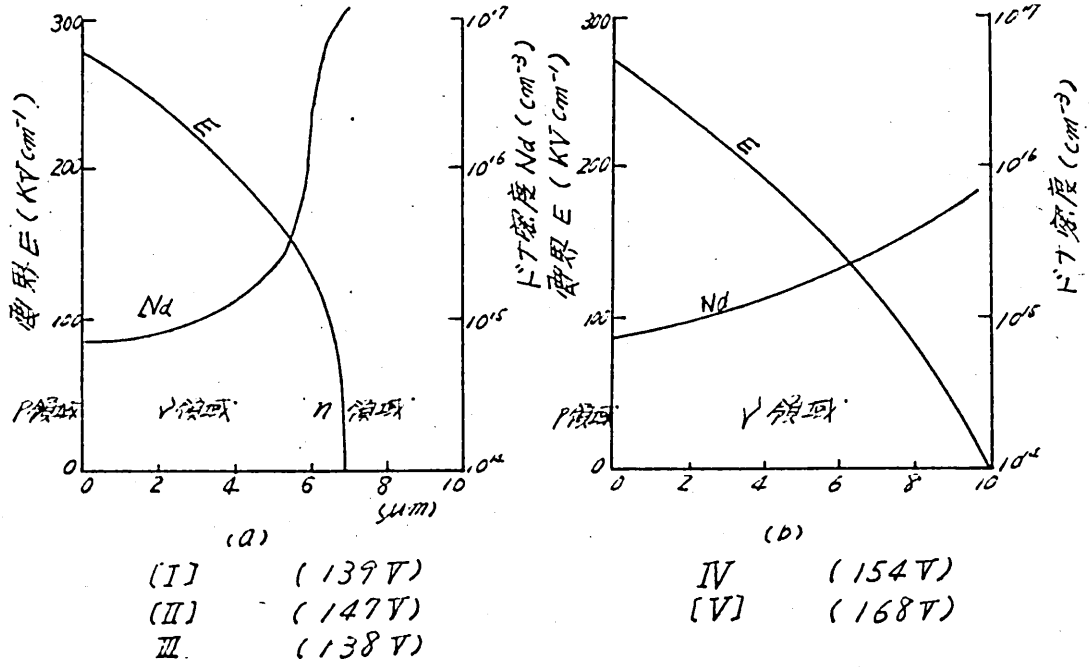
$$C_m = f(V_m') = \frac{\epsilon}{\chi_m} \qquad (12)$$

の関係から与えられる。

空温においてドナ，アクセプタはすべてイオン化しているものと仮定して，式(10)，(11)を用いて試料の内部電界分布，不純物濃度分布を計算する。 計算の結果は図.7に示すように3つの型に分けることができる。 計算には接合面積を必要とするが，面積のわからない試料に対してもC-V特性から推定して図.7の3つの型のいづれかに分類できるものがある。 これらの試料に対しては試料番号を括弧内に入れて図.7に示した。 図の電界分布の面積はなだれが起り始める降伏電圧に相当し，最初に雪流パルスの観測される電圧をもって降伏開始電圧とした。 降伏開始時のバイアス電流による空荷密度はイオン化した不純物濃度に比べて1分小さく，バイアス電流による電界分布変化は無視することができる。 バイアス電流が流れることにより空間電荷層外のP，N，の領域にも電界が存在することになるが，電流密度の小さい場合（実験では約60A/cm²）にはこの電界の存在も無視できる。

図.7(a)に属する試料は，空間電荷層が完全にの領域に達し電界の最大値は十分大きいものである。 この種のものはC-V特性的小さいバイアス電流で発振する。 (b)に属する試料は，電界の最大値は(a)に属するものと同程度の大きさであるが，空間電荷層がまだの領域に達しないうちに降伏電圧となったものである。 この種のものは，十分大きな電圧をかけ（実際にはパルス電圧で行う）大きな電流を流した場合わずかに発振する。 (c)に属する試料は空間電荷層がの領域に達してはいるが，電界の最大値が(a)，(b)のものにくらべて小さいものである。

(a)に属する試料は，降伏開始電圧時に空間電荷層がすでにの領域に入っているためバイアス電圧の増加に対し




(a)
[I] (139V)
[II] (147V)
III (138V)

(b)
IV (154V)
[V] (168V)

VI (141V)

図. 7 試料における不純物濃度分布および電界分布の3つの型。電界分布は室温における降伏開始電圧時のもの。( )内は室温における降伏電圧を示す。

て空間電荷層の長さはほとんど変らず，電界の最大値はかなり増加する。これに対して(b)に属する試料は，降伏開始電圧時において空間電荷層がν領域にあるためバイアス電圧の増加に対して空間電荷層の長さはかなりの増加をみせる。このため電界の最大値の増加は(a)のものにおけるほど大きくない。このことは(a)の試料に比

べてなだれ現象が急激でなくV－I特性の傾きがゆるやかであり，また降伏開始電圧も(a)に比べて大きくなるものと考えられる。　実際これらのことは測定とよく一致する。　(b)に属する試料が(a)に属するものより発振し難いことは，次のように考えることができる。　接合面積，放熱効果が同じとした場合，(a)，(b)型のものに同程度のバイアス電流を流したとき，空乏層部分の形状と電界の値はだいたい同じである。註　ところでなだれ系のなだれ現象によって生じる小信号時の負抵抗の値は，イオン化率の大きい空乏層部分によってほぼ決まる。　したがって(a)，(b)両者においてなだれによって生じる負抵抗の値はほとんど差がないと考えられる。　(b)に属するものは空間電荷層の外側にV領域が残っている。　この領域は抵抗率が大きいため，そこに存在する正抵抗が損失付加抵抗となり空間電荷層内にできた負抵抗を打消すようにはたらく。[6]　これに対して，(a)に属するものは降伏開始電圧時においてすでに空間電荷層がN領域に入っているため，負抵抗に直列に入る正抵抗すなわち損失付加抵抗はほとんどない。　したがって負抵抗に関して考える限り，(a)に属する試料は(b)に属するものより発振し易いと考えられる。　ところで(b)の試料においてはバイアス電圧の増加に対して空間電荷層がN領域の方へ延び，十分なバイアス電圧をかければ直列正抵抗の部分が小さくなり，同時に電流が多く流れるためになだれによって生じる負抵抗が強くなって発振する可能性がでてくる。　このような大きなバイアス電圧を連続で印加することは温度上昇の点から無理がある。　パルス電圧を使用して観測すると，(b)に属する試料IV，Vはともに発振するこ

---

註：　(a)，(b)の試料に同程度のバイアス電流を流すには，(b)の試料には(a)の試料よりもかなり大きい(30～40V)バイアス電圧をかけねばならない。　このことはすでに(b)の試料が(a)の試料に比べて効率の悪くなることを示している。

とが認められた。

イオン化率をαとして各試料について$\int_{ave}\alpha dx$なる量を考える。ここで積分は空間電荷層全域の長さについて行ったものである。また添字aveを附したのはすべての不均一性を加味した試料全体にわたっての平均的な値であることを示す。(c)に属する試料は$\int_{ave}\alpha dx$の値が(a), (b)に属するものよりかなり小さい。$\int_{ave}\alpha dx$の値が小さいことは，その試料の接合部付近の結晶，あるいは不純物拡散の一様性が悪く，マイクロプラズマが多く現われる構造であると考えられる。これは前項で述べたように，(c)に属する試料の降伏電圧近傍のV－I特性がゆるやかであることからも判断できる。(c)に属する試料は発振しないが，これはマイクロプラズマがおもな原因と考えられる。

## 6. あとがき

以上なだれ素子のマイクロ波発振におよぼすと思われる事項について考察した。これから発振し易い素子であるためには少くとも次の条件が必要であることが結論される。

(イ)なだれ現象によって生じる負抵抗に直列に入る正抵抗，すなわち損失付加抵抗を小さくするために，降伏電圧時に空間電荷層がV領域全体を含んでしまう構造であること。

(ロ)マイクロプラズマによる影響をできるだけ避けるため，結晶および不純物拡散ができるだけ一様な構造であること。

(ハ)大きいバイアス電流を流し得るために熱放散の良い構造であること。

ここで(イ)はV領域の不純物濃度とその領域の長さとの関係を与えるものである。

最後に本実験用の試料を提供していただいた富士通研究所に感謝の意を表します。

## 参考文献


[1] T. Misawa: "Negative resistance in p-n junctions under avalanche breakdown conditions," Trans. I.E.E.E., ED-13, P137 (1966)

[2] C.B. Swan: "The importance of providing a good heat sink for avalanching transit time oscillator diodes," IEEE (Letters), Vol. 55, P451 (march (1967)

[3] H. Kressel: "A review of the effect of imperfections on the electrical breakdown of p-n junctions," R.C.A. Rev., P175 (1967)

[4] Keiji Maeda and Katuhisa Suzuki: "Microplasmas in silicon p-n junctions," J.J.A.P., 1, P193 (1962)

[5] R.J. McIntyre: "Theory of microplasma instability in silicon," J. appl. Phys., 32, P983 (1961)

[6] S.R. Kovel and G. Gibbons: "The effect of unswept epitaxial material on the microwave efficiency of IMPATT diodes," Proc. Letters, P2066 (1967)

輻射科学研究会資料

# 導電性運動媒質中の電磁界と波動増幅現象

藤岡弘
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1968年7月26日

# 1. 序　　言

導電性運動媒質中の電磁界はCollierとTai[1]，および筆者ら[2)~(4)]によって解析され，媒質が静止している場合に比べて種々の興味ある現象が現われることが報告されている．しかし，上記文献はいずれも媒質の運動速度が光速に比べて十分小さい場合の解，すなわち近似解のみを取り扱っている．

本文では，媒質の運動速度に関するこのような制限を取り除いた厳密な解析を行ない，近似解の場合にはみられなかった特異な現象が現われることを示す．このため，まず電磁界補助量として適当に定義されたベクトル・ポテンシャルを導入し，このベクトル・ポテンシャルの満足すべき波動方程式を厳密なMaxwell-Minkowski方程式から導き，この波動方程式を解くことによって導電性運動媒質中の任意の印加波源によって生ずる電磁界を決定できることを示す．つぎに，Poynting定理およびエネルギー関係式を導き，厳密解を取り扱う場合には従来の場合[4]とは異なる新たな解釈が必要であることを示す．さらに，このような媒質中を伝搬する平面波の性質について論じ，導電性媒質が電磁波の電磁エネルギー流の進む方向と逆の方向にある一定の速度以上の速度で運動する場合には，波が進むにつれて波動の振幅が増大する，いわゆる波動増幅の現象が起ることを示し，この現象を導電性運動媒質中の厳密なPoynting定理を用いて説明する．

# 2. Maxwell-Minkowski方程式と波動方程式

誘電率$\varepsilon$，透磁率$\mu$，導電率$\sigma$をもつ無限に拡がった線形，等方かつ一様なる非分散性媒質を考える．この媒質が波源および観測者に対して一様に運動しているとき，波源および観測者の静止座標系における電磁界はつぎのMaxwell方程式によって決定される．

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_s \tag{1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f + \rho_s \tag{1d}$$

ただし，

$\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ ＝観測者の静止座標系における電界ベクトル

$\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ ＝観測者の静止座標系における磁界ベクトル

$\rho_f$, $\rho_f$ ＝自由電流密度および自由電荷密度

$\mathbf{J}_s$, $\rho_s$ ＝印加電流密度および印加電荷密度

ここで，簡単のため媒質の運動速度$\mathbf{v}$をz軸に平行，すなわち$\mathbf{v} = v\mathbf{l}_z$（$\mathbf{l}_z$＝z軸方向の単位ベクトル）とすれば構成関係式はつぎのように与えられる[5],[6]

$$\mathbf{B} = \mu\bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \Omega \times \mathbf{E} \tag{2a}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\bar{\alpha} \cdot \mathbf{E} + \Omega \times \mathbf{H} \tag{2b}$$

$$\mathbf{J}_f - \rho_f \mathbf{v} = \gamma\sigma\left\{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c}\left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\right]\right\} \tag{2c}$$

ただし，

$$\Omega = \frac{(n^2-1)\mathbf{v}}{(1-n^2\beta^2)c^2} = \frac{(n^2-1)\beta}{(1-n^2\beta^2)c}\mathbf{l}_z = \Omega\mathbf{l}_z$$

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad a = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$n=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}\quad,\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\text{真空中の光速度}\qquad(3)$$

さて，媒質の静止座標系における自由電荷密度$\rho_f'$は$\mathbf{J}_f$と$\rho_f$とつぎの関係式[5]

$$\rho_f'=\gamma\left(\rho_f-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_f}{c^2}\right)\qquad(4)$$

によって結ばれているが，定常状態においては媒質の静止座標系における自由電荷密度は零，すなわち$\rho_f'=0$と仮定できる[7]ので，式(2c)から観測者の静止座標系における自由電流密度および自由電荷密度はそれぞれつぎのようにかける．

$$\mathbf{J}_f=\gamma\sigma\{\mathbf{E}+\mathbf{v}\times(\mu\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}-\Omega\times\mathbf{E})\}\qquad(5a)$$

$$\rho_f=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_f}{c^2}\qquad(5b)$$

電磁界の時間変化を$e^{jwt}$と仮定し，上式(5)および式(2a),(2b)を用いてMaxwell方程式(1)から$\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{J}_f$, $\rho_f$を消去してつぎのMaxwell-Minkowski方程式を得る．

$$(\nabla-j\omega\Omega)\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}\qquad(6a)$$

$$(\nabla-j\omega\Omega-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\times\mathbf{H}=j\omega\hat{\varepsilon}\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{J}_s\qquad(6b)$$

$$(\nabla-j\omega\Omega-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}=\frac{\Omega\cdot\mathbf{J}_s+\rho_s}{\varepsilon}\qquad(6c)$$

$$(\nabla-j\omega\Omega)\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}=0\qquad(6d)$$

ただし，

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon\left(1-j\frac{\sigma\gamma}{\omega\varepsilon}\right)\qquad(7)$$

ここで，電磁界および波源に関してつぎのような変換を行なう．

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\exp(j\omega\Omega\cdot\mathbf{r})=\mathbf{E}_0\exp(j\omega\Omega z)\qquad(8a)$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0\exp(j\omega\Omega\cdot\mathbf{r})=\mathbf{H}_0\exp(j\omega\Omega z) \tag{8b}$$

$$\mathbf{J}_S=\mathbf{J}_{0S}\exp(j\omega\Omega\cdot\mathbf{r})=\mathbf{J}_{0S}\exp(j\omega\Omega z) \tag{8c}$$

$$\rho_S=\rho_{0S}\exp(j\omega\Omega\cdot\mathbf{r})=\rho_{0S}\exp(j\omega\Omega z) \tag{8d}$$

ただし，$\mathbf{r}$ は座標原点から観測点に向かう位置ベクトルである．上式(8)を Maxwell-Minkowski 方程式(6)に代入して次式を得る．

$$\nabla\times\mathbf{E}_0=-j\omega\mu\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}_0 \tag{9a}$$

$$(\nabla-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\times\mathbf{H}_0=j\omega\hat{\varepsilon}\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}_0+\mathbf{J}_{0S} \tag{9b}$$

$$(\nabla-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}_0=\frac{\Omega\cdot\mathbf{J}_{0S}+\rho_{0S}}{\varepsilon} \tag{9c}$$

$$\nabla\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}_0=0 \tag{9d}$$

さて，式(9d)から電磁界補助量としてベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_0$ をつぎのように導入することができる．

$$\mathbf{H}_0=\bar{\alpha}^{-1}\cdot[\nabla\times(\bar{\alpha}^{-1}\cdot\mathbf{A}_0)] \tag{10}$$

したがってスカラ・ポテンシャルを $\phi_0$ とすれば，$\mathbf{E}_0$ は式(9a)から

$$\mathbf{E}_0=-j\omega\mu\bar{\alpha}^{-1}\cdot\mathbf{A}_0-\nabla\phi_0 \tag{11}$$

とかける．式(10)，(11)を式(9b)，(9c)に代入し，ゲージ関係式

$$(\nabla-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\cdot\mathbf{A}_0+j\omega\hat{\varepsilon}a^2\phi_0=0 \tag{12}$$

を用いて，ベクトル・ポテンシャルに関する波動方程式

$$[\nabla\cdot\bar{\alpha}\cdot\nabla-\mu\sigma a\gamma(\mathbf{v}\cdot\nabla)+a^2\hat{k}^2]\mathbf{A}_0=-a^2\mathbf{J}_{0S} \tag{13}$$

を得る．ただし，

$$\hat{k}^2=\omega^2\hat{\varepsilon}\mu=\omega^2\varepsilon\mu\left(1-j\frac{\sigma\gamma}{\omega\varepsilon}\right) \tag{14}$$

また，ゲージ関係式(12)を用いて，式(11)の $\mathbf{E}_0$ はつぎのように表わされる．

$$\mathbf{E}_0=\frac{\bar{\alpha}^{-1}}{j\omega\hat{\varepsilon}}\cdot\left\{\hat{k}^2\mathbf{A}_0+\frac{\bar{\alpha}}{a^2}\cdot[\nabla(\nabla-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\cdot\mathbf{A}_0]\right\} \tag{15}$$

したがって，与えられた印加波源 $\mathbf{J}_{0S}$ によって生ずる電磁界を求めるには波

動方程式(13)を解いてベクトル・ポテンシャル$\mathbf{A}_0$を求め，式(10)および(15)の演算を行なえばよいことになる．

波動方程式(13)を解くため$\mathbf{A}_0$のかわりに新しい未知関数$\mathbf{T}_0$を

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{T}_0 \exp\left(\frac{1}{2}\mu\sigma a\gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\right) = \mathbf{T}_0 \exp\left(\frac{1}{2}\mu\sigma a\gamma v z\right) \quad (16)$$

なる関係によって導入する．上式(16)を波動方程式(13)に代入して$\mathbf{T}_0$に関する波動方程式

$$\left[\nabla\cdot\overline{\alpha}\cdot\nabla + \hat{K}_0^2\right]\mathbf{T}_0 = -\mathbf{F}_0 \quad (17)$$

を得る．ただし，

$$\hat{K}_0^2 = a^2\left(\hat{k}^2 - \frac{1}{4}\mu^2\sigma^2\gamma^2 v^2\right) \quad (18a)$$

$$\mathbf{F}_0 = a^2\mathbf{J}_{0s}\exp\left(-\frac{1}{2}\mu\sigma a\gamma v z\right) \quad (18b)$$

$\mathbf{T}_0$に関する波動方程式(17)はFourier変換を用いて容易に解くことができる．したがって，導電性運動媒質中に存在する任意の印加波源によって生ずる電磁界$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$は波動方程式(17)の解を用いて，式(16)，式(10)，(11)，および式(8)の操作を順次行なうことによって決定することができる．

## 3. Poynting 定理

式(1a)と$\mathbf{H}$のスカラ積から式(1b)と$\mathbf{E}$のスカラ積を差し引き，構成関係式(2a)，(2b)を用いて次式を得る．

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{J}_s\cdot\mathbf{E} - \mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t}\left(W_m + W_e\right) \quad (19)$$

ただし，

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \quad (20a)$$

$$W_m = \frac{1}{2}\left[\mu\, \mathbf{H}\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H} - \Omega\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\right] = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} \qquad (20b)$$

$$W_e = \frac{1}{2}\left[\varepsilon\, \mathbf{E}\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E} - \Omega\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\right] = \frac{1}{2}\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \qquad (20c)$$

上式において，$\mathbf{S}$は放射電力密度を表わし，$-\mathbf{J}_s\cdot\mathbf{E}$は印加波源によって供給される電力の密度を表わす．$\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}$はその符号が正のときには媒質中で消費される電力の密度を表わし，負のとき（次節で述べるように，媒質が$n\beta>1$なる速度で電磁エネルギーの進む方向と逆方向に運動するとき$\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}$はその符号が負となる）には，媒質から供給される電力の密度を表わすものと解釈できる．また，$W_m$および$W_e$はそれぞれ磁気的および電気的エネルギー密度を表わすものと解釈できる．

電磁界が正弦的に時間変化をしている場合には，式(19)のPoynting定理はつぎのようになる．

$$\nabla\cdot\langle\mathbf{S}\rangle = -\frac{1}{2}\mathbf{J}_s^*\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E} - 2j\omega\left(\langle W_m\rangle - \langle W_e\rangle\right) \qquad (21)$$

ここで，

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* \qquad (22a)$$

$$\langle W_m\rangle = \frac{1}{4}\left[\mu\,\mathbf{H}\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}^* - \Omega\cdot\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\right] = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*\right] \qquad (22b)$$

$$\langle W_e\rangle = \frac{1}{4}\left[\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}^* - \Omega\cdot\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\right] = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}^*\right] \qquad (22c)$$

ただし，Reは実数部をとる操作を表わし，記号$^*$は複素共役を表わす．

式(21)の実数部をとり，面Aによって囲まれた体積Vによって積分するこ

とにより，導電性運動媒質中におけるアンテナ放射に関するエネルギー関係式として次式を得る．

$$<P_R> = <P_s> - <P_f> \tag{23}$$

ただし，

$$<P_R> = \mathrm{Re} \iint_A \mathbf{n} \cdot <\mathbf{S}> dA \tag{24a}$$

$$<P_s> = -\frac{1}{2} \mathrm{Re} \iiint_V \mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{E}\, dV \tag{24b}$$

$$<P_f> = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \iiint_V \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}\, dV \tag{24c}$$

ここで$\mathbf{n}$は面Aの外向き法線ベクトルを表わす．式(24)の$<P_R>$は面Aを横切って外方へ放射される電力の時間平均値を表わし，$<P_s>$は体積V内に存在する波源によって供給される電力の時間平均値を表わす．つぎに，$<P_f>$はその符号が正の場合には，体積Vの媒質内で消費される電力の時間平均値を表わし，負の場合には媒質から供給される電力の時間平均値を表わすことになる．

## 4. 平面波と波動増幅現象

ここでは，導電性運動媒質中を伝搬する平面波について考察する．平面波の位相項を$\exp[j(\omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r})]$と仮定すれば，式(17)，(16)，および式(10)，(15)，(8)を順次用いることによって

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r} - \omega\Omega z + \frac{1}{2} j\mu\sigma a\gamma v z \tag{25a}$$

$$\mathbf{k}_0\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{k}_0 - \hat{K}_0^2 = 0 \tag{25b}$$

なる関係式を得る．ただし，式(25b)は波動方程式(17)の右辺，すなわち

印加波源による項を0とおくことによって得られたものである．

ここで，簡単のため媒質の運動方向（z軸方向）に平行な方向に伝搬するTEM波を考え，その伝搬定数をKとすれば，電界および磁界は前節の結果を用いてつぎのように求まる．

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_x C e^{j(\omega t - Kz)} \tag{26a}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{i}_y \frac{K + \omega\varrho}{\omega\mu a} C e^{j(\omega t - Kz)} \tag{26b}$$

ただし，Cは場所および時間に無関係な定数であり，また$\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$はそれぞれxおよびy軸方向の単位ベクトルを表わす．さて，伝搬定数Kは式(25)から求められ，位相係数p，および減衰（増幅）係数qを

$$K = k(p - jq) \tag{27a}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{27b}$$

で定義すれば，p，qはそれぞれつぎのように求められる．

$$p = p^{\pm} = \begin{cases} |a|\left[\pm g - \dfrac{(n^2-1)\beta}{(1-\beta^2)n}\right], & (n\beta < 1) \quad (28a) \\ |a|\left[\pm g + \dfrac{(n^2-1)\beta}{(1-\beta^2)n}\right], & (n\beta > 1) \quad (28b) \end{cases}$$

$$q = q^{\pm} = \begin{cases} |a|\left[\pm h - \dfrac{1}{2} n\beta\gamma \tan\delta\right], & (n\beta < 1) \quad (29a) \\ |a|\left[\pm h + \dfrac{1}{2} n\beta\gamma \tan\delta\right], & (n\beta > 1) \quad (29b) \end{cases}$$

ただし，

$$g = \left[\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}n^2\beta^2\gamma^2\tan^2\delta\right)^2 + \gamma^2\tan^2\delta} + \left(1 - \frac{1}{4}n^2\beta^2\gamma^2\tan^2\delta\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{30a}$$

$$h=\left[\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}n^2\beta^2\gamma^2\tan^2\delta\right)^2+\gamma^2\tan^2\delta}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(1-\frac{1}{4}n^2\beta^2\gamma^2\tan^2\delta\right)\right\}\right]^{1/2} \qquad (30b)$$

$$\tan\delta=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \qquad (31)$$

したがって，伝搬定数$K^-=k(p^- - jq^-)$および$K^+=k(p^+ - jq^+)$をもつ2種類の平面波が存在することがわかる．さて，式(28)から直ちに分かるように位相係数pは$n\beta<1$のとき

$$p^+>0,\quad p^-<0,\quad (n\beta<1) \qquad (32a)$$

となり，また$n\beta>1$のときには

$$p^+>0,\quad p^->0,\quad (n\beta>1) \qquad (32b)$$

となる．また，減衰(増幅)係数qは式(29)から

$$q^+>0,\quad q^-<0,\quad (n\beta<1) \qquad (33a)$$

$$q^+>0,\quad q^->0,\quad (n\beta>1) \qquad (33b)$$

となる．上式(32b)，(33b)から明らかなように，$n\beta>1$のときには2つの位相係数，減衰(増幅)係数はそれぞれ共に正の値をとる．

さて，ここで電磁エネルギーの流れを式(22a)の実数部で定義すれば，式(26)を用いて次式を得る．

$$\mathrm{Re}\left[\langle\mathbf{S}\rangle\right]^{\pm}=\begin{cases}\mathbf{I}_z\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,g|\mathbf{E}|^2\right], & (n\beta<1) \qquad (34a)\\ -\mathbf{I}_z\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,g|\mathbf{E}|^2\right], & (n\beta>1) \qquad (34b)\end{cases}$$

したがって$\mathrm{Re}\left[\langle\mathbf{S}\rangle\right]^{\pm}$の符号はつぎのようになる．

$$\mathrm{Re}\left[\langle\mathbf{S}\rangle\right]^{+}>0,\quad \mathrm{Re}\left[\langle\mathbf{S}\rangle\right]^{-}<0,\quad (n\beta<1) \qquad (35a)$$

$$\mathrm{Re}\left[\langle\mathbf{S}\rangle\right]^{+}<0,\quad \mathrm{Re}\left[\langle\mathbf{S}\rangle\right]^{-}>0,\quad (n\beta>1) \qquad (35b)$$

式(32a), (33a)および(35a)から，媒質が低速度で運動している場合，すなわち$n\beta<1$のときには，伝搬定数$K^-$および$K^+$をもつ波は共に減衰波であり，そのエネルギー流はそれぞれzの負および正の方向に伝搬することがわかる．つぎに，式(32b), (33b)および(35b)から媒質が高速度で運動している場合，すなわち$n\beta>1$のときには，伝搬定数$K^-$をもつ波はエネルギー流の方向がzの正方向(媒質の運動方向)である減衰波であるが，伝搬定数$K^+$をもつ波はエネルギー流の方向がzの負の方向(媒質の運動方向と逆の方向)である増大波であることがわかる．このような増大波の場合のqは増幅係数と呼ぶことができる．つぎに，このような波動増幅の現象を先に導いたエネルギー関係式(23)を用いて説明する．

印加波源が存在しない場合にはエネルギー関係式(23)はつぎのようになる．

$$-\mathrm{Re}\iint_A \mathbf{n}\cdot\langle\mathbf{S}\rangle\,dA=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\iiint_V \mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}\,dV \qquad (36)$$

さて，$\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}]$は式(5a)および(26)を用いてつぎのように表わされる．

$$\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}]^{\pm}=\begin{cases}-\gamma\sigma|a|[-1\pm n\beta g]|\mathbf{E}|^2, & (n\beta<1) \quad (37a)\\ -\gamma\sigma|a|[1\pm n\beta g]|\mathbf{E}|^2, & (n\beta>1) \quad (37b)\end{cases}$$

上式から$\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}]$の符号はつぎのようになる．

$$\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}]^+>0,\ \mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}]^-<0,\ (n\beta<1) \qquad (38a)$$

$$\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}]^+<0,\ \mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}]^->0,\ (n\beta>1) \qquad (38b)$$

上式(38b)から，$n\beta>1$のときには伝搬定数$K^+$をもつ波の$\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}]$は負となり，したがってエネルギー関係式(36)の右辺が負となることがわかる．式(36)の右辺は，媒質が静止している場合もしくは低速度($n\beta<1$)で運動している場合には常に正の値をとり，したがって左辺は体積Vの表面Aを通ってV内に流れ込む電力を表わし，右辺はV内で消費される電力

を表わす．しかし，上の場合のように，媒質が$n\beta>1$なる速度で波の電磁エネルギー流の進む方向と逆の方向に運動する場合には式(36)の右辺は負となり，したがってこの場合には左辺は体積Vの表面Aを通ってVから流れ出る電力を表わし，右辺はV内に媒質から供給される電力を表わすことになる．このことはたとえばつぎのように解釈できる．すなわち，高速度($n\beta>1$)で運動している導電性媒質中を，電磁波が媒質の流れに逆らって伝搬するときには媒質の内部エネルギーが低下し，その分だけ波の電磁エネルギー流が増加する，すなわち波動増幅現象が起ると解釈することができる．なお，このような現象は近似解の場合[(1)〜(4)]には決っして現われなかった現象である．

表1は，p，q；$\mathrm{Re}[\langle \mathbf{S} \rangle]$；および$\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$の符号をまとめたものである．表1における領域Ⅳが波動増幅の起る場合である．

表1　p，q，$\mathrm{Re}[\langle \mathbf{S} \rangle]$，$\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$の符号

| | $n\beta<1$ | | $n\beta>1$ | |
|---|---|---|---|---|
| | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ |
| p | $p^-<0$ | $p^+>0$ | $p^->0$ | $p^+>0$ |
| q | $q^-<0$ | $q^+>0$ | $q^->0$ | $q^+>0$ |
| $\mathrm{Re}[\langle \mathbf{S} \rangle]$ | $\mathrm{Re}[\langle \mathbf{S} \rangle]^-<0$ | $\mathrm{Re}[\langle \mathbf{S} \rangle]^+>0$ | $\mathrm{Re}[\langle \mathbf{S} \rangle]^->0$ | $\mathrm{Re}[\langle \mathbf{S} \rangle]^+<0$ |
| $\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ | $\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]^->0$ | $\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]^+>0$ | $\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]^->0$ | $\mathrm{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]^+<0$ |
| | 減衰波 | 減衰波 | 減衰波 | 増大波 |

なお，筆者ら[8]が先に報告した導電性運動媒質を含む導波管の波動増幅現象も，本文と同様にPoynting定理を用いて説明することができる．

## 5. 結　　言

導電性運動媒質中の電磁界について，媒質の運動速度が光速に比べて十分小さいという近似を行なわないで厳密に解析し，近似解の場合にはみられなかった特異な現象が現われることを示した．特に，媒質が電磁波の電磁エネルギー流の進む方向と逆の方向に高速度（$n\beta > 1$）で運動する場合には，波動増幅の現象が起ることをTEM波を例にあげて示し，つぎにこの現象を導電性運動媒質中の厳密なPoynting定理を用いて説明した．

## 謝　　辞

日頃ご指導ごべんたついただいている大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに常々ご検討いただく板倉研究室の方々に深謝する．

# 文　　献


(1) J. R. Collier and C. T. Tai, IEEE Trans. (Communications), **AP-12**, 375 (1964).

(2) 藤岡　弘，熊谷信昭，信学誌，**50**，1906 (1967).

(3) H. Fujioka and N. Kumagai, Radio Sci. **2** (New Series), 1449 (1967).

(4) 藤岡　弘，熊谷信昭，信学誌（投書），**50**，2375 (1967).

(5) A. Sommerfeld, Electrodynamics (Academic Press, New York, 1964), p. 282.

(6) C. T. Tai, IEEE Trans (Communications), **AP-13**, 322 (1965).

(7) J. A. Stratton, Electromagnetic Theory (McGraw-Hill, New York, 1941), p. 15.

(8) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭，輻射科学研究会資料 (1968-04).

輻射科学研究会資料

# 相反定理を用いた電磁界境界値問題のマトリックス解法

岡本尚道　藤沢和男
（大阪大学　基礎工学部）

1968年7月26日

## 1. まえがき

従来、電磁界境界値問題は、Helmholtzの偏微分方程式を変数分離法によって常微分方程式化し、電磁界とそのモードの和で展開し、境界条件を繰り込むことによって解を得てきたが、この方法では、境界が変数分離可能な座標系と一致しないと、有効ではなく、そのような形状は、13個の座標系の場合に限られてしまう。

最近の電磁界理論は、偏微分作用素の逆作用素である積分作用素の手法を多用する傾向にある。特に昨今の高速大型計算機の発展と相まって、前述の方法では、解くことが不可能であった一般的な形状の境界値問題についても、未知数を適当な関数系で展開し、連立一次方程式化することによって、解を得ることが、多く行なわれてきた。[1~7] これらのHavington, Mei等によって行なわれてきた方法は、殆どすべてが、境界条件からの積分方程式に基礎をおいているが、ここでは、すでに発表した[8]、Lovatoの相反定理に基づいた方法を、さらに一般的に述べている。又、簡単な例題として、完全導体の三角柱、および曲した薄板による二次元散乱問題の解をE波、H波共に示している。

## 2. Lorentz の相反定理と境界値問題

図1で領域$V$は，線形かつ均質等方性媒質$(\varepsilon,\mu)$で満たされているとする．今一つの波源$a$として電流源$\mathbb{J}_0^a$，磁流源$\mathbb{J}_{0m}^a$を考え．それによる界を$\mathbb{E}_t^a$，$\mathbb{H}_t^a$とする．次に全空間が．領域$V$と同じ媒質としたときに．波源$b$として．$\mathbb{J}_0^b$，$\mathbb{J}_{0m}^b$によって発生する界を，$\mathbb{E}^b$，$\mathbb{H}^b$とするとLorentzの相反定理によって次式を得る．

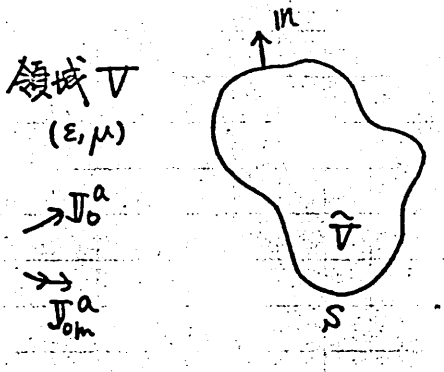



図 1 (a)

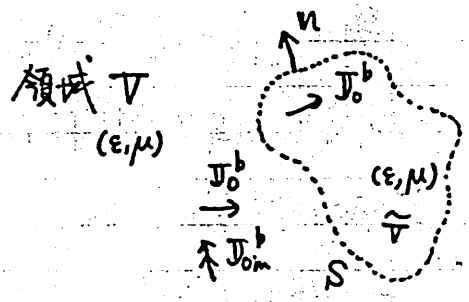



図 1 (b)

$$\int_V \left[\mathbb{E}_t^a\cdot\mathbb{J}_0^b-\mathbb{H}_t^a\cdot\mathbb{J}_{0m}^b-\mathbb{E}^b\cdot\mathbb{J}_0^a+\mathbb{H}^b\cdot\mathbb{J}_{0m}^a\right]d^3x$$
$$=\oint_S\left(\mathbb{E}_t^a\times\mathbb{H}^b-\mathbb{E}^b\times\mathbb{H}_t^a\right)\cdot n\,dS \qquad (1)$$

ここで波源$a$による界を次のように分離して考える．

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}_t^a&=\mathbb{E}_i^a+\mathbb{E}_s^a\\ \mathbb{H}_t^a&=\mathbb{H}_i^a+\mathbb{H}_s^a\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$\mathbb{E}_i^a$，$\mathbb{H}_i^a$は，全空間が領域$V$と同じ媒質で占められたときに．波源$a$によって生じる界とする．従って次の関係がある．

$$\int_V [\mathbb{E}_i^a \cdot \mathbb{J}_o^b - \mathbb{H}_i^a \cdot \mathbb{J}_{om}^b - \mathbb{E}^b \cdot \mathbb{J}_o^a + \mathbb{H}^b \cdot \mathbb{J}_{om}^a] \, d^3x$$

$$= \oint_S [\mathbb{E}_i^a \times \mathbb{H}^b - \mathbb{E}^b \times \mathbb{H}_i^a] \cdot n \, dS \qquad (3)$$

$$\int_{V+\tilde{V}} [\mathbb{E}_i^a \cdot \mathbb{J}_o^b - \mathbb{H}_i^a \cdot \mathbb{J}_{om}^b - \mathbb{E}^b \cdot \mathbb{J}_o^a + \mathbb{H}^b \cdot \mathbb{J}_{om}^a] d^3x = 0 \qquad (4)$$

但し, $\mathbb{E}_i^a$, $\mathbb{H}_i^a$ および $\mathbb{E}^b$, $\mathbb{H}^b$ は外向放射条件を満足する界でなければならない. (3), (4)式から

$$-\int_{\tilde{V}} [\mathbb{E}_i^a \cdot \mathbb{J}_o^b - \mathbb{H}_i^a \cdot \mathbb{J}_{om}^b - \mathbb{E}^b \cdot \mathbb{J}_o^a + \mathbb{H}^b \cdot \mathbb{J}_{om}^a] \, d^3x$$

$$= \oint_S [\mathbb{E}_i^a \times \mathbb{H}^b - \mathbb{E}^b \times \mathbb{H}_i^a] \cdot n \, dS. \qquad (5)$$

(1), (3)式から.

$$\int_V [\mathbb{E}_s^a \cdot \mathbb{J}_o^b - \mathbb{H}_s^a \cdot \mathbb{J}_{om}^b] \, d^3x = \oint_S [\mathbb{E}_s^a \times \mathbb{H}^b - \mathbb{E}^b \times \mathbb{H}_s^a] \cdot n \, dS. \qquad (6)$$

また(5), (6)式から.

$$\int_V [\mathbb{E}_s^a \cdot \mathbb{J}_o^b - \mathbb{H}_s^a \cdot \mathbb{J}_{om}^b] \, d^3x - \int_{\tilde{V}} [\mathbb{E}_i^a \cdot \mathbb{J}_o^b - \mathbb{H}_i^a \cdot \mathbb{J}_{om}^b - \mathbb{E}^b \cdot \mathbb{J}_o^a + \mathbb{H}^b \cdot \mathbb{J}_{om}^a] \, d^3x$$

$$= \oint_S [\mathbb{E}_t^a \times \mathbb{H}^b - \mathbb{E}^b \times \mathbb{H}_t^a] \cdot n \, dS. \qquad (7)$$

以後 (1), (6), (7) 式を基本式として用いる.

## 2-1. 完全導体による境界値問題

図1(a)で領域$\bar{V}$は完全導体であるとし、又波源aは領域$V$内に存在するとする。始めに波源bとして有限の方向性能率を持つ点電流源を考える。

$$\mathbb{J}_0^b = \hat{i}_V \delta(x - x_V) \tag{8}$$

ここで、$x_V \in V$, $\hat{i}_V$は電流の方向を向いている単位ベクトルである。(7)式から、散乱電界の表示として次式を得る。

$$\hat{i}_V \cdot \mathbb{E}_s^a(x_V) = -\oint_S [\mathbb{E}_e^b(x, x_V) \times \mathbb{H}_t^a] \cdot n \, dS \tag{9}$$

$\mathbb{E}_e^b(x, x_V)$の意味は、$x_V$点にある点電流源による電界を意味する。

又、

$$\mathbb{J}_0^b = \hat{i}_{\bar{V}} \delta(x - x_{\bar{V}}) \tag{10}$$

$$x_{\bar{V}} \in \hat{V}$$

を(7)式に適用すると、

$$-\hat{i}_{\bar{V}} \cdot \mathbb{E}_i^a(x_{\bar{V}}) = -\oint_S [\mathbb{E}_e^b(x, x_{\bar{V}}) \times \mathbb{H}_t^a] \cdot n \, dS. \tag{11}$$

この場合の$\mathbb{E}_e^b(x, x_{\bar{V}})$は、

$$\mathbb{E}_e^b(x, x_{\bar{V}}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi k^2} (k^2 + \nabla\nabla\cdot) G(x, x_{\bar{V}}) \hat{i}_{\bar{V}} \tag{12}$$

$$G(x, x_{\bar{V}}) = e^{-jk|x - x_{\bar{V}}|} / |x - x_{\bar{V}}|. \tag{13}$$

また、 $\mathbb{K}_e^a \equiv n \times \mathbb{H}_t^a$ : 全表面電流密度

とすると (11) は.

$$\mathbb{i}_{\tilde{v}} \cdot \mathbb{E}_i^a(\mathbb{x}_{\tilde{v}}) = \frac{j\omega\mu}{4\pi k^2} \oint_S \mathbb{K}_e^a \cdot \left[ (k^2 + \nabla\nabla\cdot) G(\mathbb{x}, \mathbb{x}_{\tilde{v}}) \mathbb{i}_{\tilde{v}} \right] dS \tag{14}$$

となる. この式より. 未知数であるS上の全表面電流密度が求められる.

あるいは, 点磁流源を考えることもできる.

$$\mathbb{J}_{0m}^b = \mathbb{i}_v \, \delta(\mathbb{x} - \mathbb{x}_v) \tag{15}$$

(7)式から. 散乱磁界は.

$$-\mathbb{i}_v \cdot \mathbb{H}_s^a(\mathbb{x}_v) = -\oint_S \left[ \mathbb{E}_m^b(\mathbb{x}, \mathbb{x}_v) \times \mathbb{H}_t^a \right] \cdot \mathbb{n} \, dS. \tag{16}$$

$\mathbb{E}_m^b(\mathbb{x}, \mathbb{x}_v)$ は $\mathbb{x}_v$ 点の点磁流源による電界を意味する. 又.

$$\mathbb{J}_{0m}^b = \mathbb{i}_{\tilde{v}} \, \delta(\mathbb{x} - \mathbb{x}_{\tilde{v}}) \tag{17}$$

$$\mathbb{E}_m^b(\mathbb{x}, \mathbb{x}_{\tilde{v}}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[ G(\mathbb{x}, \mathbb{x}_{\tilde{v}}) \mathbb{i}_{\tilde{v}} \right] \tag{18}$$

なる磁流源を考えると. (7)式より.

$$\mathbb{i}_{\tilde{v}} \cdot \mathbb{H}_i^a(\mathbb{x}_{\tilde{v}}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbb{K}_e^a \cdot \nabla \times \left[ G(\mathbb{x}, \mathbb{x}_{\tilde{v}}) \mathbb{i}_{\tilde{v}} \right] dS \tag{19}$$

となり. この式からも又. 未知数 $\mathbb{K}_e^a$ を定めることができる.

あるいは, (6)式に波源 b として、(10) あるいは (17) を適用することによって. 又. S上の境界条件

$$\mathbb{E}_t^a \times \mathbb{n} - (\mathbb{E}_s^a + \mathbb{E}_i^a) \times \mathbb{n} = 0 \tag{20}$$

を用いて S上の散乱磁界を求めることもできる.

$$\oint_S \mathbb{E}^b_{e_m}(x, x_{\tilde{v}}) \times \mathbb{H}^a_S \cdot n\, dS = -\oint_S \mathbb{E}^a_i \times \mathbb{H}^b_{e_m}(x, x_{\tilde{v}}) \cdot n\, dS \quad (21)$$

未知数は $n \times \mathbb{H}^a_S$ のみであり、この式を行列解の基本式とすることもできる。

又、(6)式に波源bとして(8)，(15)式を用いると各々次の散乱電磁界の表示式を得る。

$$i_v \cdot \mathbb{E}_S(x_v) = -\oint_S \left[\mathbb{E}^a_i \times \mathbb{H}^b_e(x, x_v) + \mathbb{E}^b_e(x, x_v) \times \mathbb{H}^a_S\right] \cdot n\, dS \quad (22)$$

$$-i_v \cdot \mathbb{H}_S(x_v) = -\oint_S \left[\mathbb{E}^a_i \times \mathbb{H}^b_m(x, x_v) + \mathbb{E}^b_m(x, x_v) \times \mathbb{H}^a_S\right] \cdot n\, dS \quad (23)$$

結局、この場合の境界値問題では、(14)あるいは(19)式を用いて未知数の $n \times \mathbb{H}^a_t$ を，又は(21)式を用いて $n \times \mathbb{H}^a_S$ を求めることができる。そして散乱電磁界は、(9)，(16)あるいは(22)，(23)式によって表わされる。

## 2—2. 多くの媒質が存在する場合(完全導体を含まない)の境界値問題.

従来の誘電体散乱問題は $j\omega(\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbb{E}_t$ を散乱電磁界の波源と考えて、積分方程式の解を求めているが[3]、行列解の観点からすれば、方程式の定義域を体積よりも、次元の低い面…境界面…にとる方が望ましい。始めに唯一種類の異なる媒質が存在する

場合について述べる．波源aは領域
$V_1$ 内に存在するとする．まず(7)式で，

$V \to V_1$，$\hat{V} \to V_2$ として(8)式の波源

を用いて

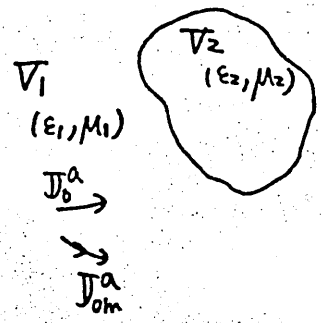


図　2

$$\mathbf{i}_{V_1} \cdot \mathbb{E}_S^a(\mathbf{x}_{V_1}) = \oint_S \left[ \mathbb{E}_t^a \times \mathbb{H}_{e(1)}^b(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_1}) - \mathbb{E}_{e(1)}^b(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_1}) \times \mathbb{H}_t^a \right] \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{24}$$

ここに．

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{E}_{e(1)}^b(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_1}) &= -\frac{j\omega\mu_1}{4\pi k_1^2}(k_1^2 + \nabla\nabla\cdot) G^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_1})\, \mathbf{i}_{V_1} \\ \mathbb{H}_{e(1)}^b(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_1}) &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[ G^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_1})\, \mathbf{i}_{V_1} \right] \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} G^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_1}) &= e^{-jk_1|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{V_1}|} / |\mathbf{x}-\mathbf{x}_{V_1}| \\ k_1 &= \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

であって．これは，全空間が $V_1$ と同じ媒質 $(\varepsilon_1, \mu_1)$ で満たされている場合に $V_1$ 領域におかれた電流源(8)式によって生ずる電磁界を意味する．

(24)式のS上の $\mathbb{E}_t^a \times \mathbf{n}$，$\mathbf{n} \times \mathbb{H}_t^a$ は未知数である．これを求める式として

まず(7)式で波源bとして代りの(10)式を用いる．

$$-\mathbf{i}_{V_2} \cdot \mathbb{E}_i^a(\mathbf{x}_{V_2}) = \oint_S \left[ \mathbb{E}_t^a \times \mathbb{H}_{e(1)}^b(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_2}) - \mathbb{E}_{e(1)}^b(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{V_2}) \times \mathbb{H}_t^a \right] \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{27}$$

次に(1)式で $V \to V_2$，$\hat{V} \to V_1$ として波源(10)式を用いると

$$0=\oint_S\left[E_t^a\times H_{e(2)}^b(x,x_{V_1})-E_{e(2)}^b(x,x_{V_1})\times H_t^a\right]\cdot n\,dS \tag{28}$$

となる. $E_{e(2)}^b(x,x_{V_1})$, $H_{e(2)}^b(x,x_{V_1})$ は. (25), (26) 式で. 媒質 $(\varepsilon_1,\mu_1)\to(\varepsilon_2,\mu_2)$ としたときの電磁界である. この (27), (28) 式を行列解の基本式として. 未知数である S 上の $E_t^a\times n$, $n\times H_t^a$ を決定できる. $V_2$ 内の電界は. (1) で. 波源 (8) を用いて.

$$i_{V_2}\cdot E_t^a(x_{V_2})=\oint_S\left[E_t^a\times H_{e(2)}^b(x,x_{V_2})-E_{e(2)}^b(x,x_{V_2})\times H_t^a\right]\cdot n\,dS. \tag{29}$$

波源 b として (8), (10) の電流源を用いたが. 代りに. (15), (17) 式の磁流源を用いると. 同様な考えによって. (24), (29) は磁界の表示式になる. (27), (28) の未知数を決定する式も, 相似な式となる.

この方法は. 多種類の媒質 [$V_i$ 内に $(\varepsilon_i,\mu_i)$, $i=1,2,\cdots N$] が存在する場合に, 容易に拡張できる. 波源 a は前と同様 $V_1$ にあるものとする. 又. $\bar{V}_i$ は. $V_i$ 領域を除く他のすべての領域とする. $S_i$ は領域 $V_i$ を囲む面とする. (27), (28) に対応する式として.

$$-i_{\bar{V}_1}\cdot E_i^a(x_{\bar{V}_1})=\oint_{S_1}\left[E_t^a\times H_{e(1)}^b(x,x_{\bar{V}_1})-E_{e(1)}^b(x,x_{\bar{V}_1})\times H_t^a\right]\cdot n\,dS. \tag{30}$$

$$0=\oint_{S_i}\left[E_t^a\times H_{e(i)}^b(x,x_{\bar{V}_i})-E_{e(i)}^b(x,x_{\bar{V}_i})\times H_t^a\right]\cdot n\,dS. \tag{31}$$

$i=2,3,\cdots,N$

この N 元の式から全境界面上の $E_t^a \times n$, $n \times H_t^a$ を一般に行列解法によって求めることができる。この値を用いて、各領域の電磁界が表わされる。領域 $V_1$ では、(24)式から散乱電界が求まり、波源 a の存在しない他の領域では、(29)に相当する式として、

$$i_{v_i} \cdot E_t^a(x_{v_i}) = \oint_S \left[ E_t^a \times H_{e(i)}^b(x, x_{v_i}) - E_{e(i)}^b(x, x_{v_i}) \times H_t^a \right] \cdot n \, dS \qquad (32)$$

$$i = 2, 3, \cdots, N$$

によって、各領域の全電界が表示される。

## 2-3. 完全導体を含む多種類の媒質が存在する場合の境界値問題.

この場合 2-2 の方法は適用できず、完全導体の部分を別個に考えなければならない。簡単のため図3(a)のような簡単な場合について述べる。

始めに、図3(b)のように完全導体の領域 $V_3$ をその囲まれている媒質で置換した場合の境界値問題を解く。図のように、$V_3$ が波源 a の存在する領域 $V_1$ の媒質で置換

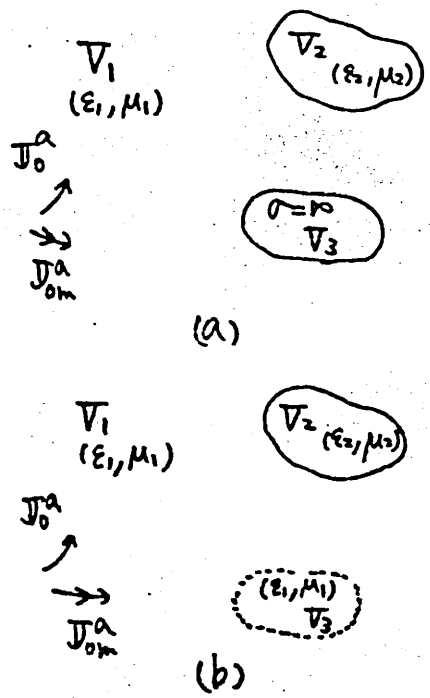



図 3

された場合には，$V_3$ 内の $E_t^a$ は，(24)式の散乱電界に $E_i^a$ を加えた値であり，$V_3$ が $V_2$ の媒質で置換された場合には，$E_t^a$ は (29)式で表わされる．そして，この $E_t^a$ が金属物体への入射電界となる．

(7)式で $V \to V_1 + V_2$，$\hat{V} \to V_3$，$S \to S_3$ 又，(10)式の波源を用いて，

$$i_{V_3} \cdot {}_2E_i^a(x_{V_3}) = \oint_{S_3} E^b_{e(1+2)}(x, x_{V_3}) \times {}_2H_t^a \cdot n dS. \qquad (33)$$

ここで，${}_2E_i^a$ は，前記 $E_t^a$ の値を用いる．又，$E^b_{e(1+2)}(x, x_{V_3})$ は，図3(b)の状態で，$V_3$ 領域内におかれた電流源による電界を意味する．(33)式から完全導体上の表面電流密度 $n \times {}_2H_t^a$ が求められる．そして，この完全導体による散乱界は，

$$i_V \cdot {}_2E_s^a(x_V) = -\oint_{S_3} E^b_{e(1+2)}(x, x_V) \times {}_2H_t^a \cdot n dS. \qquad (34)$$

従って全電界は，前述の $E_t^a$ にこの ${}_2E_s^a$ を加算した値である．

## 3. 行列解の一般論．

2. で述べた，境界面上の表面電流(あるいは磁流)密度を決定する基本式は，一般に次の形の線形作用素で表わされる．

$$\text{i)} \quad L \cdot f = h \qquad (35)$$

$$\text{ii)} \quad \left.\begin{aligned} L^{11} \cdot f^1 - L^{12} \cdot f^2 &= h^1 \\ L^{21} \cdot f^1 - L^{22} \cdot f^2 &= h^2 \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

ここに $\mathbb{L}, \mathbb{L}^{ij}$ は線形積分作用素で、一般に次の型である。

$$\mathbb{L} = \oint_S dS \; \mathbb{G}(x, x_0) \tag{37}$$

$\mathbb{G}(x, x_0)$ は既知の積分核ベクトル関数である。又、$f(x)$, $f^i(x)$ は、$\mathbb{E}^a_{t_s} \times m$ あるいは $m \times \mathbb{H}^a_{t_s}$ であって $S$ 上の接線方向ベクトルの未知関数である。$h(x_0)$, $h^i(x_0)$ は既知関数である。(14), (19), (20)式は i) の例であり、(27)(28)式は ii) の例である。始めに i) の行列解を示す。未知関数を次式のように展開する。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \left[ i_{t_1} a_n^1 f_n^1(x) + i_{t_2} a_n^2 f_n^2(x) \right] \tag{38}$$

$i_{t_1}, i_{t_2}$ は境界面 $S$ 上で直交する接線方向単位ベクトルで、$a_n^i$ $(i=1,2)$ は、未知の複素定数、$f_n^i(x)$ $(i=1,2)$ は展開関数で、互いに線形独立なものでなくては、ならないが、必ずしも直交関数である必要はなく、できるだけ少ない個数で、$f(x)$ を良く近似できるものを用いることが望ましい。

(38)を(35)に代入して:

$$\sum_{n=1}^{N} \left[ a_n^1 (\mathbb{L} \cdot i_{t_1} f_n^1) + a_n^2 (\mathbb{L} \cdot i_{t_2} f_n^2) \right] = h(x_0). \tag{39}$$

次に(39)式の両辺と重み関数 $g_m(x_0)$ との内積をとる。

$$\left.\begin{aligned} {}_l C_{mn} &\equiv \int_{\tilde{v}} (\mathbb{L} \cdot i_{t_l} f_n^l) \, g_m \, d^3 x_0 \\ & \quad (l = 1, 2) \\ h_m &= \int_{\tilde{v}} h(x_0) \, g_m(x_0) \, d^3 x_0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

とすると.

$$\sum_{n=1}^{N}\left[{}_1C_{mn}a_n^1+{}_2C_{mn}a_n^2\right]=h_m. \tag{41}$$

重み関数を一般には、未知数の数 $2N$ 個とると(41)式は次の行列式になる.

$$[\mathbb{C}_{mn}][a_n]=[h_m] \tag{42}$$

ここで.

$$[\mathbb{C}_{mn}]=\begin{bmatrix}({}_1C_{11},{}_2C_{11}),({}_1C_{12},{}_2C_{12}),\cdots\cdots\\({}_1C_{21},{}_2C_{21}),\cdots\cdots\cdots\\\vdots\\({}_1C_{2N,1},{}_2C_{2N,1}),\cdots\cdots\cdots\end{bmatrix} \tag{43}$$

$$[a_n]=\begin{bmatrix}(a_1^1)\\(a_1^2)\\\vdots\\(a_N^1)\\(a_N^2)\end{bmatrix}\qquad[h_m]=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_{2N}\end{bmatrix}. \tag{44}$$

結局(42)式から、未知の複素定数が次式において与えられる.

$$[a_n]=[\mathbb{C}_{mn}]^{-1}[h_m] \tag{45}$$

あるいは、(37)式の $G(x,x_0)$、および $h(x_0)$ が、波源bの電(磁)流源の方向ベクトルを含んでいるので、この方向を変化することによって、(42)式の代りに、$N\times N$ 行列の連立方程式とすることも可能である.

次に ii) の行列解を示す. i). と同様に未知関数 $f^i$ $(i=1,2)$ を展開する.

$$\mathbb{f}^{i}(\mathbb{x}) = \sum_{n=1}^{N} \left[ \mathbb{i}_{t_1}\, {}^{i}a_n^{1}\, {}^{i}f_n^{1} + \mathbb{i}_{t_2}\, {}^{i}a_n^{2}\, {}^{i}f_n^{2} \right] \tag{46}$$

$(i=1,2)$

これを(36)式に代入し重み関数 $g_m(\mathbb{x}_{\bar{v}})$ $m=1,2,\cdots,2N$ との内積をとる.

$$ {}_{\ell}C_{mn}^{ij} \equiv \int_{\bar{v}} \left( \mathbb{L}^{ij} \cdot \mathbb{i}_{t_\ell}\, {}^{j}f_n^{\ell} \right) g_m \, d^3x_{\bar{v}} \tag{47}$$

$(\ell, i, j = 1, 2)$

$$h_m^{i} = \int_{\bar{v}} h^{i}(\mathbb{x}_{\bar{v}})\, g_m(\mathbb{x}_{\bar{v}})\, d^3x_{\bar{v}} \tag{48}$$

とすると.

$$\left.\begin{aligned} [\mathbb{C}_{mn}^{11}][{}^{1}\mathbb{a}_n] + [\mathbb{C}_{mn}^{12}][{}^{2}\mathbb{a}_n] &= [h_m^{1}] \\ [\mathbb{C}_{mn}^{21}][{}^{1}\mathbb{a}_n] + [\mathbb{C}_{mn}^{22}][{}^{2}\mathbb{a}_n] &= [h_m^{2}] \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

故に.

$$\begin{bmatrix} [{}^{1}\mathbb{a}_n] \\ [{}^{2}\mathbb{a}_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbb{C}_{mn}^{11}] & [\mathbb{C}_{mn}^{12}] \\ [\mathbb{C}_{mn}^{21}] & [\mathbb{C}_{mn}^{22}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [h_m^{1}] \\ [h_m^{2}] \end{bmatrix}. \tag{50}$$

あるいは.

$$\left.\begin{aligned} [{}^{1}\mathbb{a}_n] &= \left( [\mathbb{C}_{mn}^{21}] - [\mathbb{C}_{mn}^{22}][\mathbb{C}_{mn}^{12}]^{-1}[\mathbb{C}_{mn}^{11}] \right)^{-1} \\ &\quad \times \left( [h_m^{2}] - [\mathbb{C}_{mn}^{22}][\mathbb{C}_{mn}^{12}]^{-1}[h_m^{1}] \right) \\ [{}^{2}\mathbb{a}_n] &= [\mathbb{C}_{mn}^{12}]^{-1} \left( [h_m^{1}] - [\mathbb{C}_{mn}^{11}][{}^{1}\mathbb{a}_n] \right) \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

によって未知複素定数が求められる. $\mathbb{L}$ は積分作用素であるので展開関数として. 次のようなものを考えると. 計算は簡略になる.

境界面Sを N個の小部分に分割し、$f(x)$は、その小部分内では、一定とする。即ち、

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & n\text{番目の小部分面積内} \\ 0 & \text{他の表面} \end{cases} \tag{52}$$

又重み関数として、次式のデルタ関数を用いると、内積は簡単になる。

$$g_m(x_{\bar{m}}) = \delta(x_{\bar{m}} - x_m) \tag{53}$$

(40)式は、

$$\left.\begin{aligned} {}_{\ell}C_{mn} &\equiv \int_{\Delta S_n} i_{t\ell} \cdot G_T(x, x_m)\, dS \\ &(\ell = 1, 2) \\ h_m &\equiv h(x_m). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

(47), (48)式は、

$$\left.\begin{aligned} {}_{\ell}C^{ij}_{mn} &\equiv \int_{\Delta S_n} i_{t\ell} \cdot G^{ij}(x, x_m)\, dS \\ &(\ell, i, j = 1, 2) \\ h^i_m &\equiv h^i(x_{\bar{m}}) \\ &(i = 1, 2) \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

となる。

なお、多種類の媒質を含む場合の(30)(31)式、更にその中に導体が含まれている場合の境界値問題(2-3)も同様な方法で、行列解を得ることができるが、煩雑になるので、ここでは、省略する。

## 4. 完全導体の二次元境界値問題

この場合、H波とE波を完全に分離して扱うことができる。又、基本式の(1)、(6)、(7)式の体積積分は面積分に、面積分は、線積分になる。

### 4-1, H波

媒質$(\varepsilon, \mu)$の自由空間中に存在する波源によるH波は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} H_z(\mathbf{r}) &= \int_S [j\omega\varepsilon J_{om,z}\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') + (\mathbf{i}_z \times \mathbf{J}_{0,tv})\cdot\nabla\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\, dS' \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{j\omega\mu}{k^2}\int_S [k^2 \mathbf{J}_{0,tv}\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') + (\mathbf{J}_{0,tv}\cdot\nabla)\nabla\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\, dS' \\ &\quad + \int_S [\nabla\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') \times \mathbf{i}_z]\, J_{om,z}\, dS' \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

ここに$\mathbf{r}$は二次元座標、$\mathbf{J}_{0,tv}$は、z軸に垂直面内の接線の電流源、

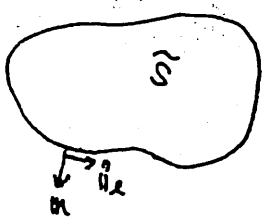
$\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$は、無限遠での外向放射条件を満足する二次のグリーン関数で

$$\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\delta}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|). \quad (57)$$

$H_0^{(2)}$は零次の第二種ハンケル関数である。

始めに波源bとして、

$$\mathbf{J}_{om}^b = \mathbf{i}_z\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \quad (58)$$




で選ぶ。$\mathbf{r}_0$は、$\mathbf{r}_s \in S$ or $\mathbf{r}_s \in \tilde{S}$ である。

$$\left.\begin{aligned} H_{m,z}^b(\mathbf{r}) &= j\omega\varepsilon\,\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \\ \mathbf{E}_m^b(\mathbf{r}) &= \nabla\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\times\mathbf{i}_z \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

(15)

三次元の (16), (19) に対応する式として.

$$\left.\begin{aligned} H^a_{s,z}(W_s) &= \oint_C H^a_{t,z}\left[\, i_{l\ell}\cdot E^b_m(W, W_s)\right] dl \\ -H^a_{i,z}(W_s) &= \oint_C H^a_{t,z}\left[\, i_{l\ell}\cdot E^b_m(W, W_s)\right] dl . \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

(59) 式を用いて.

$$\left.\begin{aligned} -H^a_{s,z}(W_s) &= \oint_C H^a_{t,z}\left[\, i_n\cdot \nabla\phi(W, W_s)\right] dl \\ H^a_{i,z}(W_s) &= \oint_C H^a_{t,z}\left[\, i_n\cdot \nabla\phi(W, W_s)\right] dl . \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

次に電流源として.

$$J^b_0 = i_{l_0}\,\delta(W - W_0) \quad (62)$$

を置くと.

$$\left.\begin{aligned} H^b_{e,z}(W) &= (i_z \times i_{l_0})\cdot \nabla\phi(W, W_0) \\ E^b_e(W) &= \frac{j\omega\mu}{k^2}\left[k^2\phi(W, W_0) i_{l_0} + (i_{l_0}\cdot\nabla)\nabla\phi(W, W_0)\right] \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

三次元の (9), (11) に対応する式として.

$$\left.\begin{aligned} -i_{l_s}\cdot E^a_s(W_s) &= \oint_C H^a_{t,z}\left[\, i_{l\ell}\cdot E^b_e(W, W_s)\right] dl \\ i_{l_s}\cdot E^a_i(W_s) &= \oint_C H^a_{t,z}\left[\, i_{l\ell}\cdot E^b_e(W, W_s)\right] dl \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

又は (21) に対応する式として.

$$\oint_C H^a_{s,z}\, E^b_{e_m,l}(W, W_s)\, dl = -\oint_C E^a_{i,l}\, H^b_{e,z}(W, W_s)\, dl \quad (65)$$

(60), (64) の第一式より. $H^a_{t,z}$ を, (65) 式より. $H^a_{s,z}$ が求められる.

各々. 未知数 $H^a_{t,z}$, $H^a_{s,z}$ を適当な関数系で展開する.

$$H^a_{t,z} = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \tag{66}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[a_n] = [C_{mn}]^{-1}[G_m] \\
&C_{mn} \equiv \int_{\tilde{S}} dS\, g_m(W_{\tilde{S}}) \oint_C f_n E^b_{e_{m,l}}(W, W_{\tilde{S}})\, dl \\
&G_m \equiv \begin{cases} -\int_{\tilde{S}} H^a_{i,z}(W_{\tilde{S}})\, g_m(W_{\tilde{S}})\, dS \quad \cdots (60)_2 \\ \text{あるいは} \\ \int_{\tilde{S}} i_{l_{\tilde{S}}} \cdot E^a_i(W_{\tilde{S}})\, g_m(W_{\tilde{S}})\, dS \quad \cdots (64)_2 \\ \text{あるいは.} \\ -\int_S dS\, g_m(W_{\tilde{S}}) \oint_C E^a_{i,l} H^b_{e_{m,z}}(W, W_{\tilde{S}})\, dl \quad \cdots (65) \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$\therefore\ H^a_{t,z} = [f_n]^T [C_{mn}]^{-1} [G_m] \tag{68}$$

例題1. 完全導体の正三角柱による平面波の散乱

入射平面波(H波)

$$\left.\begin{aligned} H^i_{i,z} &= k e^{-jk(x_P \cos\phi - x \cos\phi)} \\ E_i &= \frac{jz_0}{k} i_z \times \nabla H_{i,z} \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

$f_n$は境界上でのstep関数を用いた. 又.

$$g_m(W) = \delta(W - W_m) \tag{70}$$

但し. $W_m$は. $\tilde{S}$の内部から境界上に接近させた極限の点とする. (図6参照)

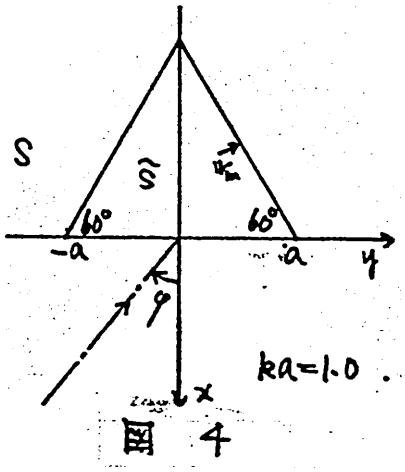


図 4

$$C_{mn} = \int_{\Delta C_n} E^{b}_{e_{m,t}}(W, W_m)\, dl$$

$$G_m = \begin{cases} -H^{a}_{i,z}(W_m) & \cdots (60)_2 \\ \text{あるいは.} & \\ E^{a}_{i}(W_m)\cdot i_{l_m} & \cdots (64)_2 \\ \text{あるいは.} & \\ -\oint_C E^{a}_{i,t} H^{b}_{e_{m,z}}(W, W_m)\, dl & \cdots (65) \end{cases} \qquad (71)$$

4－2．E波．

(56)に対応する式は．

$$E_z(W) = \int_S [\, j\omega\mu J_{0,z}\phi(W,W') + (i_z \times \mathbb{J}_{om,tv})\cdot\nabla'\phi(W,W')\,]\, dS'$$

$$H_t(W) = \frac{j\omega\varepsilon}{k^2}\int_S [\, k^2 \mathbb{J}_{om,tv}\phi(W,W') + (\mathbb{J}_{om,tv}\cdot\nabla)\nabla\phi(W,W')\,]\, dS' - \int_S [\, \nabla\phi(W,W') \times \mathbb{J}_{0,z}\,]\, dS'. \qquad (72)$$

始めに波源bとして．

$$\mathbb{J}_0^{b} = i_z\, \delta(W - W_0) \qquad (73)$$

を選ぶ．

$$E^{b}_{e,z}(W) = j\omega\mu\,\phi(W, W_0)$$

$$H^{b}_{e}(W) = i_z \times \nabla\phi(W, W_0). \qquad (74)$$

三次元の(9)，(11)に対応する式として次式を得る．

$$E^a_{s,z}(W_s) = \oint_C H^a_{t,\ell} E^b_{e,z}(W, W_s)\, dl$$
$$-E^a_{i,z}(W_{\bar{s}}) = \oint_C H^a_{t,\ell} E^b_{e,z}(W, W_{\bar{s}})\, dl \qquad (75)$$

次に磁流源として.

$$J^b_{om} = i_{\ell_0}\, \delta(W - W_0) \qquad (76)$$

を選ぶと.

$$E^b_{m,z}(W) = -(i_z \times i_{\ell_0}) \cdot \nabla \phi(W, W_0)$$
$$H^b_m(W) = \frac{j\omega\varepsilon}{k^2}\left[k^2 \phi(W, W_0) i_{\ell_0} + (i_{\ell_0} \cdot \nabla)\nabla\phi(W, W_0)\right] \qquad (77)$$

≡次元の(16)(19)に対応する式として.

$$-i_{\ell_s} \cdot H^a_s(W_s) = \oint_C H^a_{t,\ell} E^b_{m,z}(W, W_s)\, dl$$
$$i_{\ell_{\bar{s}}} \cdot H^a_i(W_{\bar{s}}) = \oint_C H^a_{t,\ell} E^b_{m,z}(W, W_{\bar{s}})\, dl \qquad (78)$$

(21)に対応する式

$$\oint_C H^a_{s,\ell} E^b_{m,z}(W, W_{\bar{s}})\, dl = -\oint_C E^a_{i,z} H^b_{m,\ell}(W, W_{\bar{s}})\, dl. \qquad (79)$$

(75),(78)の右辺式の $H^a_{t,\ell}$, (79)式の $H^a_{s,\ell}$ をH波の場合と同様展開する.

$$H^a_{t,\ell} = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \qquad (80)$$

$$[a_n] = [C_{mn}]^{-1}[G_m]$$
$$C_{mn} \equiv \int_{\tilde{S}} dS\, g_m(W_{\bar{s}}) \oint_C f_n E^b_{m,z}(W, W_{\bar{s}})\, dl \qquad (81)$$

$$G_m \equiv \left\{ \begin{array}{l} -\int_S E^a_{i,z}(W_S)\, g_m(W_S)\, dS \cdots (75)_2 \\ \text{あるいは} \\ \int_S \hat{n}_{l,S} \cdot H^a_i(W_S)\, g_m(W_S)\, dS \cdots (79)_2 \\ \text{あるいは.} \\ -\int_S dS\, g_m(W_S) \oint_C E^a_{i,z} H^b_{e,l}(W, W_S)\, dl \end{array} \right\} \quad (81)$$

$$\cdots (79)$$

$$H^a_{t,l} = [f_n]^T [C_{mn}]^{-1} [G_m] \quad (82)$$

例題2. 完全導体の正三角柱による平面波の散乱.

入射平面波.

$$\left. \begin{array}{l} E_{i,z} = k\, e^{-jk(y\sin\varphi - x\cos\varphi)} \\ H_i = \dfrac{1}{jkZ_0}\, \hat{n}_z \times \nabla_t E_{i,z} \end{array} \right\} \quad (83)$$

$f_n$, $g_m$ は. 例題1のH波の場合と同じ関数を用いる.

(図7参照)

4-3. 境界面が非常に薄い場合.

この節では. 簡単のため. $f_n$, $g_m$ の関数系は. 例題1で用いたものを使うことにする. 従って. 物体の磁界成分は. 境界上のN個に分割された小区間内で一定である. 始めにH波の場合について述べる. (61)の形式から. 次式の近似が. $k\Delta \sim 0$ のとき成り立つ.

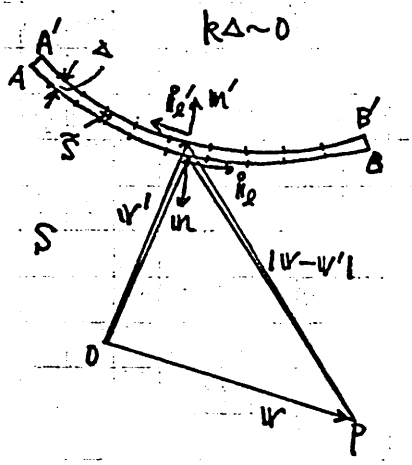



図 5.

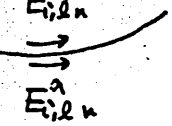
$$H^a_{s,z}(W_s) \simeq -\int_{AB} (H^a_{t,z} - H^a_{t,z}) [m \cdot \nabla \phi(W, W_s)] dl \qquad (84)$$

$H^a_{t,z}$ は. AB上. $H^{a'}_{t,z}$ は A'B'上で. 丁度対称する位置での値である. 結局磁界の差の値が求まればよい. この場合は. (65)式の上符号の式. 即ち. 波源 b として. 電流源 (62)式を用いたものを使うと. N/2 個の重み関数系において. 次の N/2 × N/2 行列の式を得る.

$$[(H^a_{s,z} - H^{a'}_{s,z})_n] = [C_{mn}]^{-1} \left[\frac{1}{2}[(E^a_{i,l} - E^{a'}_{i,l})_m] + [G^e_{mn}][(E^a_{i,l} + E^{a'}_{i,l})_n]\right] \qquad (85)$$

ここに. $[C_{mn}]$, $[G^e_{mn}]$ は N/2 × N/2 行列, 他の行列は N/2 × 1 行列である. 右辺の $[C_{mn}]^{-1}$ を除く項は. (65)式の右辺の積分を. N 個の小区間に分割し. 表側と裏側の入射電界の和と差の成分に. 分解して表示したものである.

散乱問題では. $E^a_{i,l} = -E^{a'}_{i,l}$ で右辺第1項は. 0になる.




次に E 波の場合を考える. (84)と(85)の第1式から.

$$E^a_{s,z}(W_s) \simeq j\omega\mu \int_{AB} (H^a_{t,l} + H^{a'}_{t,l}) \phi(W, W_s) dS \qquad (86)$$

$(H^a_{t,l} + H^{a'}_{t,l})$ を求めればよいので. (84)式の上符号の式から.

$$[(H^a_{t,l} + H^{a'}_{t,l})_n] = [C_{mn}]^{-1} \left[\frac{1}{2}[(E^a_{i,z} + E^{a'}_{i,z})_m] + [G^o_{mn}][(E^a_{i,z} - E^{a'}_{i,z})_n]\right] \qquad (87)$$

同様に、散乱問題の場合は、右辺第二項の寄与はなくなる。

尚、平板の場合は

$$[G^{e}_{mn}]=[G^{o}_{mn}]=0 \qquad (8P)$$

である。

例題3、円柱の一部分による平面波の散乱

H波：図8, 9 $(ka=2)$

E波：図10, 11

表面電流密度は、入射角0°の場合の、中央位置の電流値で規格化し、散乱電力指向特性は、入射角0°の場合の方位角0°のときの値で規格化されている。

## 5. 結言。

以上で、相反定理を用いた境界値問題の行列解についての一般論、および、完全導体による二次元散乱の例題について述べてきた。尚、edgeのある場合のE波の問題では、電流値が特異性を示すことが良く知られているが、これをより精度よく近似するための手段等については現在検討中である。

# 文献

(1) K.K. MEI & J. BLADEL

"Scattering by Perfectly-Conducting Rectangular Cylinders"

I.E.E.E TRANS. AP. 1963

(2). MOGENS G. ANDREASEN

"Scattering from Parallel Metallic Cylinders with Arbitrary Cross Sections" I.E.E.E TRAN. AP. 1964

(3) JACH. H. RICHMOND

"Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape" I.E.E.E TRAN. AP. 1964

(4) MOGENS G. ANDREASEN

"Scattering from Bodies of Revolution"

I.E.E.E TRAN. AP. 1964

(5) K.K. MEI

"On the Integral Equations of Thin Wire Antennas"

I.E.E.E TRAN. AP. 1965

(6) R.F. Havrington

"Matrix Methods for Field Problems"

Proc. I.E.E.E. Vol. 55 1967

(7) 橋本・藤沢 "電磁界境界値問題のマトリックス定式化と Babinetの原理の拡張" 昭43 連大 11.

(8) 岡本・藤沢 "電磁界境界値問題の相反定理を用いたマトリックス解法" 昭43. 連大 1152.

(9) KEIGO IIZUKA & JUI L. YEN
"Surface Currents on Triangular and Square Metal Cylinders" I.E.E.E. TRANS. AP-15 Nov. 1967

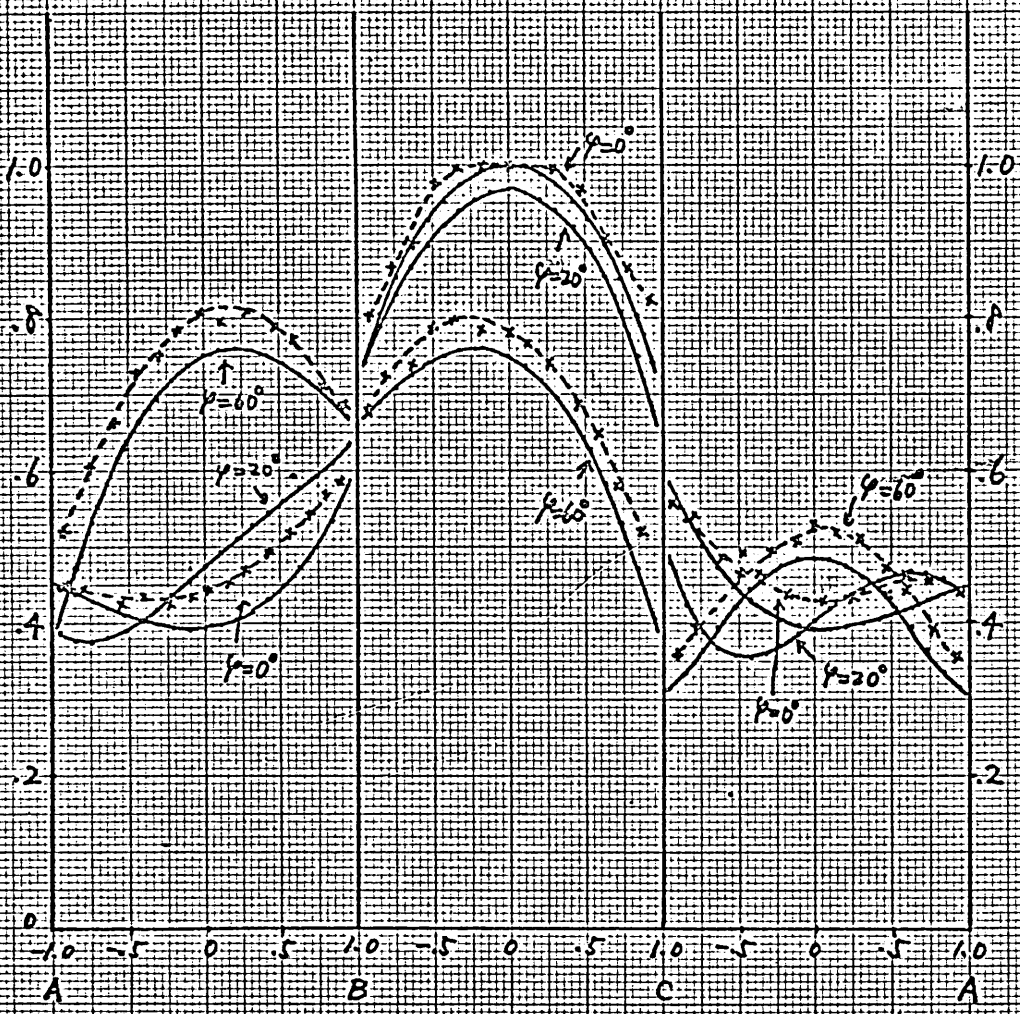
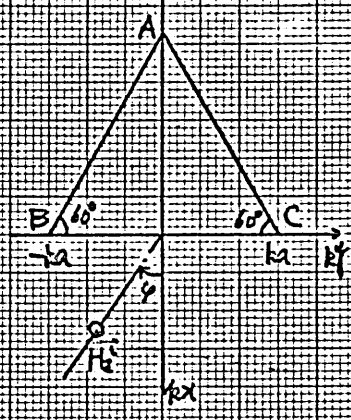



図 6. 完全導体三角柱による平面波(H波)の散乱

正規化全表面電流密度

パラメータ: 入射角 φ, ka=1.0




——— 行列解

-×-×-×- 実験値[9] φ=0°, 60°

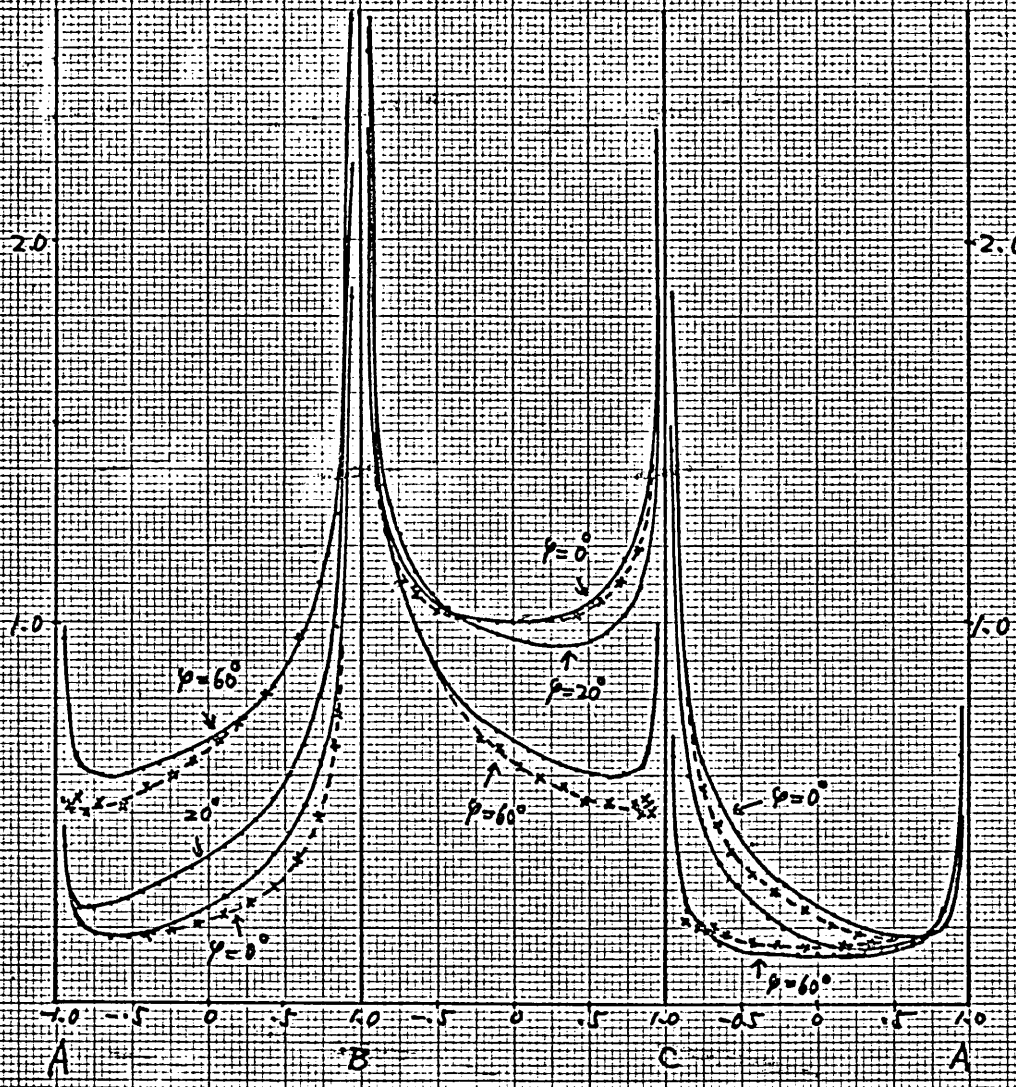



図7. 完全導体三角柱による平面波(E波)の散乱.

正規化全表面電流密度.

パラメータ：入射角 $\varphi$　$ka=1.0$

———— 行列解

—×—×—×— 実験値[9]　$\varphi=0°, 60°$

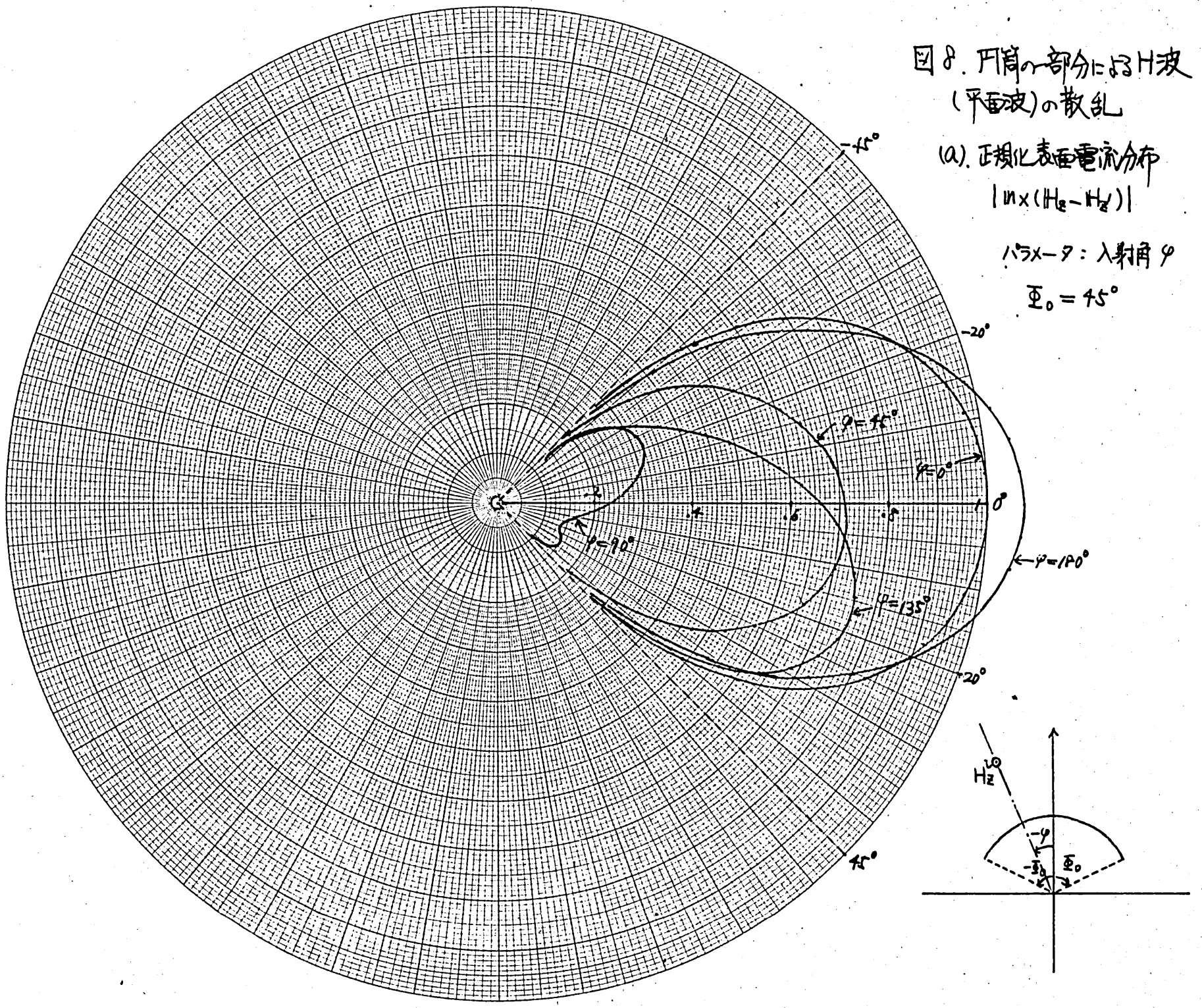



図8. 円筒の一部分によるH波（平面波）の散乱

(a). 正規化表面電流分布

$|n \times (H_z - H_z')|$

パラメータ：入射角 $\varphi$

$\Theta_0 = 45°$

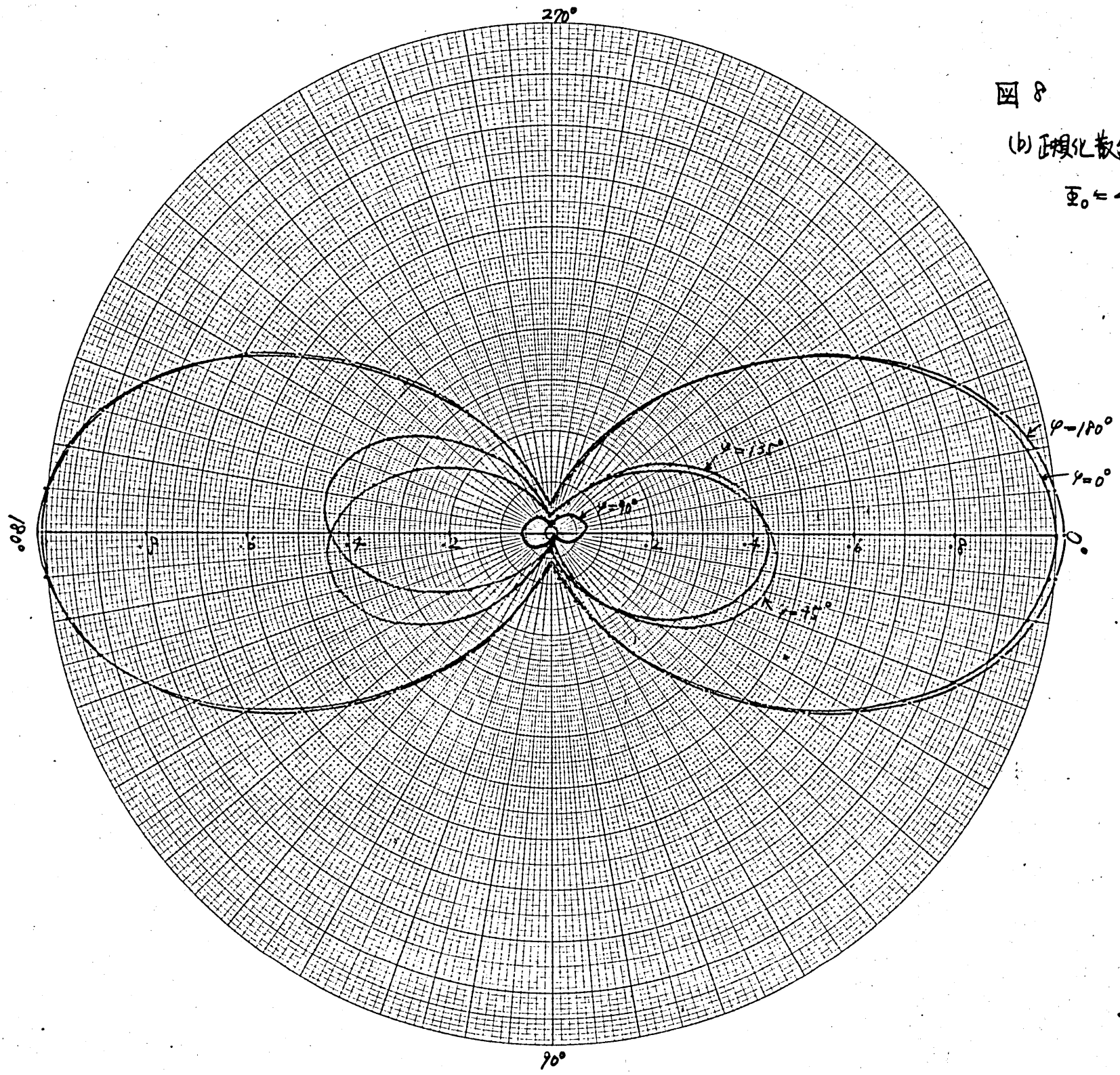



図 8

(b) 正規化散乱電力指向特性

$\theta_0 = 45°$

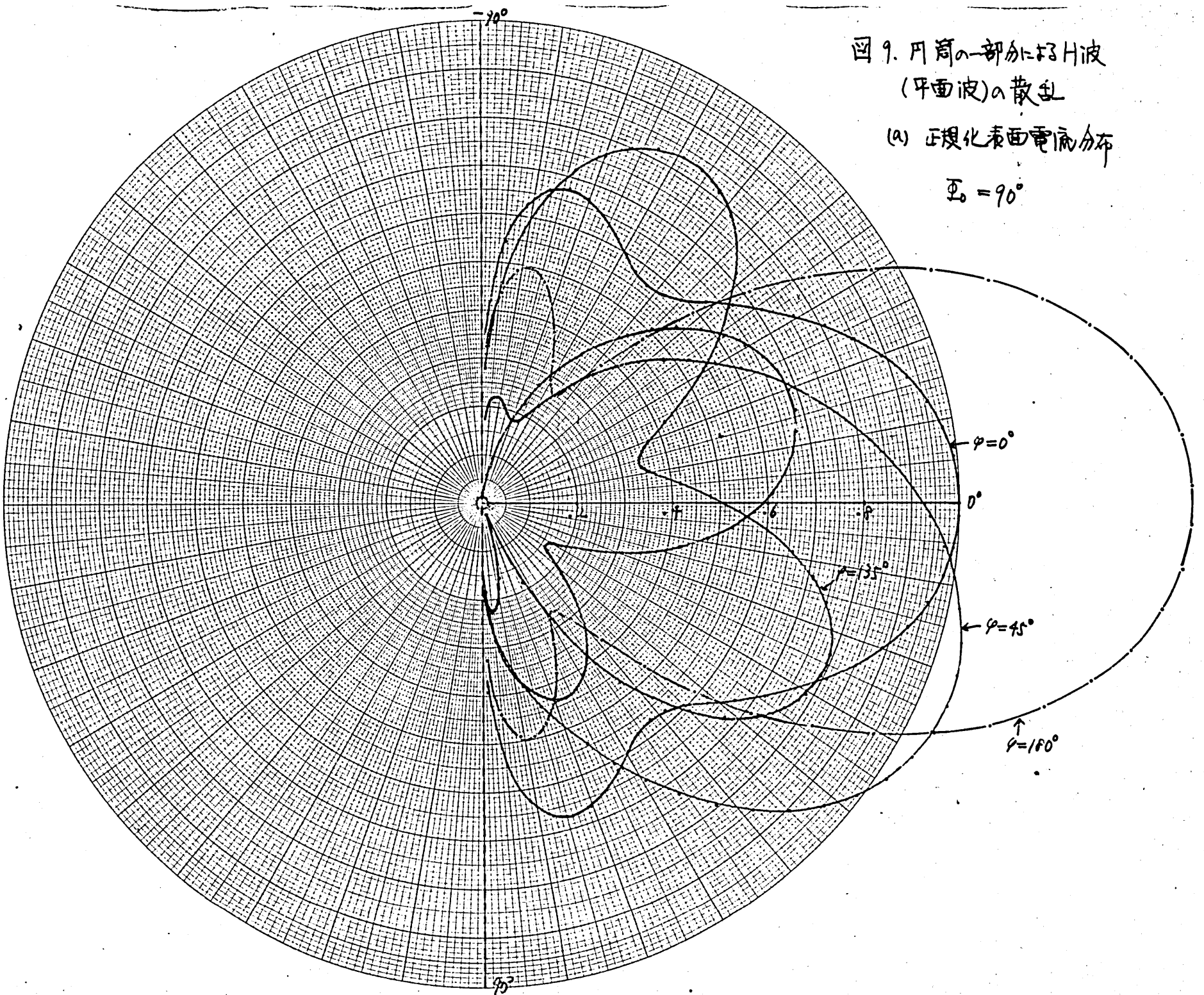



図 9. 円筒の一部分による H 波
(平面波)の散乱

(a) 正規化表面電流分布

$\theta_0 = 90°$

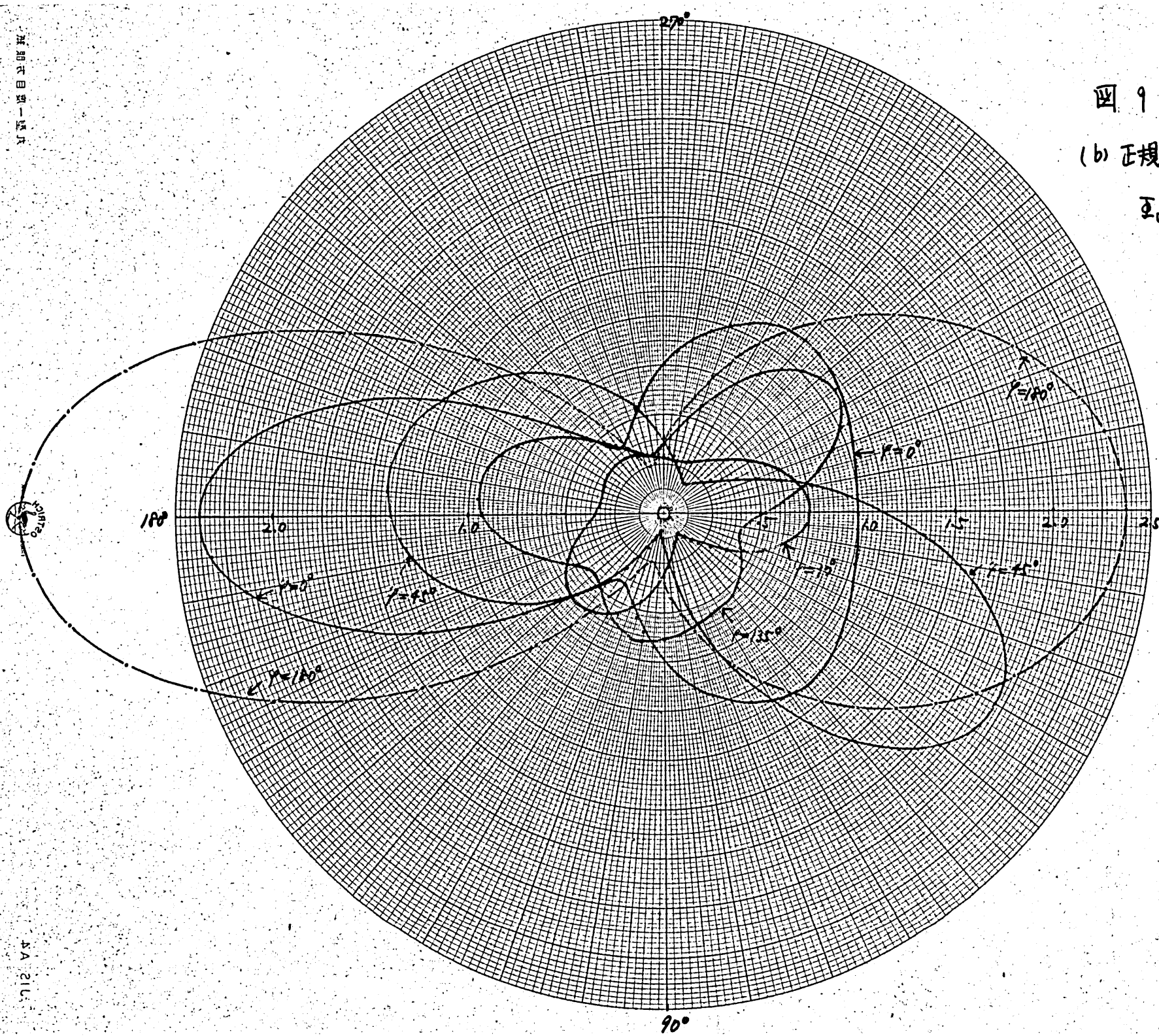



図 9

(b) 正規化散乱電力指向特性

$\Phi_0 = 90^\circ$

AA 515

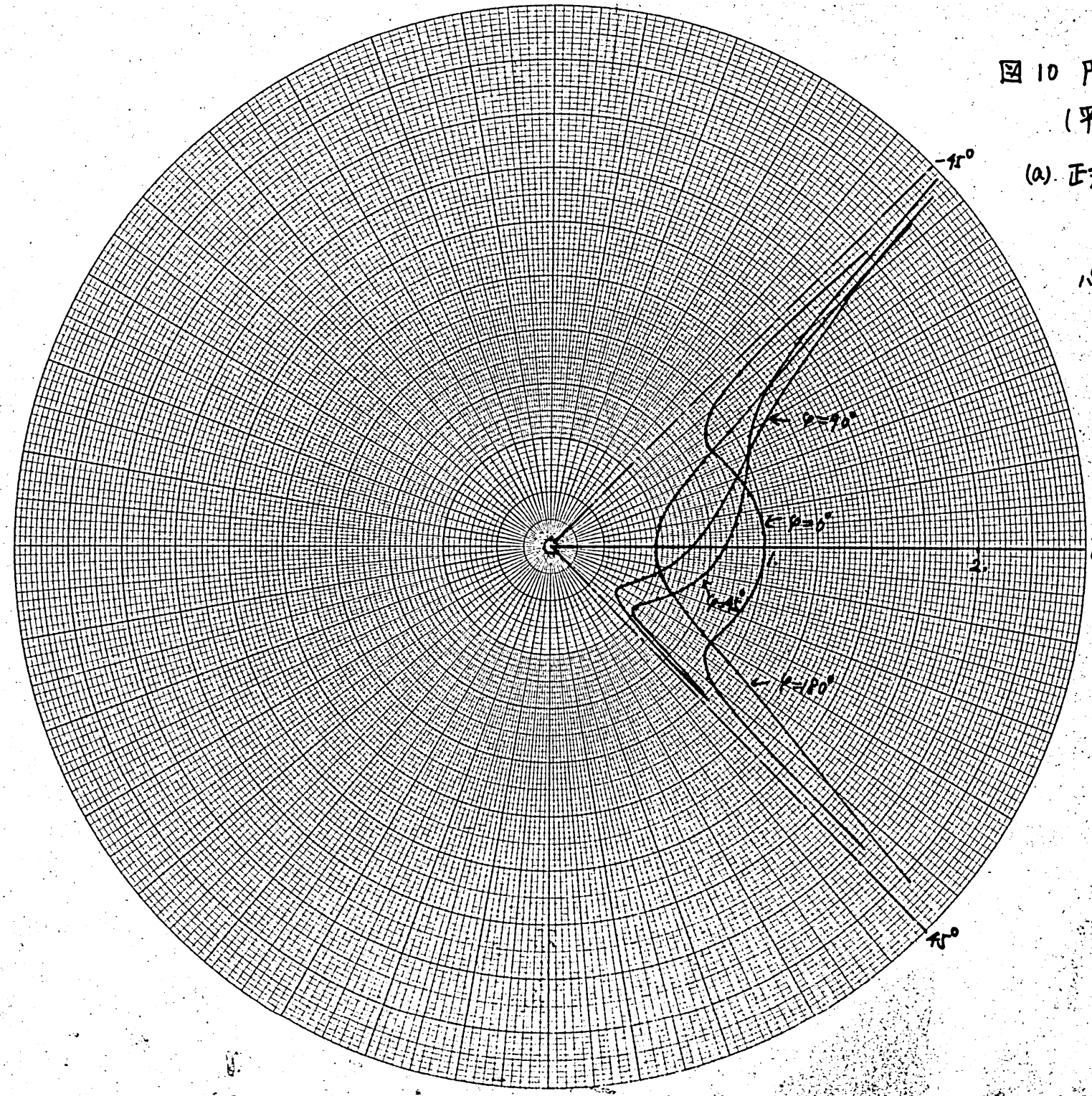



図 10 円筒の一部分による E波
(平面波) の散乱
(a) 正規化表面電流分布
$|J_z + J_z^i|$
パラメータ：入射角 $\varphi$
$\Phi_0 = 45°$

図 10

(b) 正規化散乱電力指向特性

$\theta_0 = 45°$

パラメータ：入射角 $\phi$

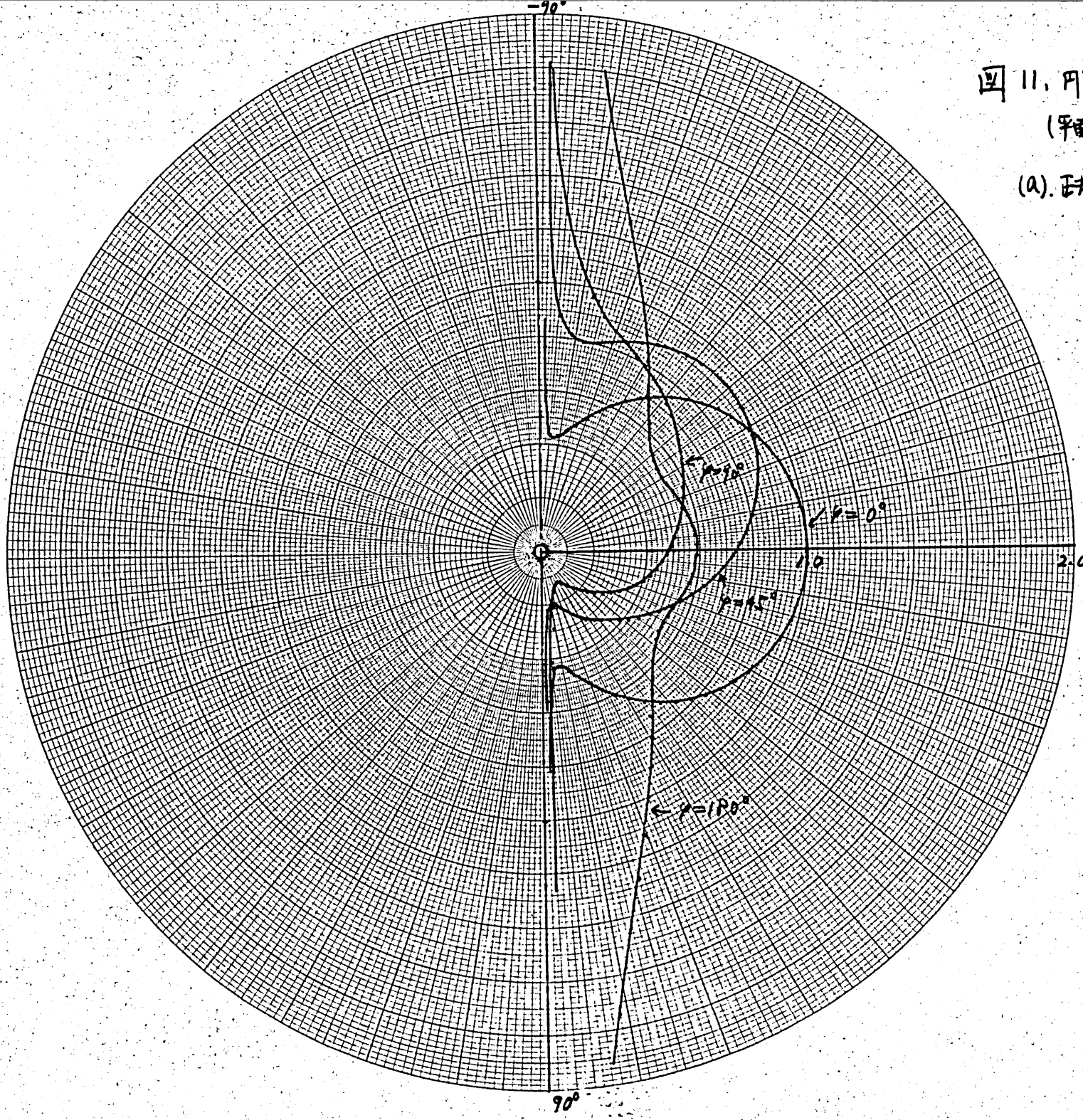



図 11. 円筒の一部分によるE波
(平面波の散乱)

(a). 正規化表面電流密度

$\Phi_0 = 90°$

パラメータ：入射角 $\varphi$


解題式目録一覧表
HOIRTO

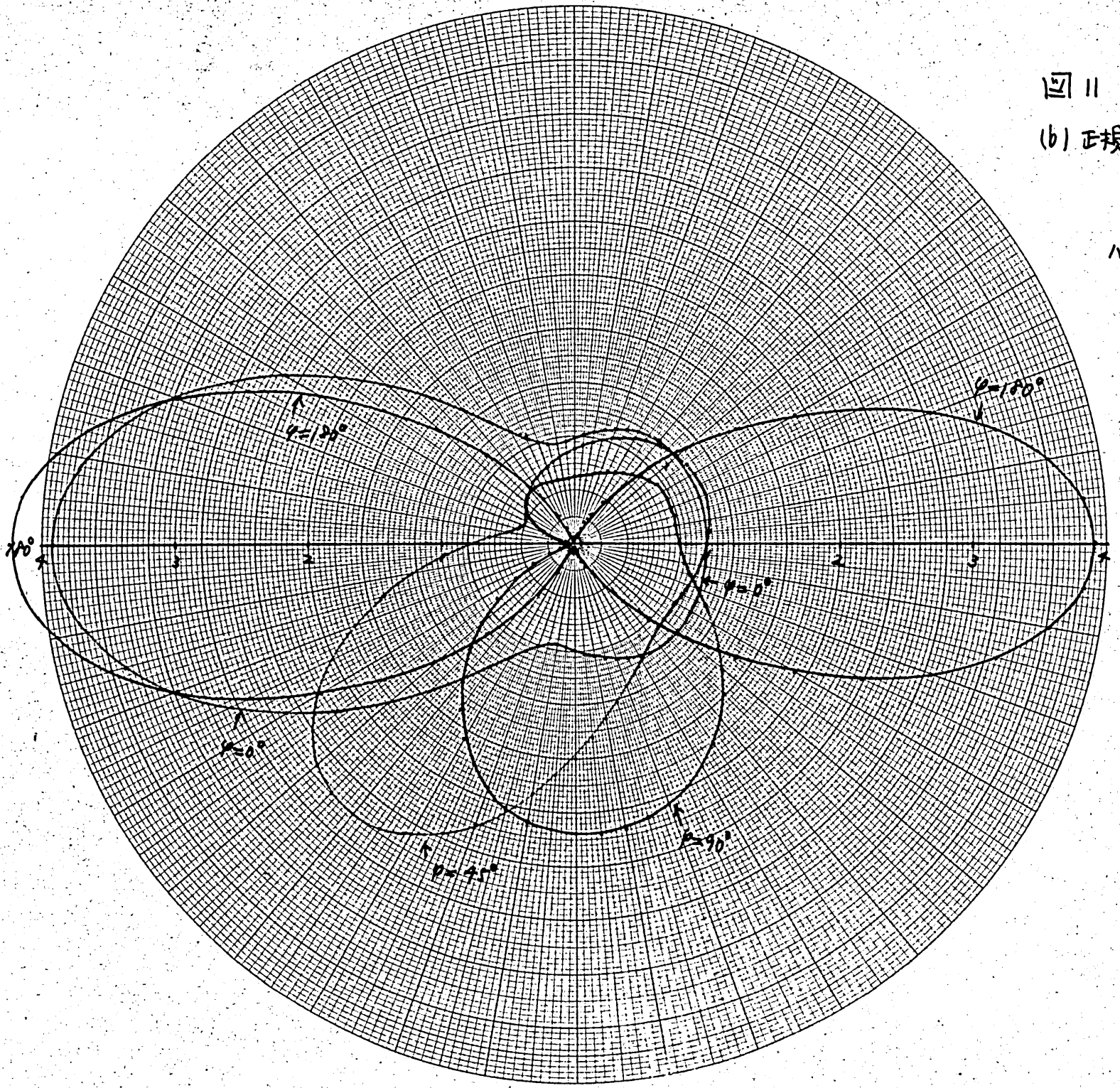



図 11

(b) 正規化散乱電力指向特性

$\Theta_0 = 90°$

パラメータ 入射角 $\varphi$

輻射科学研究会資料

# 新しい列車通信制御用伝送システム

倉内憲孝　吉田健一

（住友電工・研究部）

1968年7月26日

## 1. まえがき

最近の鉄道における大きな問題の一つは，その高速，高密度化に伴なう自動運転システムの開発ということである。これは人間の能力に依存している現在の列車運行業務を電子計算機を中核とする情報処理システムに置換することにより，その自動化をはかるとともに，中央制御局が一括制御し，高能率，高信頼度の運行業務を確立するのがその大きな目的の一つと考えられる。

このようなシステムを構成するサブシステムには1) 電子計算機およびその周辺装置，2) 情報伝送装置，3) システムの状態検知装置（各列車の位置・速度，列車間間隔，障害物探知等）の3つに分類することができる。

本資料は，上記のサブシステム中2) の情報伝送装置に対する新しい方式の提案およびその実験結果について述べたものである。

## 2. 新しい方式の原理

走行中の列車と地上の固定局の間で情報伝送を実現するには種々の方式が考えられるが，その1つに開放形伝送線路を用いて，列車に取り付けられたアンテナとの間で機械的な接触を介しないで行なうのが最も好ましいと考えられる。このような伝送線路の一方式に，電磁誘導を用いた密結合誘導無線伝送線路がある。これについては，従来，平行2線を軌道に沿つて布設し，これに信号を伝搬させ，その周囲に形成されている磁界を車上のループアンテナで誘導結合で受信し，また逆に，車上よりの信号を誘導結合で平行2線に供給するというような方式が検討されていた。このような伝送線路は，その構造上高周波においては伝送損失が大きいため，一般には数MHz以下の周波数帯で使用されるべきものである。ところが鉄道において発生す

る雑音の周波数成分は，数100KHz以下にその大部分のエネルギーが存在するため，S/N比も低下し，制御情報の信頼度の低下をまねくことになる。

筆者らは平行2線方式において伝送線路およびアンテナよりの不要放射ならびにこれらに誘導される雑音の低減をはかり，情報伝送における信頼度を上げるとともに，システム全体の構成を簡略化することを目的とした撚り合わせ対型誘導無線方式を提案し，種々検討を行なつてきた。これは，複数本の導体を撚ることにより構成された伝送線路と適当に接続された偶数個のループアンテナを位相合成作用を介して結合することにより実現されるものである。

対象としたシステムの構成を図1に示す。図1(a)は本システムの原理的構成を示し，伝送線路は4本の導体を一定ピッチで撚ることにより構成する$a-a'$対$b-b'$対に$\pi/2$位相の異なる同一信号を給電し，伝送線路の周囲に回転磁界を形成する。以後，$\pi/2$の位相差を与える移相回路を位相調整器と称することにする。一方，送受信用アンテナはそれぞれ2個のループアンテナを$\frac{1}{2}$ピッチ離して配置し，図1(a)のように接続（以下逆接続と称する）することにより構成する。以上のような構成によつて，不要放射および誘導雑音が制御され得ることになる。図1(b)は実験システムの全体の構成概略を示す。伝送線路は全長約500mである。周波数は地上→車上を82.5KHz，車上→地上を193.5KHzとした。

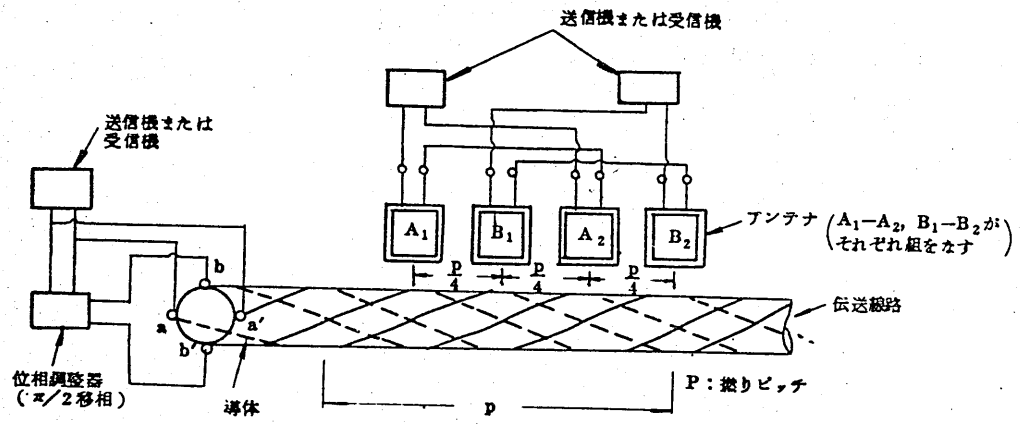



図 1 (a)　システムの原理的構成図

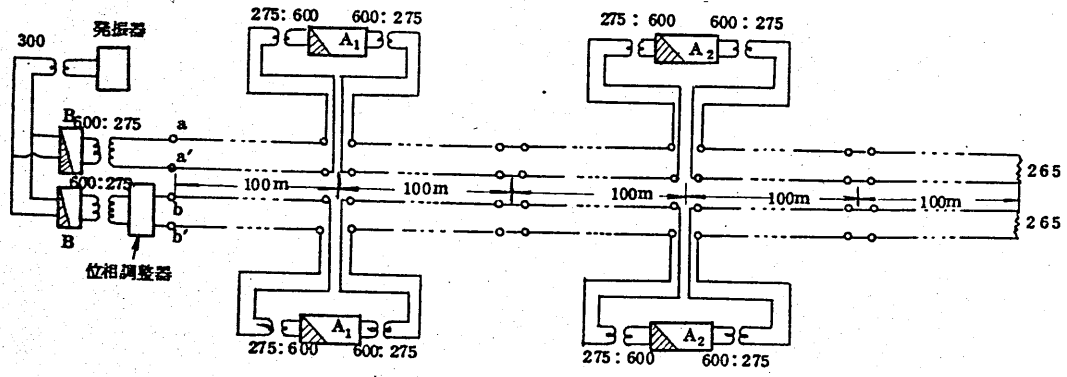



図 1 (b)　実験システムの構成

## 3. システム設計

地上の制御局と車上局との間の情報伝送において重要な要素の一つは結合損失である。結合損失$L_c$はアンテナの共振点においては次式で与えられる。

$$L_c = 10\log_{10}\frac{8rZ_0}{\omega_0^2 M_0^2} = \frac{2LZ_0}{\omega_0 M_0^2 Q} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ただし，$Z_0$は伝送線路の特性インピーダンス，$r$は1次コイルの抵抗$M_0$は伝送線路とアンテナの間の相互インダクタンスである。$\omega_0$は中心周波数である。

式(1)から明らかなように，結合損失$L_c$を小さくするには(a)伝送線路の特性インピーダンスを小さくする，(b)アンテナの抵抗を小さくする，(c)伝送線路とアンテナの間の相互インダクタンスを大きくするとよい。しかし，(b)は信号の使用周波数および帯域により制約をうけ，(c)は伝送線路のケーブル化を考えると，その大きさはやはり制約され，結局，(a)の方法が有効であるということになる。

### 3.1 伝送線路

図2は本実験に使用した伝送線路の断面構造を示す。この伝送線路はケーブルとして製造し，胴径1.4 mのドラムに巻きとることが可能である。導体をテープ状とした理由は，(a)特性インピーダンスの値がテープ幅をかえることにより容易に変化させることができ，(b)表皮効果をできるだけ避け導体断面内を有効に使用することができ，また，(c)製造も容易であるなどの特徴を有するためである。図2の構造は次のようにして決定した。

まず，ケーブル外径は結合損失および布設の問題を考慮して32 mm程度とすることとした。テープ幅と特性インピーダンスの間の関係は次式で与えられる。

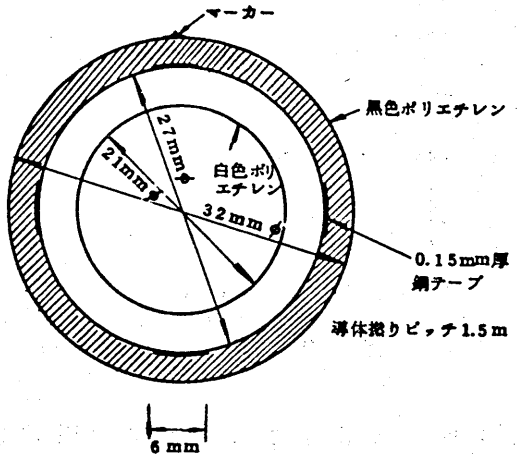



図２　ケーブル断面構造

$$Z_0 = 60\pi \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0, \sqrt{\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta_0}}\right) + F\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta_0}}\right)}{K(\tan\theta_0)} \quad \cdots (2)$$

ただし，

$$\theta_0 = w/D,\ F(\varphi_0, k) = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Kは第１種完全楕円積分である。また，Dは導体が配置されている円の直径を示し，$w$はテープ幅である。また，比誘電率は一様に分布し，その値を１と仮定してある。図３は式(2)をグラフに示したものである。

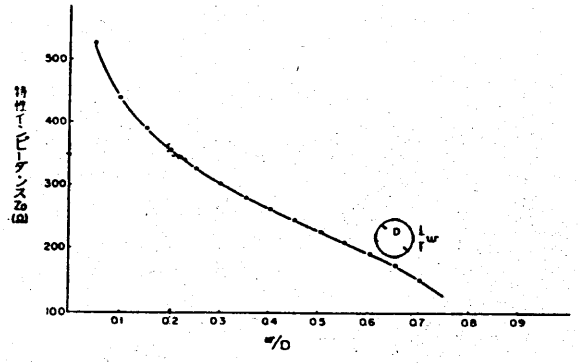



図3　特性インピーダンスの理論値

図2から明らかなように実際には誘電体が一様分布でないため，式(2)の値より$\nu$（<1）だけ小さくなる。特性インピーダンスを300Ω以下にする目的で，式(2)および図3を参考にして理論的，実験的に検討した結果$w$＝6㎜にするとよいことがわかつた。さらに，伝送損失を50～250KHzにおいて1.2dB/Km 以下にするためテープ厚を0.15㎜に選んだ。

また，撚りピッチは結合損失を考慮したループアンテナの大きさ，それらの配置を考慮して1.5$m$とした。

## 8.2 アンテナ

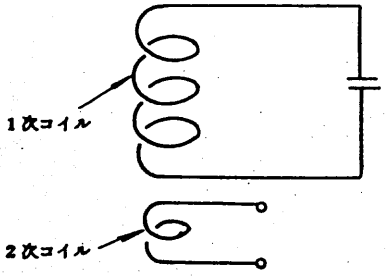



図4(a) ループアンテナの回路構成

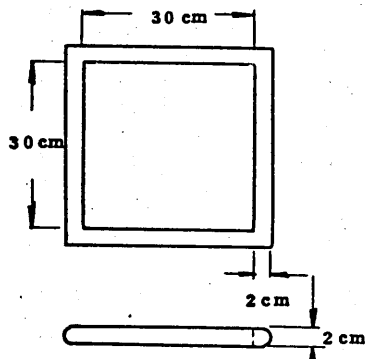



図4(b) ループアンテナの寸法

ループアンテナ単体の回路構成は図4(a)に示すとおりである。また，その寸法は図4(b)に示してある。これはケーブルの導体間隔と結合損失を考慮して求められたものである。3dB幅が2KHzになるように1次コイルおよび2次コイルの巻数を検討した結果表1のような結果を得た。これは同時にそれぞれの周波数において結合損失が最も小さくなる巻数構成すなわち最適巻数でもある。

表1 ループアンテナの構成

| 中心周波数 | 1次コイルの巻数 | 2次コイルの巻数 | 共振点における入力インピーダンス |
|---|---|---|---|
| 82.5KHz | 56 | 6 | 600Ω |
| 193.5KHz | 40 | 2 | 600Ω |

図5は図1に示した2ループの逆接続の構成を示している。送受信器のインピーダンスが75Ωであることを考えて整合トランスを介して構成してある。

### 3.3　位相調整回路

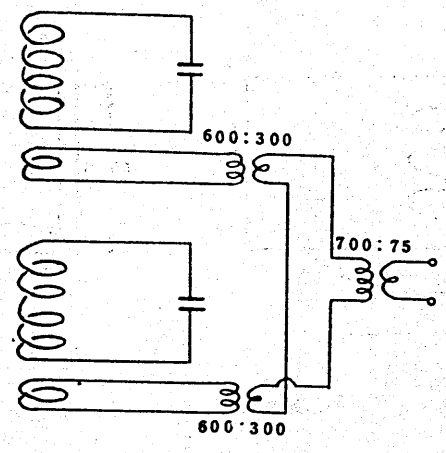



図5　2ループの逆接続

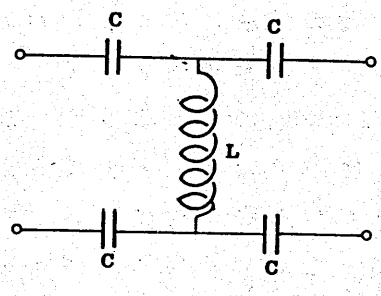



図6　位相調整回路

位相調整回路は本システムの場合，イメージインピーダンスが伝送線路の特性インピーダンスに等しい $\pi/2$ 移相回路でよい。図6は基本構成回路を示す。インダクタンスLおよび容量Cは次式により与えられた。

$$w_0 L = Z_0, \quad \frac{2}{w_0 C} = Z_0 \qquad \cdots\cdots (3)$$

$Z_0$ は伝送線路の特性インピーダンスである。

## 4. 実験結果および検討

### 4.1 ケーブルの基本特性

Short － open 法で測定した結果，特性インピーダンスは多少の周波数特性を有しているが，平均値としては265Ωとなつた。図7は終端を265Ωとした場合の入力インピーダンスの周波数特性を示している。ただし，インピーダンスZをZ＝|Z|$e^{j\theta}$と表わしてある。入力インピーダンスが265Ωになつていない理由としては上記の平均値としての265Ωの設定に誤りがあると考えられるが，以下の実験はすべて265Ωとしている。

図8にShort － open 法の測定結果から求めた伝送損失の周波数特性を示す。

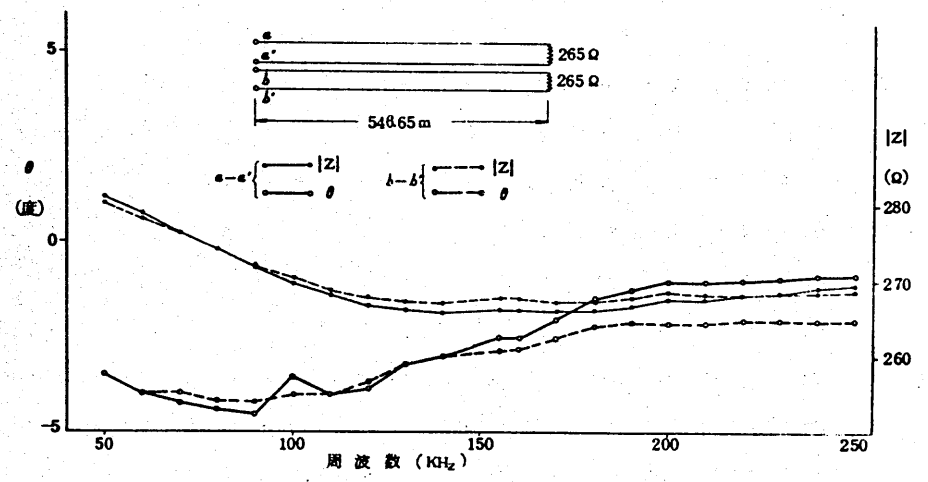



図7　終端265Ωを接続した場合の入力インピーダンス

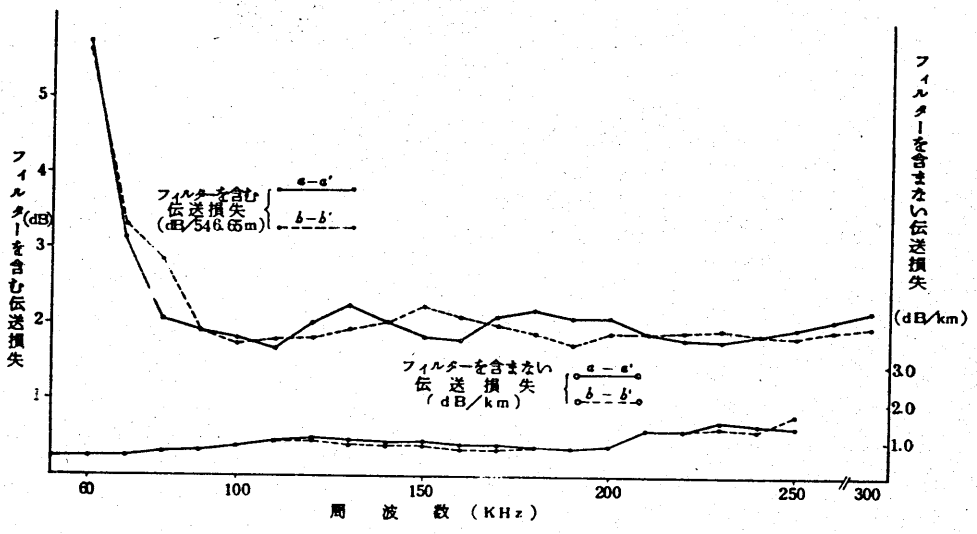



図8 伝 送 損 失

4.2 フイルターを挿入した場合の伝送線路特性

図1(b)のように3個所にフイルター(50KHzを遮断周波数とする高域通過フイルターで50KHz以下を局所制御用に使用するためのもの)を挿入してフイルターBの入力点において入力インピーダンスおよび始端・終端間の挿入損失を測定したところ図9および図8のようになつた。入力インピーダンスは各対で異なり,とくに,100KHz以下ではその差は大きい。挿入損失はほぼフイルターの損失分だけ増加している。

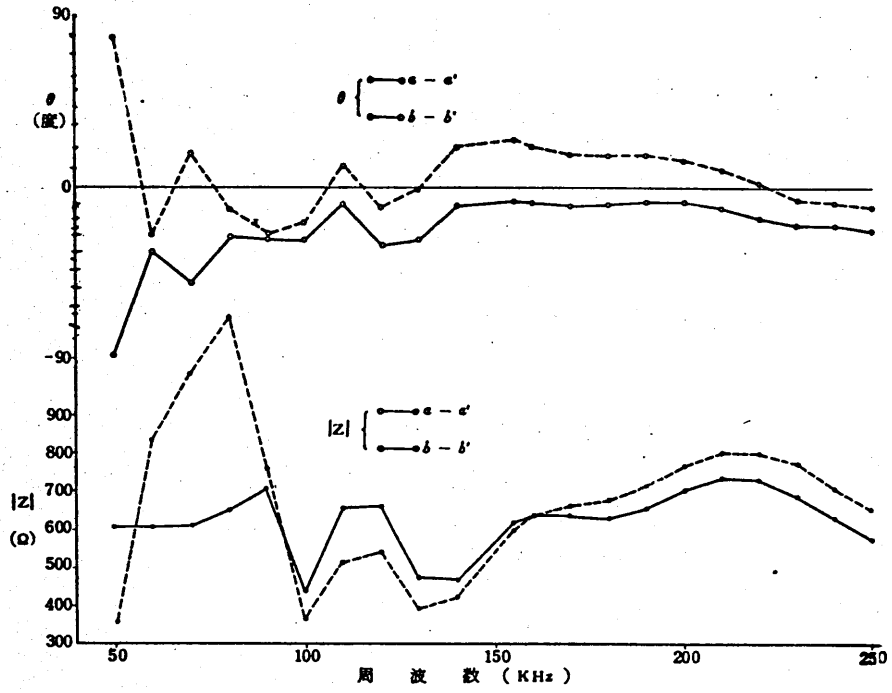



図9　フィルター挿入時の入力インピーダンス

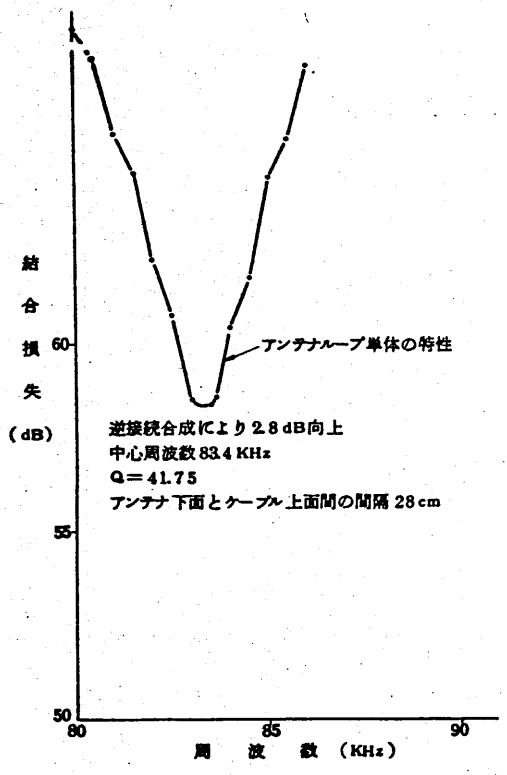



図10(a)　低周波帯用アンテナの結合損失

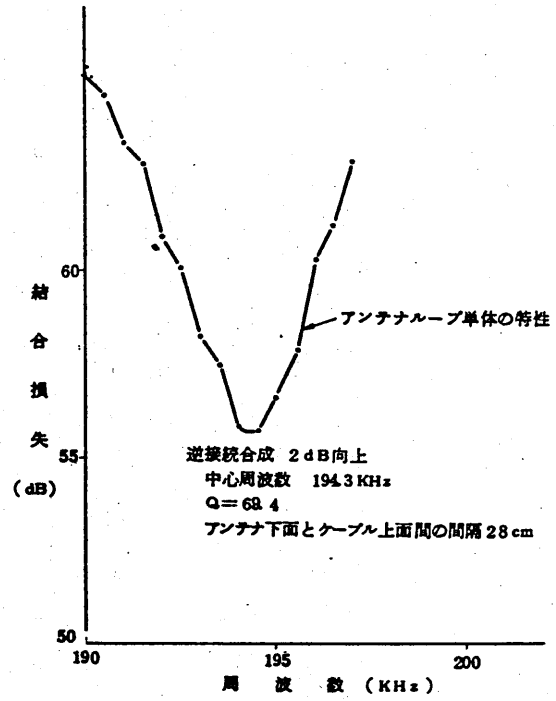



図10(b)　高周波数帯用アンテナの結合損失

4.3　アンテナの周波数特性

図１０はアンテナの結合損失の周波数特性を示している。ただし，ケーブル上面とアンテナ下面との間隔は２８cmである。

4.4　結合試験結果

図６のような回路の出力側に$Z_1$なる負荷（ケーブルの１対）を接続すると，この負荷に流れる電流は負荷に関係なく

$$I_1 = j\frac{E}{Z_0} \quad \cdots\cdots (4)$$

E：入力側端子の信号電圧

となる。

他方，図１(a)の信号給電方法から明らかなように，位相調整回路を挿入しない方の対に流れる電流は

$$I_2 = \frac{E}{Z_2} \quad \cdots\cdots (5)$$

$Z_2$：入力インピーダンス

となる。式(4)および(5)から，$Z_2$ができるだけ$Z_0$に近い方が$I_1$と$I_2$が

$$I_1 = jI_2 \quad \cdots\cdots (6)$$

なる関係に近づき，位相合成が完全化されることになる。図９を参照すると位相調整回路を入力インピーダンスの特性の悪い$b-b'$対に挿入した方がよいことになる。

図１１(a)は位相合成せず１対のみに給電した場合の結合レベル変動を示し，最高・最低レベル差は３０dB以上ある。すなわち，システムは極めて良好な平衡状態にあるものと考えることができる。図１１(b)および(c)は位相合成によるレ

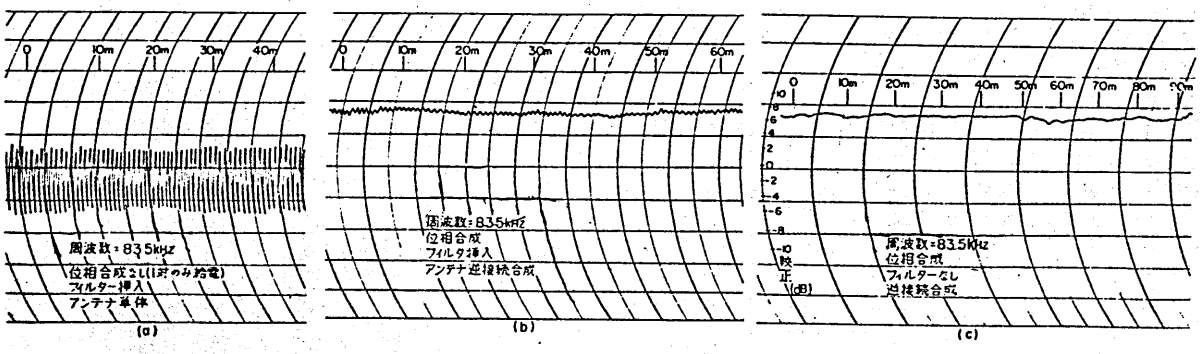



図 11　結合レベル変動

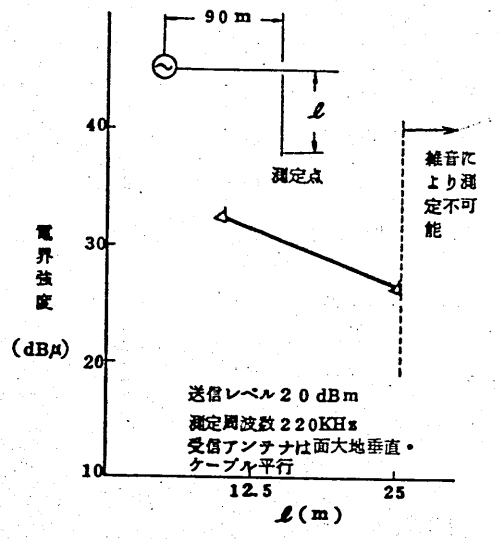



図 12(a)　ケーブルからの不要放射

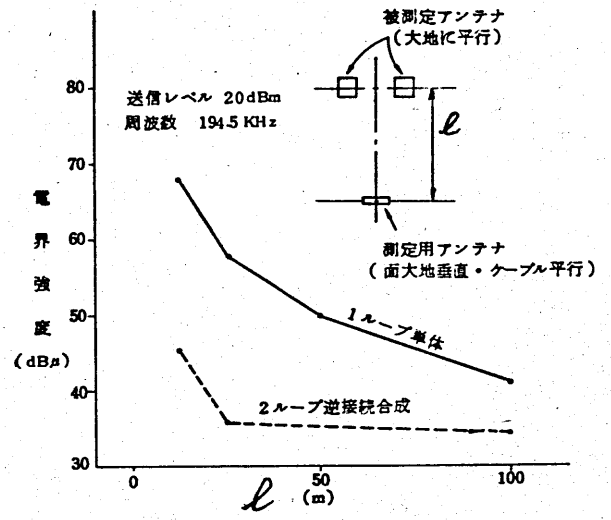



図12(b) ループアンテナの逆接続による不要放射抑制

ベルの一様化を示す。図11(b)はフイルターを挿入した場合，(c)はフイルターを除去した場合の結合レベルの状態を示している。フイルターを挿入すると±1dB程度の変動が認められるのは前述した各対の入力インピーダンスの特性の差およびフイルターBの特性の差によるものである。各対の電流 $I_a$ および $I_b$ の間を

$$I_b = \pm j I_a \rho e^{j\theta} \quad \cdots\cdots (7)$$

なる関係式で表示すると結合レベルの変動 $\Delta C$ (dB)は次式で与えられる。

$$\Delta C = 10 \log \frac{1+\rho^2+\sqrt{(1-\rho^2)^2+4\rho^2 \sin^2\theta}}{1+\rho^2+\sqrt{(1-\rho^2)^2+4\rho^2 \sin^2\theta}} \quad (\mathrm{dB}) \cdots (8)$$

たとえば，$\rho = 1$ と仮定すると $\Delta C = 2$dBとする $\theta$ の値は $\theta \fallingdotseq 14°$ となる。

4.5　不要放射抑制効果

ケーブルおよびアンテナから外部に放射する電力は電波法規の規定により制約される。図12は不要放射の抑制効果を示すグラフである。図12(a)はケーブルからの不要放射レベルを示し，(b)はアンテナからの不要放射レベルを示す。なお，ケーブルについては撚りによる抑制効果は測定できず，本実験に使用したケーブルの放射特性を測定しただけである。また。アンテナに関する抑制効果を測定する場合，逆接続合成および単体について，共に発振器出力とのインピーダンス整合をとつてある。

4.6　誘導雑音抑制効果

図13(a)および(b)はそれぞれケーブルおよびアンテナに誘導される雑音の抑制効果を示している。

図13(a)は図14(a)のような構成によつて比較したものである。図14(a)においてⅠは本実験にこれまで使用してきた撚り合わせ対型ケーブル，Ⅱは線間隔48㎜特性インピーダンス270Ωの平行2線Ⅲは線間隔100㎜，特性インピーダンス600Ωの平行2線である。また，図13(b)は図14(b)のような配置および構成より測定したものである。

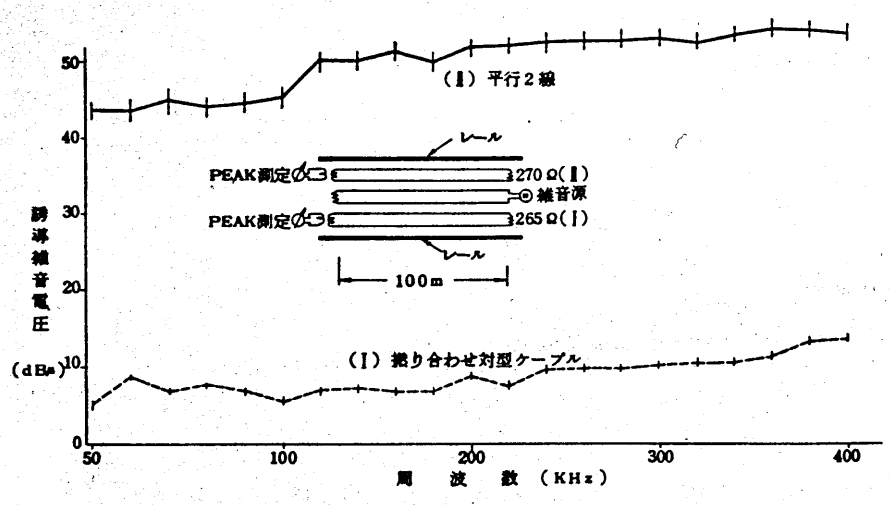



**図13(a)　撚り合わせによる誘導雑音抑制**

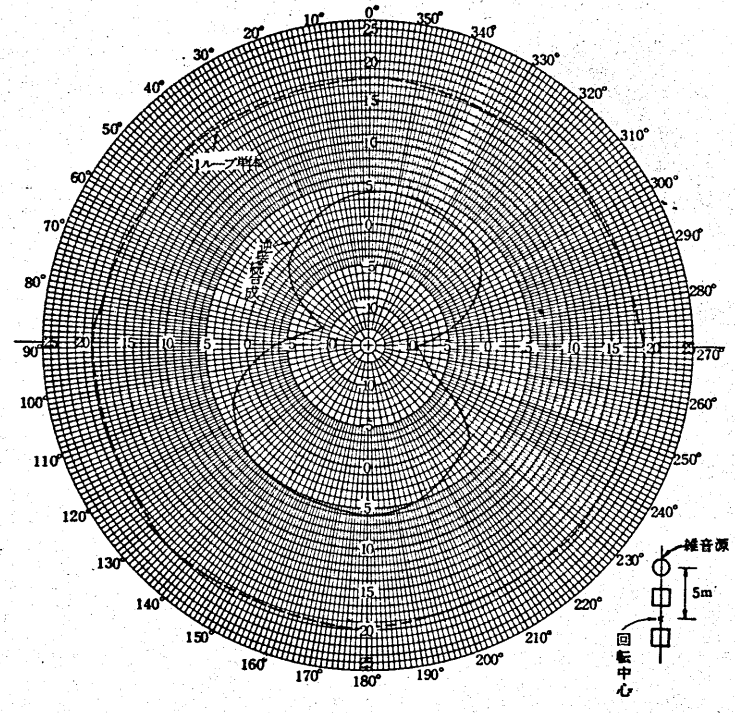



**図 13(b)**　アンテナの逆接続による誘導雑音抑制（周波数＝82.5 KHz）

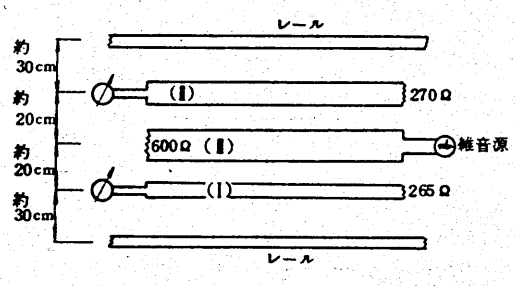



**図 14(a)**　ケーブルの誘導雑音抑制効果測定系

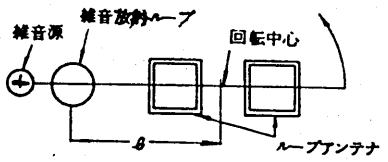



図14(b)　アンテナの誘導雑音抑制効果測定系

## 5. むすび

本論文においては，特殊な誘導無線方式の一つとして提案した撚り合わせ対型ケーブル方式の実験結果をまとめた。当初，問題にしていたフイルター挿入によるインピーダンス偏差の問題は適当な変成器を用いることによりほぼ解決できることがわかり，位相合成の際のレベル変動も僅少であり，実施において問題がないと考えられる。

システムにおける誘導雑音改善の問題に関しても期待どおりのデータを得ることができ，今後，微細な調整によつて，さらに改善されるものと考えることができる。

誘導雑音の抑制によりS／N 比が向上し，その概略評価はつぎのようになる。地上局→車上局の信号伝送においては，受信雑音レベルが15dB程度改善できるため，等価的な結合損失が38dB程度となり，線間距離の短縮化による結合損失を十分補償していることになり，また，車上局→地上局においては雑音レベルが40dB程度改善されているため，線間距離の短縮化による結合損失の増大およびインピーダンス減少による雑音誘導の増大を補償しても，なおS／N 比の向上がはかれることになる。また，システムからの不要放射の問題も，今一歩の努力で解決できるものと考えられる。

本文で述べた原理を応用すると，フイルターの挿入を必要としないケーブルとして図15(a)のような構造のものが考えられ

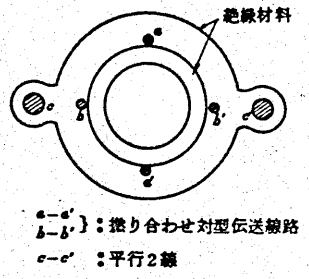



図 15(a)　複合ケーブルの断面構造

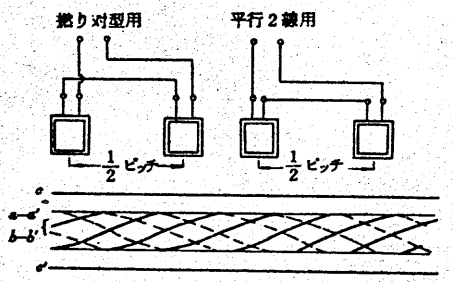



図 15 (b)　アンテナの構成

る。これは，撚り合わせ対型伝送線路に平行2線を付加し，一体物として製造することにより構成される複合ケーブルである。撚り合わせ対型誘導無線伝送線路と平行2線の間には結合が生じないため，これらは独立な伝送線路となり，アンテナとの結合方式を図15(b)のようにすると，完全に独立な系を構成することができる。したがつて局所制御のための各区間ごとのフイルターは不要となる。

本実験により撚り合わせ対型誘導無線方式の諸特性の原理上の特徴が確認され，いくつかの点で十分実用に供し得る性能を有することが判明し，今後はその他の実用上の諸問題を解決する方向に検討をすすめることになろう。

輻射科学研究会資料

# 周期的ガスレンズ導波系の一般的応答と安定条件

沢　新之輔　　熊谷信昭
(大阪大学・工学部)

1968年7月26日

# 1. まえがき

光ビームを低損失で伝送するための一つの方法として，ガスレンズを伝送方向に，周期的に配列した構造の導波系[1],[2]が考えられている．このような周期的ガスレンズ導波系については，従来から，種々の理論的，実験的検討がなされているが，軸づれ，斜入射ガウス波の応答および安定条件に関しては，筆者等の知る限りでは，今井氏等[2]の波動光学にもとづく考察がある以外には，見あたらない．

ところで，今井氏等の論文[3]によると，ガスレンズを周期的に配列した導波系では，軸づれ，斜入射に特有の位相変化項の境界における連続性から，波面の変化の連続条件が必要であるとし，その結果，このような系の安定領域は，従来から近軸理論で知られている，軸づれ，および傾きがない場合の安定領域とは一致せず，その一部分に限られると結論されている．

本論文では，周期的ガスレンズ導波系における，軸づれ，斜入射ガウス波の応答について，波動光学的にさらに詳しく考察し，今井氏等の結論[3]とは異った，より一般性のある結果を得た．すなわち，文献[3]では，ガスレンズおよびギャップの中央において，軸づれのみ，あるいは，傾きのみを有するガウス波を仮定しているのに対し，本文では，軸づれと傾きとを同時にもつガウス波を仮定して，境界値問題をさらに一般的に解いた．その結果，文献[3]では明らかにされなかった，新しいガウス波の安定な行路が存在することおよび，この新らたな行路を考慮に入れると，安定領域は，文献[3]の結論とは異り，従来から知られている，軸づれ，および傾きがない場合の安定領域（幾何光学的安定領域）と，完全に一致することが明らかとなった．

また，軸づれ，斜入射ガウス波の波動光学的応答と幾何光学的応答との関連を，一層明確にし，かつ，応答電磁界の円筒座標系における表示式が，軸づれおよび傾きのない場合の表示式から，きわめて簡単に，正確に導出でき

ることをも示した．

さらに，波動光学的に導かれた最適収束条件は，幾何光学的には，導波系の等価レンズ列における共焦点条件として解釈できるという興味ある結果を示した．この結果は，熊谷，吉田，および中原の諸氏[4]が，反射形ビーム・ウェーブガイドの最適収束条件について得た結果と類似のものであると考えられる．

また，境界において，波面の変化の連続条件を満す領域と，伝送ビーム波の安定領域とは，一般には必ずしも一致しないことを付録に示し，今井氏等の安定領域に関する結論[3]が，不十分なものとなった理由を明らかにした．

## 2. 軸づれ，および傾きを持つガウス波の電磁界

図１に示すような，周期的ガスレンズ導波系を考え，円筒座標系（r；θ，η）を同図のようにとる．ガスレンズ内部の誘電率分布として，軸対称的に中心軸からの距離の２乗で減少するような分布

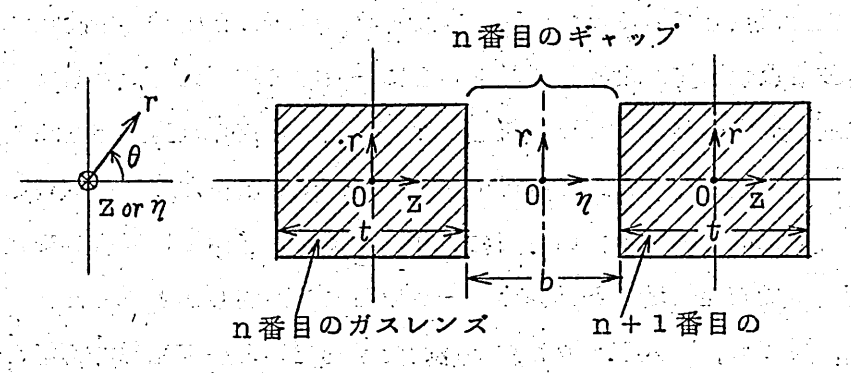



図１　周期的ガスレンズ導波系における座標系

$$\varepsilon(r)=\varepsilon(0)\{1-(gr)^2\} \qquad (1)$$

を考える．ここで，gは，誘電率の変化率を定める定数であり，$\varepsilon(0)$は，中心軸上（r＝0）における誘電率を表わす．

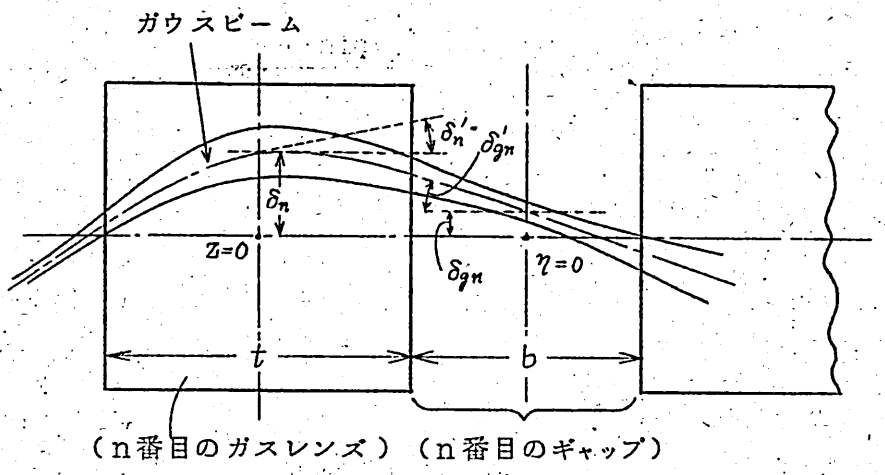



図２　軸づれと傾きを同方向に持つガウスビーム

すると，図２に示すように，n番目のガスレンズの中央（z＝0）およびギャップの中央（$\eta=0$）において，それぞれ，$\delta_n$なる軸づれと$\delta_n'$なる傾き，および$\delta_{gn}$なる軸づれと$\delta_{gn}'$なる傾きとを，共に同方向にもつガウス波の電磁界は，それぞれつぎのように与えられる．すなわち，ガスレンズ内部では，

$$\mathrm{E}^{(n)}(r,\theta,z)=\frac{E_b^{(n)}\,\Theta^{-jk(o)z}}{\left(\cos gz-j\frac{W_o^2}{s^2}\sin gz\right)}\cdot\exp\left[\frac{-\left(\cos gz-j\frac{s^2}{W_o^2}\sin gz\right)}{2s^2\left(\cos gz-j\frac{W_o^2}{s^2}\sin gz\right)}r^2+\frac{\left(\delta_n-j\frac{s^2}{gW_o^2}\delta_n'\right)\sin\theta}{s^2\left(\cos gz-j\frac{W_o^2}{s^2}\sin gz\right)}r\right] \qquad (2)$$

で与えられ,[3] ギャップ内では，式(2)で g → 0 とおいて

$$E_g^{(n)}(r,\theta,\eta)=\frac{E_{go}^{(n)}e^{-jk(o)\eta}}{1-j\eta/k(0)s_g^2}\cdot\exp\left[-\frac{r^2}{2s_g^2(1-j\eta/k(0)s_g^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{(\delta_{gn}-jk(0)s_g^2\,\delta'_{gn})\sin\theta}{s_g^2(1-j\eta/k(0)s_g^2)}\cdot r\right] \qquad (3)$$

となる．

ただし，$k(0)=\omega^2\mu_0\varepsilon(0)=1/gw_0^2$ であり，$1/s^2$ および $1/s_g^2$ は，それぞれ，$z=0$ および $\eta=0$ における波面係数[3]を表わす．また，$E_0^{(n)}$ および $E_{go}^{(n)}$ は，r に無関係な係数を表わし，n = 1, 2, 3, ……は，ガスレンズあるいはギャップの番号を示す．式(2)で，n を n+1 でおきかえると，n + 1 番目のガスレンズ内部の電磁界を表わす式になる．

## 3. 境界条件の適用

ガスレンズと自由空間との境界面，$z=t/2$ ( $\eta=-b/2$ ) および $z=-t/2$ ( $\eta=b/2$ ) においては，電磁界の連続条件から，

$$E^{(n)}(r,\theta,t/2))=E_g^{(n)}(r,\theta,-b/2) \qquad (4)$$

および

$$E^{(n+1)}(r,\theta,-t/2)=E_g^{(n)}(r,\theta,b/2) \qquad (5)$$

が満足される必要がある[1],[3]式(4)および(5)から，両辺の $r^2$ および r の係数をそれぞれ等置すると，$r^2$ の係数から，

$$\left(\cos\frac{gt}{2}+j\frac{s^2}{w_0^2}\sin\frac{gt}{2}\right)\left(s_g^2-j\frac{b}{2k(0)}\right)$$
$$=s^2\left(\cos\frac{gt}{2}+j\frac{w_0^2}{s^2}\sin\frac{gt}{2}\right) \tag{6}$$

および

$$\left(\cos\frac{gt}{2}-j\frac{s^2}{w_0^2}\sin\frac{gt}{2}\right)\left(s_g^2+j\frac{b}{2k(0)}\right)$$
$$=s_g^2\left(\cos\frac{gt}{2}-j\frac{w_0^2}{s^2}\sin\frac{gt}{2}\right) \tag{7}$$

を得る．また，rの係数から，

$$\left(\delta_n-j\frac{s^2}{gw_0^2}\delta_n'\right)\left(s_g^2+j\frac{b}{2k(0)}\right)$$
$$=s^2\left(\cos\frac{gt}{2}-j\frac{w_0^2}{s^2}\sin\frac{gt}{2}\right)\left(\delta_{gn}-jk(0)s_g^2\delta_{gn}'\right), \tag{8}$$

および

$$\left(\delta_{n+1}-j\frac{s^2}{gw_0^2}\delta_{n+1}'\right)\left(s_g^2-j\frac{b}{2k(0)}\right)$$
$$=s^2\left(\cos\frac{gt}{2}+j\frac{w_0^2}{s^2}\sin\frac{gt}{2}\right)\left(\delta_{gn}-jk(0)s_g^2\delta_{gn}'\right), \tag{9}$$

が得られる．

また，式(6)および(7)から，

$$(s/w_0)^4 = \left(1 + \frac{gb}{2}\cot\frac{gt}{2}\right) \Big/ \left(1 - \frac{gb}{2}\tan\frac{gt}{2}\right) \qquad (10)$$

$$(s_g/w_0)^4 = \left(1 + \frac{gb}{2}\cot\frac{gt}{2}\right)\left(1 - \frac{gt}{2}\tan\frac{gt}{2}\right) \qquad (11)$$

なる関係が得られる．

式(6)～(9)から，$s_g$，$\delta_{gn}$，および $\delta'_{gn}$ を消去すると，

$$\frac{\delta_n - js^2\delta'_n/gw_0^2}{\delta_{n+1} - js^2\delta'_{n+1}/gw_0^2} = \frac{1 - j(s/w_0)^2\tan\frac{gt}{2}}{1 + j(s/w_0)^2\tan\frac{gt}{2}} \qquad (12)$$

なる関係が得られる．

式(12)における $(s/w_0)^2$ の値は，式(10)からわかるように，$gb/2$ と $gt/2$ との関係によって，実数または純虚数になる．したがって，それぞれの場合に応じて，式(12)を実数部と虚数部に分解すれば，$\delta_n$，$\delta'_n$，$\delta_{n+1}$ および $\delta'_{n+1}$ を決定できる．さらに，式(8)または(9)によって，$\delta_{gn}$ および $\delta'_{gn}$ が求められ，ガウス波の行路を知るうえに必要な未知量が，すべて決定される．

## 4. 未知量の決定

### 4．1 $(s/w_0)^2$ が実数値をとる場合

簡単にするため，

$$q = (s/w_0)^2 \quad (>0) \qquad (13)$$

とおいて，式(12)を，実数部と虚数部に分解すると，

$$\begin{cases} \delta_{n+1} = A_0\,\delta_n + B_0\,\delta_n' & (14) \\ \delta_{n+1}' = C_0\,\delta_n + D_0\,\delta_n' & (15) \end{cases}$$

なる連立差分方程式が得られる．ここで，

$$\begin{cases} A_0 = D_0 = \dfrac{1 - q^2 \tan^2 gt/2}{1 + q^2 \tan^2 gt/2} & (16) \\ B_0 = \dfrac{2q^2}{g} \tan gt/2 \Big/ (1 + q^2 \tan^2 gt/2) & (17) \\ C_0 = -2g \tan gt/2 \Big/ (1 + q^2 \tan^2 gt/2) & (18) \end{cases}$$

である。

式(14)および(15)より，$\delta_n'$ および $\delta_{n+1}'$ を消去すると，

$$\delta_{n+2} - (A_0 + D_0)\,\delta_{n+1} + \delta_n = 0 \qquad (19)$$

なる2階の線形差分方程式を得る[5]ここで，式(16)，(17)および(18)から得られる，

$$A_0 D_0 - B_0 C_0 = 1 \qquad (20)$$

なる関係を用いた．

さて，式(19)は，よく知られているように，

$$|A_0 + D_0| < 2 \qquad (21)$$

および

$$|A_0 + D_0| > 2 \qquad (22)$$

に応じて，それぞれ，

$$\begin{cases} \delta_n = k_1 \cos n\alpha + k_2 \sin n\alpha & (23) \\ \text{ただし，} \quad 2\cos\alpha = A_0 + D_0 & (24) \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} \delta_n = (k_1 \cosh n\beta + k_2 \sinh n\beta)(-1)^n & (25) \\ \text{ただし，} \quad 2\cosh\beta = A_0 + D_0 & (26) \end{cases}$$

なる解をもつ．ここで，$k_1$および$k_2$は，初期条件によって定まる未定定数である．

式(16)より，

$$q^2 \tan^2 gt/2 = \frac{2-(A_0+D_0)}{2+(A_0+D_0)} \qquad (27)$$

なる関係が得られる．$q^2 > 0$であるから，式(27)より$|A_0 + D_0| < 2$が成立する．したがって，$\delta_n$は，式(23)で与えられる．式(23)を(14)に代入すると，

$$\delta'_n = \frac{1}{B_0}\left[k_1\{\cos(n+1)\alpha - A_0 \cos n\alpha\}\right.$$
$$\left. + k_2\{\sin(n+1)\alpha - A_0 \sin n\alpha\}\right] \qquad (28)$$

となる．

1番目(n=1)のガスレンズの中央，z＝0における軸づれ，および傾きを，それぞれ，$\delta_1$および$\delta'_1$として，$k_1$および$k_2$を定めると，それぞれ，

$$k_1 = D_0\,\delta_1 - B_0\,\delta'_1 \qquad (29)$$

および

$$k_2=\frac{\left[\left\{2-D_0(A_0+D_0)\right\}\delta_1+B_0(A_0+D_0)\,\delta_1'\right]}{\sqrt{4-(A_0+D_0)^2}} \tag{30}$$

となる．

$\delta_{n+1}$ および $\delta'_{n+1}$ の値は，それぞれ，式(23)および(28)において，nをn＋1とおきかえて得られる．

$\delta_{gn}$ と $\delta'_{gn}$ の値は，式(8)または(9)を実数部と虚数部に分解することにより，それぞれ，

$$\begin{aligned}\delta_{gn}=&\left\{g\left(\frac{s^2s_g^2}{w_0^4}\cos\frac{gt}{2}-\frac{gb}{2}\sin\frac{gt}{2}\right)\delta_n\right.\\&\left.+\frac{s^4}{w_0^4}\left(\frac{gb}{2}\cos\frac{gt}{2}+\frac{s_g^2}{s^2}\sin\frac{gt}{2}\right)\delta_n'\right\}\\&\cdot\left\{g\left(\frac{s^4}{w_0^4}\cos^2\frac{gt}{2}+\sin^2\frac{gt}{2}\right)\right\}^{-1}\end{aligned} \tag{31}$$

および

$$\begin{aligned}\delta'_{gn}=&\frac{-s^2}{s_g^2}\left\{g\left(\frac{gb}{2}\cos\frac{gt}{2}+\frac{s_g^2}{s^2}\sin\frac{gt}{2}\right)\delta_n\right.\\&\left.+\left(\frac{gb}{2}\sin\frac{gt}{2}-\frac{s^2s_g^2}{w_0^4}\cos\frac{gt}{2}\right)\delta_n'\right\}\left(\frac{s^4}{w_0^4}\cos^2\frac{gt}{2}+\sin^2\frac{gt}{2}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{32}$$

となる．

4．2　$(s/w_0)^2$が純虚数値をとる場合

簡単にするため，

$$jp = \frac{s^2}{w_0^2} \tag{33}$$

とおくと，pは実数を表わす．

式(33)を式(12)に代入して，実数部と虚数部に分解することにより，

$$\begin{cases} \delta_{n+1} = A_0' \delta_n + B_0' \delta_n' & (34) \\ \delta_{n+1}' = C_0' \delta_n + D_0' \delta_n' & (35) \end{cases}$$

を得る．ただし，

$$\begin{cases} A_0' = D_0' = \dfrac{1+p^2 \tan^2 gt/2}{1-p^2 \tan^2 gt/2} & (36) \\ B_0' = -\dfrac{2p^2}{g} \tan gt/2 \Big/ (1-p^2 \tan^2 gt/2) & (37) \\ C_0' = -2g \tan gt/2 \Big/ (1-p^2 \tan^2 gt/2) & (38) \end{cases}$$

である．ここで，$A_0' D_0' - B_0' C_0' = 1$ なる関係がある．

式(34)および(35)より，式(19)と同様の差分方程式

$$\delta_{n+1} - (A_0' + D_0') \delta_{n+1} + \delta_n = 0 \tag{39}$$

が得られる．式(36)より，

$$p^2 \tan^2 \frac{gt}{2} = \frac{A_0' + D_0' - 2}{A_0' + D_0' + 2} \tag{40}$$

なる関係があり，pが実数であるから，式(40)より，$|A_0' + D_0'| > 2$ が成立する．したがって，$\delta_n$ は，

$$\delta_n = (k_1' \cosh n\beta' + k_2' \sinh n\beta')\,(-1)^n \qquad (41)$$

で与えられる．ただし，

$$2\cosh\beta' = A_0' + D_0' \qquad (42)$$

であり，また，$k_1'$ および $k_2'$ は，初期条件により定まる未定定数である．

$\delta_n'$，$\delta_{n+1}$，$\delta_{n+1}'$，$\delta_{gn}$ および $\delta_{gn}'$ の値は，$(s/W_0)^2$ が実数の場合と同様にして，それぞれ決定できる．

## 5. ガウス波の行路と安定条件

電磁界を表わす式(2)および(3)は，それぞれ，つぎのような形に書き改めることができる．

$$E^{(n)}(r,\theta,z) = \frac{E_0^{(n)}\, e^{-jk(0)z}}{\cos gz - j\frac{W_0^2}{s^2}\sin gz} \cdot \exp\left[\frac{-\left(\cos gz - j\frac{s^2}{W_0^2}\sin gz\right)}{2s^2\left(\cos gz - j\frac{W_0^2}{s^2}\sin gz\right)}\right.$$

$$\left. \cdot \{r^2 - 2\delta_n(z) r\sin\theta\} - j\,\delta_n'(z)\,k(0)\,r\sin\theta \right] \qquad (43)$$

$$E_g^{(n)}(r,\theta,\eta)=\frac{E_{go}^{(n)}\,e^{-jk(o)\eta}}{1-j\dfrac{\eta}{k(0)s_g^2}}\cdot\exp\left[\frac{-1}{2s_g^2\left(1-j\dfrac{\eta}{k(0)s_g^2}\right)}\right.$$

$$\left.\cdot\{r^2-2\delta_n(\eta)\,r\sin\theta\}-j\delta'_{gn}(\eta)\,k(0)\,r\sin\theta\right] \quad (44)$$

ただし,

$$\begin{cases}\delta_n(z)=\delta_n\cos gz+\dfrac{\delta'_n}{g}\sin gz & (45)\\ \delta'_n(z)=-g\delta_n\sin gz+\delta'_n\cos gz & (46)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta_{gn}(\eta)=\delta_{gn}+\delta'_{gn}\,\eta & (47)\\ \delta'_{gn}(\eta)=\delta'_{gn} & (48)\end{cases}$$

である．これらの式から，ガウス波の中心部の軌跡は，ガスレンズ内では，式(45)および(46)で与えられる$\delta_n(z)$および$\delta'_n(z)$によって，また，ギャップでは，式(47)および(48)で与えられる$\delta_{gn}(\eta)$および$\delta'_{gn}(\eta)$でそれぞれ定まることがわかる．

式(45)～(48)に含まれている$\delta_n$，$\delta'_n$，$\delta_{gn}$および$\delta'_{gn}$は，前節で明らかにしたように，$s^2/w_0^2$が実数値をとるとき，それぞれ，式(23)，(28)，(31)および(32)に示すように，nの増大に伴い，3角関数にしたがった周期的な応答を示す．これに対し，$s^2/w_0^2$が純虚数のときには，これらの諸量は，式(41)のように，nの増加と共に振動しながら振幅が増大していくような応答を示す．

安定条件としては，$\delta_n$および$\delta'_n$がnの増加と共に増大しないことが必要である．したがって，安定条件は，$(s/w_0)^2$が実数となる条件で与えられ式(10)から，

$$\left.\begin{aligned} gb/2 &< \cot gt/2 \quad ; \quad m\pi \leqq gt/2 \leqq (m+1/2)\pi \\ gb/2 &< -\tan gt/2 \quad ; \quad (m+\tfrac{1}{2})\pi \leqq gt/2 \leqq (m+1)\pi \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

（ただし，$m = 0, 1, 2, \cdots$）となる．

安定条件，式（49）が成立するとき，波面係数 $1/g^2$ および $1/g_g^2$ は，実数となる．したがって，$z = 0$ および $\eta = 0$ におけるスポットサイズ $s$ および $s_g$ は，それぞれ，式（10）および（11）より

$$s = w_0 \sqrt[4]{\left(1 + gb/2 \cdot \cot gt/2\right) \Big/ \left(1 - gb/2 \cdot \tan gt/2\right)} \quad (50)$$

$$s_g = w_0 \sqrt[4]{\left(1 + gb/2 \cdot \cot gt/2\right) \Big/ \left(1 - gb/2 \cdot \tan gt/2\right)} \quad (51)$$

となり，実数で表わされる．

式（49）の安定条件を図示すると，図3の斜線のような領域となり，文献（3）の図7と異って，従来から近軸理論で知られている，軸づれおよび傾きがない場合の安定領域（幾何光学的安定領域）と完全に一致している．

ガウス波の行路の例を図4（a）（$0 \leqq gt/2 \leqq \pi/2$ なる場合）および（b）（$\pi \leqq gt/2 \leqq 3\pi/2$ なる場合）に示してある．これらの図と，文献（3）の図6および8との相異は，文献（3）では，ガスレンズおよびギャップの中央（$z = 0$ および $\eta = 0$）において，軸づれのみあるいは，傾きのみを有するガウス波の行路（$\delta_n' = \delta_{gn} = 0$ または，$\delta_n = \delta_{gn} = 0$ なる行路）しか表わしていないのに対し，本文の図4では，文献（3）の行路をも含めて，一般的に，軸づれと傾きとを同時にもつ行路を表わしている点にある．

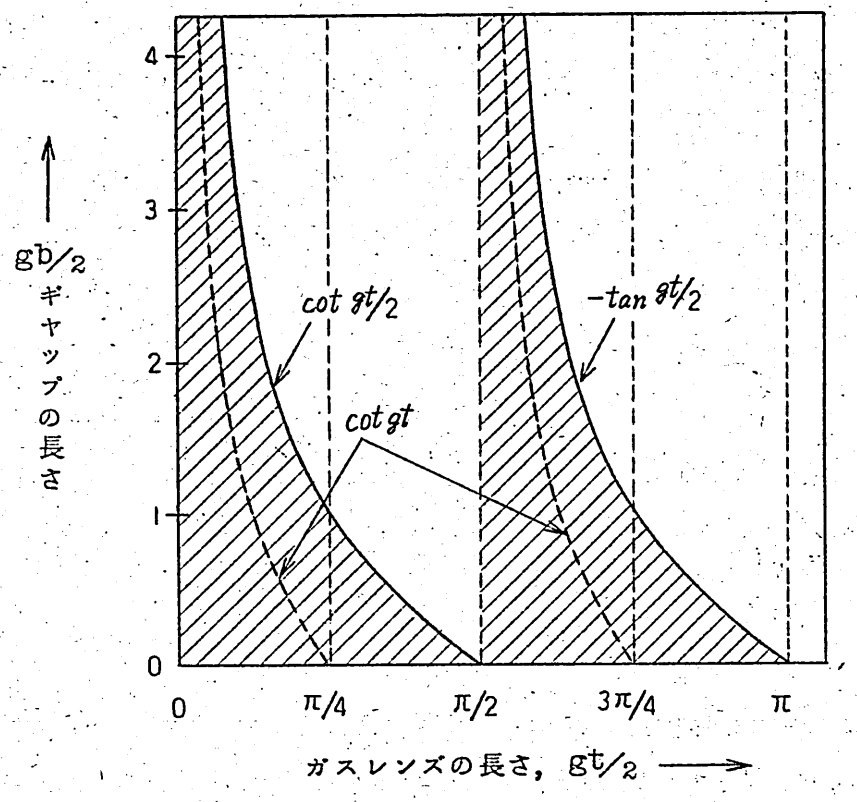
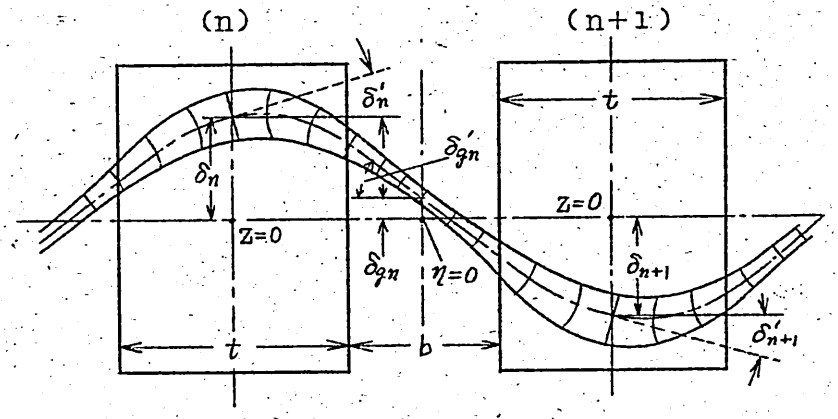
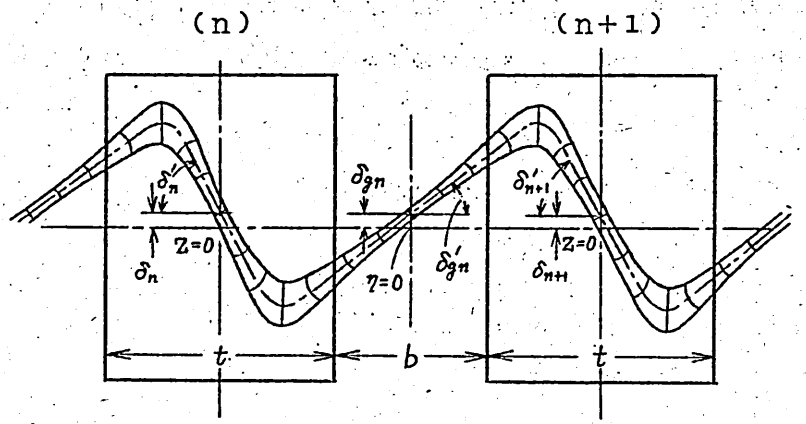



図5　周期的ガスレンズ導波系の安定領域（斜線の領域）
（点線は最適収束条件を示す）




(a)　$0 \leqq gt/2 \leqq \pi/2$ なる場合

図4（1）　周期的ガスレンズ導波系の安定なガウス波行路の例




(b) $\pi \leqq gt/2 \leqq 3\pi/2$ なる場合

図4（2） 周期的ガスレンズ導波系の安定なガウス波行路の例

## 6. 最適収束条件のもとにおけるガウス波の応答

ガスレンズ内部およびギャップ内の任意の面zおよびηにおけるスポットサイズを，それぞれ，s(z)および$s_g(\eta)$とすると，これらは，それぞれ，式(43)および(44)における$r^2$の係数の実数部より，つぎのように求められる．

$$\begin{cases} s(z) = s\sqrt{\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{W_0}{s}\right)^4+\left(1-\dfrac{W_0^4}{s^4}\right)\cos 2gz\right\}} & (52) \\ s_g(\eta) = s_g\sqrt{1+\left(\dfrac{\eta}{k(0)\,s_g^2}\right)^2} & (53) \end{cases}$$

ここで，sおよび$s_g$は，それぞれ，式(50)および(51)で与えられる実数を表わす．すなわち，スポットサイズは，軸づれおよび傾きがない場合と

同じ式で表わされる.[1],[3] したがって，$s(z)$ の最大値 $s_M$ は，ギャップ長 $b$ を一定としたとき，ガスレンズ長 $t$ のある値で最小となる．すなわち，$s_M$ は

$$gb/2 = \cot gt \tag{54}$$

なるとき，最小値

$$(s_M)_{min} = w_0 \sqrt{\cot gt/4} \tag{55}$$

をとる．またこのときの $s_g(\eta)$ の値は，

$$s_g(\eta) = w_0 \ (1+g^2 b^2)^{1/4} \sqrt{1 + \frac{4b^2\eta^2}{g^2b^2+1}} \tag{56}$$

となる.[1]

ガスレンズ長 $t$ とギャップ長 $b$ との関係を，式(54)のようにえらんだとき，電磁界の収束が最も有効に行われることになる．この意味で，式(54)を最適収束条件とよぶことにし，図3に点線で示してある．

式(54)の関係を，式(13),(16)，および(50)に代入すると，

$$\left.\begin{aligned} &A_0 = D_0 = 0 \\ &B_0 = \frac{1}{g}\cot gt/2 \quad , \quad C_0 = -g\tan gt/2 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

となる．したがって，式(23),(24),(28),(29)および(30)より，

$$\begin{cases} \delta_n = -\dfrac{\delta_1'}{g}\cot gt/2 \cdot \cos\dfrac{n\pi}{2} + \delta_1 \cdot \sin\dfrac{n\pi}{2} & (58) \\ \delta_n' = \delta_1' \cdot \sin\dfrac{n\pi}{2} + \delta_1 \cdot g\tan\dfrac{gt}{2}\cos\dfrac{n\pi}{2} & (59) \end{cases}$$

となる．式(58)，および(59)を，式(45)および(46)に代入すれば，最適収束条件のもとにおけるガウス波の中心部の軌跡，したがって，ガウス波の行路が求められる．特に，$\delta_1 \neq 0$，$\delta_1' = 0$なる場合，および$\delta_1 = 0$，$\delta_1' \neq 0$なる場合のガウム波行路の例を，それぞれ図5の(a)および(b)に示す．

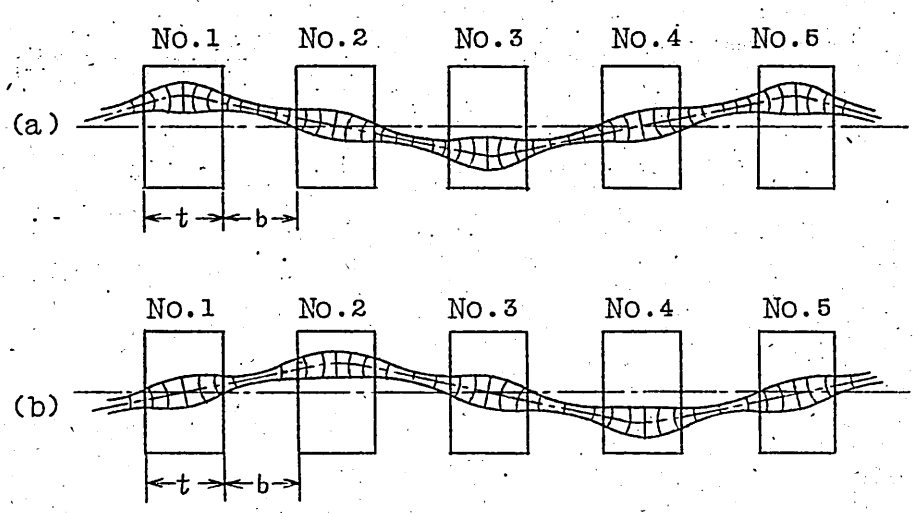



図5　最適収束条件のもとにおけるガウス波行路の例

（(a)；$\delta_1 \neq 0$，$\delta_1' = 0$なる場合
(b)；$\delta_1 = 0$，$\delta_1' \neq 0$なる場合）

## 7. 波動光学的応答と幾何光学的応答との関連

### 7．1　波動光学的安定条件と幾何光学的安定条件との関係

式(14)および(15)の関係を，マトリックスで表示すると

$$\begin{bmatrix} \delta_{n+1} \\ \delta'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta'_n \end{bmatrix} \tag{60}$$

となる．マトリックス要素$A_0$，$D_0$，$B_0$および$C_0$は，それぞれ，式(16)，(17)および(18)で与えられるが，式(13)および(10)の関係を代入して計算すると，

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos gt - \frac{gb}{2}\sin gt & \frac{1}{g}\left(\sin gt + \frac{gb}{2}\cos gt + \frac{gb}{2}\right) \\ -g\left(\sin gt + \frac{gb}{2}\cos gt - \frac{gb}{2}\right) & \cos gt - \frac{gb}{2}\sin gt \end{bmatrix} \tag{61}$$

となる．

光線マトリックスとの関係を知るために，n番目のガスレンズの中央からn＋1番目のガスレンズの中央にいたる光線マトリックス

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{gt}{2} & \frac{1}{g}\sin\frac{gt}{2} \\ -g\sin\frac{gt}{2} & \cos\frac{gt}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{gt}{2} & \frac{1}{g}\sin\frac{gt}{2} \\ -g\sin\frac{gt}{2} & \cos\frac{gt}{2} \end{bmatrix} \tag{62}$$

を計算してみると，式(62)は，式(61)の右辺と一致する．

すなわち，
$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{63}$$

となり，光線マトリックスに他ならないことがわかる．

幾何光学的な安定条件は，光線が導波系から発散してはならないことから光線マトリックスのTrace，A + Dが，

$$-2 < A+D < 2 \tag{64}$$

なる条件を満足することとして与えられる．

波動光学的に導いた安定条件式(49)は，4節および5節で示したように $|A_0 + D_0| < 2$ なる条件，すなわち，式(64)と同じ条件から得られたものである．したがって，波動光学的安定条件は，幾何光学的安定条件と完全に一致していることがわかる．

これに対して，文献(3)では，前述のように，軸づれ，斜入射に特有の位相変化項と，境界条件から波面の変化の連続条件を導き，その結果，安定領域は従来知られていた領域の一部分に限られると述べている．しかし，以上に示したように，この結論は正確ではなく，本文の付録にも示すように，波面の変化の境界における連続領域と，安定領域とは一般には必ずしも一致せず，境界における波面の変化の連続性と，伝送ビーム波の安定性とは無関係なのである．

## 7．2　ガウス波の中心部の軌跡と，光線の運動との関係

式(45)，(46)および(47)，(48)をマトリックス表示すると，それぞれ

$$\begin{bmatrix} \delta_n(z) \\ \delta_n'(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos gz & \frac{1}{g}\sin gz \\ -g\sin gz & \cos gz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_n' \end{bmatrix} \tag{65}$$

および

$$\begin{bmatrix} \delta_{gn}(\eta) \\ \delta_{gn}'(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{gn} \\ \delta_{gn}' \end{bmatrix} \tag{66}$$

となる．

式(65)の右辺の第1項は，ガスレンズの内部における0～z間の光線マトリックスを，また，式(66)の第1項は，ギャップ内の0～η間の光線マトリックスを表わしている．式(65)で，nをn＋1とおきかえると，

$$\begin{bmatrix} \delta_{n+1}(z) \\ \delta'_{n+1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos gz & {}^{1}/_{g} \cdot \sin gz \\ -g \sin gz & \cos gz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{n+1} \\ \delta'_{n+1} \end{bmatrix} \qquad (67)$$

となる．式(60)～(63)，(65)および(67)を用いて，$\delta_n$，$\delta'_n$，$\delta_{n+1}$，および$\delta'_{n+1}$を消去すると，

$$\begin{bmatrix} \delta_{n+1}(z) \\ \delta'_{n+1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z & B_z \\ C_z & D_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_n(z) \\ \delta'_n(z) \end{bmatrix} \qquad (68)$$

ただし

$$\begin{bmatrix} A_z & B_z \\ C_z & D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos g\left(\frac{t}{2}+z\right) & \frac{1}{g}\sin g\left(\frac{t}{2}+z\right) \\ -g \sin g\left(\frac{t}{2}+z\right) & \cos g\left(\frac{t}{2}+z\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos g\left(\frac{t}{2}-z\right) & \frac{1}{g}\sin g\left(\frac{t}{2}-z\right) \\ -g \sin g\left(\frac{t}{2}-z\right) & \cos g\left(\frac{t}{2}-z\right) \end{bmatrix} \qquad (69)$$

となる．

式(68)の右辺の第1項，すなわち，式(69)は，n番目のガスレンズの内部における任意の面，${}^{t}/_{2}-z$ から長さbなるギャップを経て，n＋1

番目のガスレンズ内の $t/2+z$ なる面にいたる，一周期間の光線マトリックスを表わしている．したがって，$\delta_n(z)$ および $\delta_n'(z)$ なる量は，それぞれ n番目のガスレンズの内部における面，zにおける光線の位置および傾きに一致することがわかる．すなわち，ガウス波の中心部の軌跡と光線の運動とは一致する．

式(43)および(44)は，それぞれ，n番目のガスレンズ内部およびギャップ内の面，zおよびηにおいて $\delta_n(z)$ および $\delta_{gn}(\eta)$ なる軸づれと，$\delta_n'(z)$ および $\delta_{gn}'(\eta)$ なる傾きとを同方向にもつガウス波とみなすことができる.* このような見方をすれば，軸づれ，斜入射ガウス波の応答電磁界の表示式は円筒座標系においても直交座標系の場合[6]と同様に，つぎのようにして，きわめて簡単に，かつ正確に導き出すことができる．

すなわち，軸づれおよび傾きがない場合の電磁界の表示式において，その中心の位置を $\delta_n(z)$ あるいは，$\delta_{gn}(\eta)$ だけづらせ，さらに $\delta_n'(z)$ あるいは，$\delta_{gn}'(\eta)$ だけの傾きを与えてやればよい．ここで，$\delta_n(z)$ および $\delta_n'(z)$ あるいは，$\delta_{gn}(\eta)$ および $\delta_{gn}'(\eta)$ は，前述のように，光線マトリックスを用いて容易に求められる．

この方法によって得た電磁界の表示式は，直接，波動方程式を解いて得られた結果[3]と等価であって，軸づれ，および傾きに特有の位相変化項をも含んでおり，正確な電磁界を表わす．

## 7．3　最適収束条件の幾何光学的な解釈

6節で述べた最適収束条件，式(54)が，幾何光学的には，どのように解

---

脚　註　* 軸づれ $\delta_1$ あるいは傾き $\delta_1'$ を持つガウス波は，円筒座標系では，それぞれ，$E_0 \exp\{-(r^2-2\delta_1 r\sin\theta)/2s^2\}$ および $E_0 \exp\{-r^2/2s^2-j\delta_1' k(0) r\sin\theta\}$ と表わされる.[3] ここで，$E_0$ はrに無関係な係数である．

釈できるかを検討する．式(54)が成立するとき，式(57)に示すように，

$A_0 = D_0 = 0$，したがって，　　$A_0 + D_0 = 0$　　(70)

となる．7．2節で明らかにしたように，式(61)は，光線マトリックスであるから，最適収束条件は，光線マトリックスのTrace が零なることと等価である．

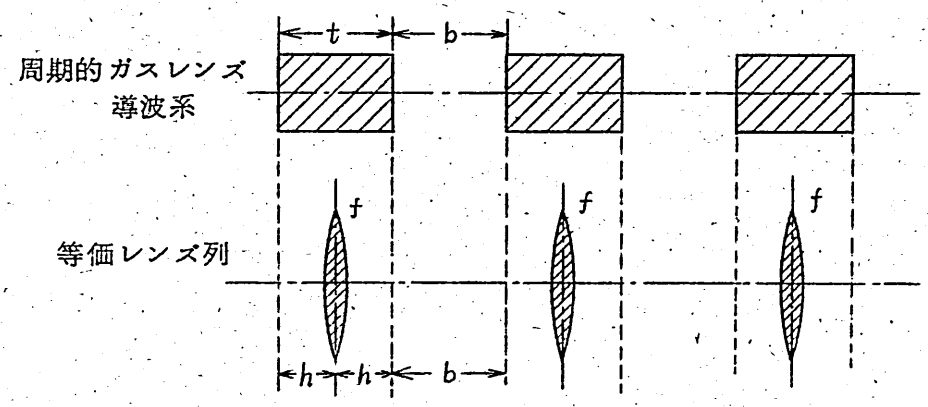



図6　周期的ガスレンズ導波系の等価レンズ列

あるいは，導波系を，図6のような等価レンズ列でおきかえると，各レンズの焦点距離f，および主平面と入射面との距離hは，それぞれ，

$$f = 1/g \sin gt \qquad (71)$$

および

$$h = \tan gt/2 / g \qquad (72)$$

で与えられる.[1]

この等価レンズ列の共焦点条件(Confocal Condition)は，

$$2f = 2h + b \qquad (73)$$

で与えられる．式(73)に，式(71)および(72)を代入すると，

$gb/2 = \cot gt$ となり，式(54)と同じ関係が得られる．

以上の結果，波動光学的考察から得られた最適収束条件は，幾何光学的には，導波系の一周期（ガスレンズ＋ギャップ）区間における光線マトリックスのTraceが零なること，あるいは，導波系と等価なレンズ列における共焦点条件であると解釈することができる．

## 8. あ と が き

周期的ガスレンズ導波系における軸づれ，斜入射ガウス波の応答電磁界について，波動光学的観点から，従来検討されていたよりも，さらに一般的に境界値問題を解くことにより，ガウス波の新しい安定な行路を見い出した．また，波動光学的な安定条件と，幾何光学的な安定条件とは，本文のような周期的ガスレンズ導波系においても，完全に一致することを示した．

さらに，軸づれ，斜入射ガウス波の波動光学的応答と，幾何光学的応答との関連を，一層明確にし，応答電磁界の円筒座標系における表示式が，軸づれおよび傾きがない場合の式から，きわめて簡単に，かつ，正確に導出できることを示した．

また，波動光学的に導かれる最適収束条件の幾何光学的解釈を与えた．最後に，境界において，スポットサイズの変化および波面の変化が，それぞれ連続となる領域と，安定領域との関係を明らかにし，文献(3)の安定領域に関する結論は，不十分であることを示した．

謝　辞

日頃から御指導いただく，大阪大学工学部，板倉清保教授，ならびに，有益な御討論をいただいた当研究室の諸氏に深謝する．また，文献(3)の，波面の変化の連続性と安定領域に関する，著者等の疑問について，御討論いただいた北海道大学工学部，電子工学科の，今井正明氏に謝意を表わす．

# 参 考 文 献


(1) E.A.J. Marcatili ; "Modes in a sequence of thick astigmatic lens-like focusers", B.S.T.J., **43**, p. 2887 (Nov., 1964).

(2) 末松安晴, 吹抜洋司 ; "理想化されたガスレンズ導波系の解析", 信学誌, **48**, p. 1684 (昭40-10).

(3) 今井正明, 伊藤精彦, 松本 正 ; "理想的ガスレンズの波動光学的考察", 信学誌, **51-B**, 5, p. 185 (昭43-05).

(4) 熊谷信昭, 吉田健一, 中原恒雄 ; "反射形ビーム・ウェーブガイド", 信学誌, **40**, 6, p. 1019 (昭41-06).

(5) J.R. Pierce ; "Theory and Design of Electron Beams", D. Van Nostrand Co., INC, N.Y., p. 195 (1954).

(6) 末松安晴 ; "ビーム導波系用収束素子の異軸, 斜入射ガウス波に対する性質", マイクロ波研資(Jan., 1967).

# 付　　録

境界において，スポットサイズの変化および波面の変化が，それぞれ，連続となる領域と，安定領域との関係

ガウス波のスポットサイズおよび波面の曲率半径をそれぞれ，ガスレンズ内部で$s(z)$および$R(z)$とし，ギャップ内で，それぞれ，$s_g(\eta)$および$R_g(\eta)$と表わすと，これらは，つぎの簡単な微分方程式を満足する．

$$\frac{ds(z)}{dz}=-\frac{s(z)}{R(z)}\quad,\qquad \frac{ds_g(\eta)}{d\eta}=-\frac{s_g(\eta)}{R_g(\eta)} \tag{A-1}$$

あるいは，

$$\frac{dR(z)}{dz}=\frac{R^2(z)}{s(z)}\frac{d^2s(z)}{dz^2}-1\quad,\qquad \frac{dR_g(\eta)}{d\eta}=\frac{R_g^2(\eta)}{s_g(\eta)}\frac{d^2s_g(\eta)}{d\eta^2}-1 \tag{A-2}$$

式(A-1)から，ガスレンズとギャップとの境界面において，

$$s(\pm t/2)=s_g(\mp b/2),\qquad R(\pm t/2)=R_g(\mp b/2)\ , \tag{A-3}$$

が，満足されていれば，スポットサイズの変化の連続性

$$\left.\frac{ds(z)}{ds}\right|_{z=\pm t/2}=\left.\frac{ds_g(\eta)}{d\eta}\right|_{\eta=\mp b/2} \tag{A-4}$$

も，同時に満足されていることがわかる．

これに対し，波面の変化は，式(A-2)から明らかなように，式(A-3)の

他に，さらに，

$$\left.\frac{d^2 s(z)}{dz^2}\right|_{z=\pm t/2} = \left.\frac{d^2 s_g(\eta)}{d\eta^2}\right|_{\eta=\mp b/2} \qquad (A\text{-}5)$$

が満足されなければ，連続とならない．しかるに，ギャップ内では，常に，$d^2 s_g(\eta)/d\eta^2 > 0$ であるから，

$$\left.\frac{dR(z)}{dz}\right|_{z=\pm t/2} = \left.\frac{dR_g(\eta)}{d\eta}\right|_{\eta=\mp b/2} \qquad (A\text{-}6)$$

が成立するためには，

$$\left.\frac{d^2 s(z)}{dz^2}\right|_{z=\pm t/2} > 0 \qquad (A\text{-}7)$$

なる制限が必要である．式(A-7)に，本文の式(52)および(50)を代入し $gt/2 > 0$ なることを考慮すると，結局，波面の変化が連続となるためには少くとも，

$$\left.\begin{array}{l} 0 < gb/2 < -2\sin 2gt/(3\cos 2gt+5) \\ (2m+1)\pi/4 < gt/2 < (m+1)\pi/2 \end{array}\right\} \qquad (A\text{-}8)$$

なる制限が必要である．ただし，$m = 0, 1, 2, \cdots$ である．

式(A-8)で与えられる領域を図示すると，図7のようになり，安定領域（本文の式(49)）の一部分を占めているに過ぎない．また，文献(3)で求められている安定領域とも一致しない．

以上に示した通り，安定領域は，境界面 $z = \pm t/2$ ($\eta = \mp b/2$)において，スポットサイズの変化が連続となる領域と完全に一致するが，波面の変化が連続となる領域とは，必ずしも一致しないことがわかる．

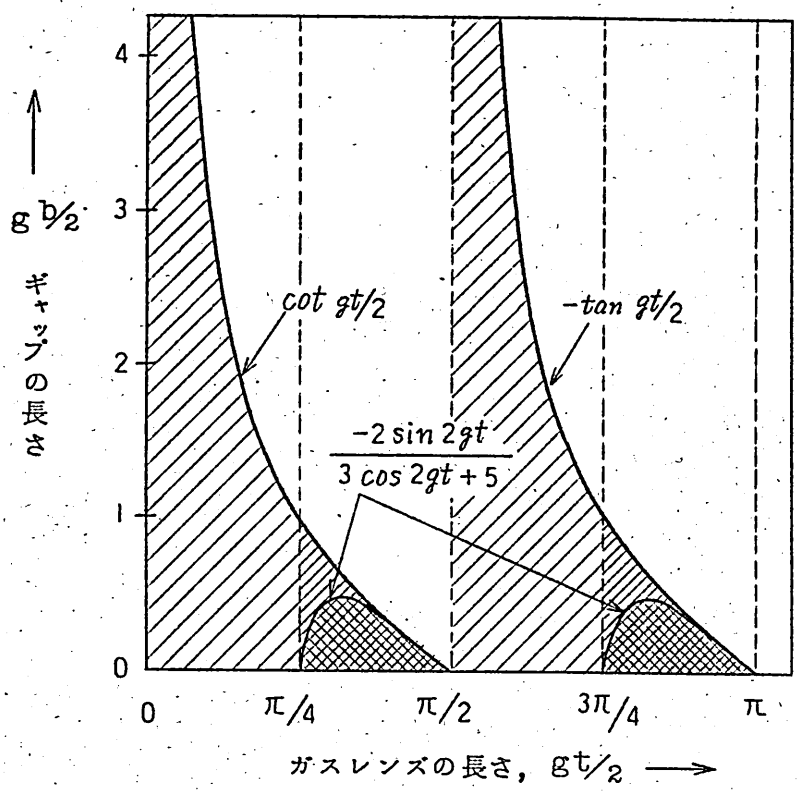



図 7　波面の変化の連続領域 ▨ と
安定領域 ▨ との関係

輻射科学研究会資料

# 周波数特性をも考慮した逓倍器の解析
## ——小中信号理論——

池上淳一
中島將光
岩田　忠

（京都大学　工学部）

1968年7月26日

# 目　　次


1．まえがき …… 1

2．周波数逓倍に関する基本式 …… 2

3．n逓倍の解析 …… 4

4．二逓倍について …… 10

5．$Q_p^2$に関する諸特性 …… 12

6．FM信号に対する歪 …… 15

7．小中信号理論による逓倍器の設計 …… 18

8．むすび …… 25

文献，付録A，B，C …… 26

# 周波数特性をも考慮した逓倍器の解析
## —小中信号理論—

## 1. まえがき

周波数逓倍は古い問題であるが，近年，無損失な非線形素子（バラクタ）が開発され，高能率な逓倍が出来るようになつた。K.K.N. Changの解析[1]以来，高能率化を中心として多くの研究がなされ[2]~[4]，その動作機構が明らかにされて来た。これらは中継装置の局発電力供給など，単一周波数で応用されるのが殆んどであつたが，最近では中継装置の固体化の一端として FM信号を直接逓倍しようとする動きもある。この場合，逓倍器はもはや単一の周波数で動作するのではないので，従来の解析より一歩進めて逓倍器の周波数に対する振舞をも調べなければならない。

本文はこれらの現状に鑑み，バラクタ・ダイオードを用いた電流励振形逓倍器を基本的なモデルとして，逓倍動作を解析的に総括し，周波数特性，FM伝送特性，逓倍器の設計等に言及したものである。信号が非常に大きく所謂，電荷蓄積が生ずるような場合は非線形性を表す関数が不連続的となり，解析的な検討は困難であるので，以下の解析は非線形特性が連続的である場合に限る。しかし非線形容量を電圧と電荷の関数として表すと，電荷蓄積が生ずる場合でも一次の導関数まで連続となるので，非線形特性を適当に仮定すると，以下の解析は比較的大きな信号まで適用することができる。電圧励振形に関しても大体同様な解析が行えるが，最もよく用いられる電流励振形をモデルとした。

逓倍器は元来，非線形を取扱うものである故，一般的な解析は難かしく，大抵の研究は計算機を用いて行なわれているのが現状である。周波数特性まで調べようとすれば，計算のプログラム自身複雑になる上[5]，FM伝送特性までみようとすると計算は更に繁雑化する。従つてこれを行

おうとすれば，数式的に解析する必要があり，それの可能な小中信号の場合を扱ったのである．入力基本波成分を含む線形類似なイミタンス行列を使えば，普通の線形交流理論と同じような方法で解析を進めることができる。

## 2. 周波数逓倍に関する基本式

電流励振形逓倍の基本式を導くために非線形容量の両端の電圧$v$をそれに蓄えられる電荷$q$の関数として表す：

$$v = v(q) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k (q - Q_0)^k \tag{1}$$

$Q_0$はバイアス電荷であり，エラスタンス係数$S_k$は$Q_0$の関数である．この容量に

$$q = \sum_{\nu=-m}^{m} Q_\nu e^{j\nu\omega t}, \qquad Q_{-\nu} = Q_\nu^* \tag{2}$$

なる電荷が存在するとき

$$v = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V_\mu e^{j\mu\omega t}, \qquad V_{-\mu} = V_\mu^* \tag{3}$$

なる電圧が生ずる。(2)，(3)式を(1)式に代入し，各フーリエ成分（各調波振巾の半分）の比較を行うと

$$V_h = \sum_{\lambda_\nu}^{h} k! S_k \prod_{\nu \neq 0} \frac{1}{\lambda_\nu!} Q_\nu^{\lambda_\nu} \tag{4}$$

を得る。ここに

$$k = \sum_{\nu=-m}^{-1} \lambda_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \tag{5}$$

であり，総和記号$\sum_{\lambda_\nu}^{h}$は

$$h = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu \lambda_\nu \tag{6}$$

を満足するすべての自然数 $\lambda_\nu$ について加え合せる事を意味する（付録A参照）。(1)式は電圧と電荷の瞬時の関係を定めるのに対して，(4)式はバイアス $Q_0$ を定めた場合の交流振巾の間の関係を定める。

$n$ 逓倍の場合を考えて，電荷の基本周波成分と $n$ 調波成分のみ存在するものとすれば，(2)式に於いて

$$\nu = \pm 1 \ , \quad \pm n$$

の項のみを考慮して(4)式より

$$V_k = \sum_{\lambda_\nu}^{k} \frac{k!}{\lambda_{-n}!\lambda_{-1}!\lambda_1!\lambda_n!} S_k Q_{-n}^{\lambda_{-n}} Q_{-1}^{\lambda_{-1}} Q_1^{\lambda_1} Q_n^{\lambda_n} \qquad (7)$$

を得る。ここに

$$k = -n\lambda_{-n} - \lambda_{-1} + \lambda_1 + n\lambda_n = \pm 1, \ \pm n$$

$$k = \lambda_{-n} + \lambda_{-1} + \lambda_1 + \lambda_n$$

である。表現を簡単にするため，$n$ 調波成分は入力基本波成分に比して小さい：

$$|Q_n| < |Q_1|$$

と仮定し，$|Q_n|$ の高次の項を省略*する意味で

$$\lambda_{-n} = 0 \ , \quad \lambda_n = 0, \ 1$$

とおくと，$\lambda_1$ は

$$\lambda_1 = \frac{k+k-(n+1)\lambda_n}{2} \ , \quad \lambda_{-1} = \frac{k-k+(n-1)\lambda_n}{2}$$

のように一意的に定まる。よって(7)式は

$$V_1 = \sum_k k! S_k \left[ \frac{Q_1^{*\frac{k-1}{2}} Q_1^{\frac{k+1}{2}}}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!\left(\frac{k+1}{2}\right)!} + \frac{Q_1^{*\frac{k+n-2}{2}} Q_1^{\frac{k-n}{2}} Q_n}{\left(\frac{k-n}{2}\right)!\left(\frac{k+n-2}{2}\right)!} \right]$$

$$V_n = \sum_k k! S_k \left[ \frac{Q_1^{*\frac{k-n}{2}} Q_1^{\frac{k+n}{2}}}{\left(\frac{k+n}{2}\right)!\left(\frac{k-n}{2}\right)!} + \frac{Q_1^{*\frac{k-1}{2}} Q_1^{\frac{k-1}{2}} Q_n}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!\left(\frac{k-1}{2}\right)!} \right]$$

---

＊ これによってのみインピーダンス行列(9)が一義的に定まる。

とかける。この中主要な項

$$k=1,\ 3,\ n$$

をとり、

$$I_k = jk\omega Q_k \tag{8}$$

なる関係を用いると次のようなインピーダンス行列 $\mathbb{Z}_c$ が得られる：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_1}{j\omega} - \frac{3S_3|I_1|^2}{(j\omega)^3} & -\frac{S_n I_1^{*n-1}}{(-j\omega)^n} \\ \frac{S_n I_1^{n-1}}{(j\omega)^n} & \frac{S_1}{jn\omega} - \frac{6S_3|I_1|^2}{n(j\omega)^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_n \end{bmatrix} = \mathbb{Z}_c \begin{bmatrix} I_1 \\ I_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

*

このインピーダンス行列 $\mathbb{Z}_c$ は，それの随伴行列との和が零：

$$\mathbb{Z}_c + \mathbb{Z}_c^{+} = 0$$

であるから，無損失の条件を満足している。(9)式は K.K.N. Chang が求めた式[1]を少し精密化したものに当る。

## 3. n逓倍の解析

図1に示される電流励振（直列同調）形n逓倍回路について考える。電源及び負荷を除いた部分のインピーダンス行列は(9)式によつて次のように表わされる：

$$\mathbb{Z}_t = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \tag{10}$$

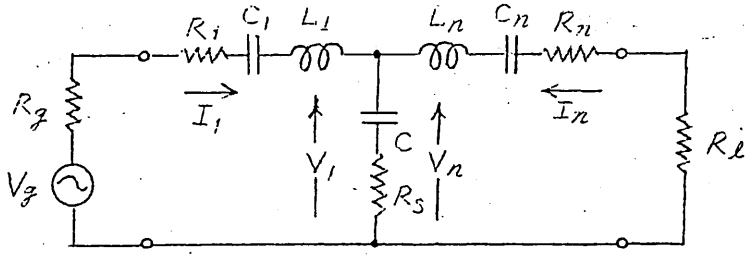
$$Z_{11} = R_1 + R_S + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{S_1}{j\omega} - \frac{3S_3|I_1|^2}{(j\omega)^3}$$

$$Z_{22} = R_n + R_S + jn\omega L_n + \frac{1}{jn\omega C_n} + \frac{S_1}{jn\omega} - \frac{6S_3|I_1|^2}{n(j\omega)^3}$$

$$Z_{12} = -Z_{21}^{*}, \quad Z_{21} = \frac{S_n I_1^{n-1}}{(j\omega)^n}$$

---

* (2)式で $m=2$ とおいて(1)式から直接導く事も出来る。




$R_g$ ： 電源の内部抵抗，　$R_l$ ： 負荷抵抗

C ： 非線形容量，　$R_S$ ： ダイオードの拡がり抵抗

図１．　電流励振形周波数逓倍回路

入出力回路の共振周波数は夫々 $Z_{11}$, $Z_{22}$ の虚部を零とおくことによって

$$\omega_{01}=\sqrt{\frac{S_1+1/C_1}{L_1}}\,(1+\varepsilon_1)\,,\quad \varepsilon_1=\frac{3}{2}\cdot\frac{L_1 S_3}{(S_1+1/C_1)^2}\left|I_1\right|^2$$
$$n\omega_{0n}=\sqrt{\frac{S_1+1/C_n}{L_n}}\,(1+\varepsilon_n)\,,\quad \varepsilon_n=\frac{3n^2 L_n S_3}{(S_1+1/C_n)^2}\left|I_1\right|^2 \qquad (11)$$

共振回路の負荷 Q を

$$Q_1=\frac{\sqrt{L_1(S_1+1/C_1)}}{R_g+R_1+R_S}\,,\qquad Q_n=\frac{\sqrt{L_n(S_1+1/C_n)}}{R_l+R_n+R_S} \qquad (12)$$

とおけば，$Z_{11}$, $Z_{22}$ は

$$Z_{11}+R_g=(R_g+R_1+R_S)(1+j2\delta Q_1)$$
$$Z_{22}+R_l=(R_l+R_n+R_S)(1+j2\delta Q_n)$$

とかかれる。ここに

$$2\delta=\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\approx\frac{2(\omega-\omega_0)}{\omega_0} \qquad (13)$$ *

通常，逓倍器の能率として入力電力に対する出力電力の比 $\eta_i=P_l/P_{in}$ がとられているが，ここでは有能逓倍能率

---

＊　以後 $\omega_{01}=\omega_{0n}=\omega_0$ の場合のみを考える。

$$\eta_{av} = P_\ell / P_{av}$$

を用いることにする。$P_{av}$ は電源の有能電力であって，$P_{av} = P_{in} + P_r \geqq P_{in}$（$P_r$ は反射電力）であるから $\eta_{av} \leqq \eta_i$ である。図1および(10)～(13)式より

$$\eta_{av} = \frac{4R_g R_\ell |Z_{21}|^2}{|(Z_{11}+R_g)(Z_{22}+R_\ell) - Z_{12}Z_{21}|^2}$$

$$= \eta_m \frac{4Q_p^2}{|(1+j2\delta Q_1)(1+j2\delta Q_n)+Q_p^2|^2} \qquad (14)$$

ここに $\eta_m$ は最大逓倍能率であって

$$\eta_m = \frac{R_g R_\ell}{(R_g+R_1+R_S)(R_\ell+R_n+R_S)} \qquad (15)$$ *

又，$Q_p = |\dot{Q}_p|$ であって

$$\dot{Q}_p = \frac{Z_{21}}{\sqrt{(R_g+R_1+R_s)(R_\ell+R_n+R_S)}}$$

$$= \frac{S_n I_1^{n-1}}{(j\omega)^n \sqrt{(R_g+R_1+R_S)(R_\ell+R_n+R_S)}} \qquad (16)$$

である。$Q_p$ は入力電力に依存するダイオードの動的な quality factor とみなせる量である。**

次に $Q_p$ と $P_{av}$ との関係を求める。(16)式および

---

* ここに得られた最大能率 $\eta_m$ は無損失インピーダンス行列 (9) を用いて得られたものであるが，非線形容量に関する定数 $S_1$, $S_2$, ---- が含まれていない。したがって電流励振形逓倍器が図1で表わされる限り，損失を生じない電荷蓄積効果のあるときにも適用できる一般性のあるものと考えられる。

** パラメトリック解析におけるダイナミック $\tilde{Q}$ と比較すれば，その意味が理解し易い。

$$P_{av} = \frac{|\sqrt{2}\,V_g|^2}{4R_g} = \frac{|V_g|^2}{2R_g} \tag{17}$$

$$V_g = I_1(Z_{in} + R_g) \quad *$$

を用いると

$$Q_p^{\frac{2}{n-1}} \left| 1 + j2\delta Q_1 + \frac{Q_p^2}{1 + j2\delta Q_n} \right|^2 = \frac{4P_{av}}{P_m} \tag{18}$$

を得る。ここに

$$P_m = \frac{2\omega^{\frac{2n}{n-1}} (R_g + R_1 + R_S)^{\frac{2n-1}{n-1}} (R_l + R_n + R_S)^{\frac{1}{n-1}}}{R_g S_n^{\frac{2}{n-1}}} \tag{19}$$

は $\delta = 0$, $Q_p = 1$, すなわち $\eta_{av} = \eta_m$ となるときの電源固有電力を表している。

(18)式を中心周波数 $\delta = 0$ において考えると図2に示す如く，ダイオ

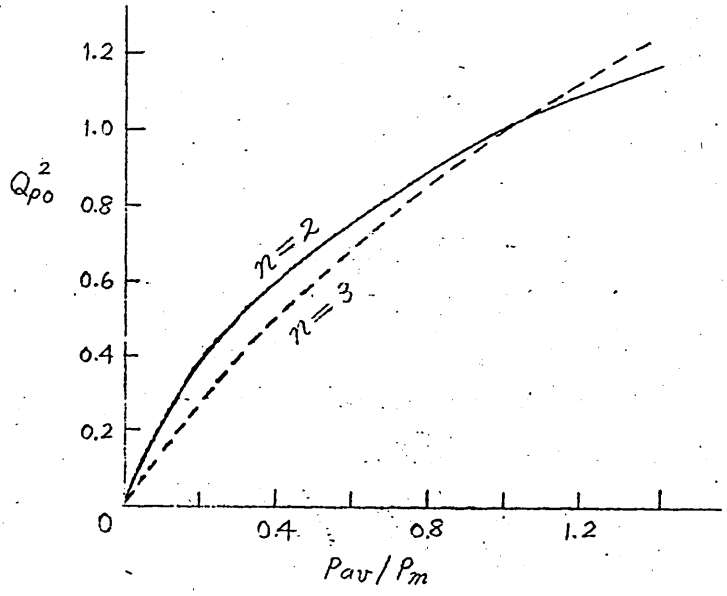



図 2. 電源固有電力 $P_{av}/P_m$ とダイオード励振パラメータ $Q_{po}^2$ との関係（$n$は逓倍次数）

---

* C.f. (24)

一般に励振パラメータ $Q_p^2$ は電源の固有電力 $P_{av}/P_m$ の単調増加関数であることが判る。従って入力の大きさを表わす量として $|V_g|$ の代りに $Q_{p0}$ を使用すると $\delta=0$ に於ける逓倍能率の電力特性は

$$\frac{\eta_{av}}{\eta_m}=\frac{4Q_{p0}^2}{(1+Q_{p0}^2)^2} \tag{20}$$

とかけるので，$Q_{p0}=1$ において逓倍能率は最大値 $\eta_m$ をとることが判る（図3参照）。

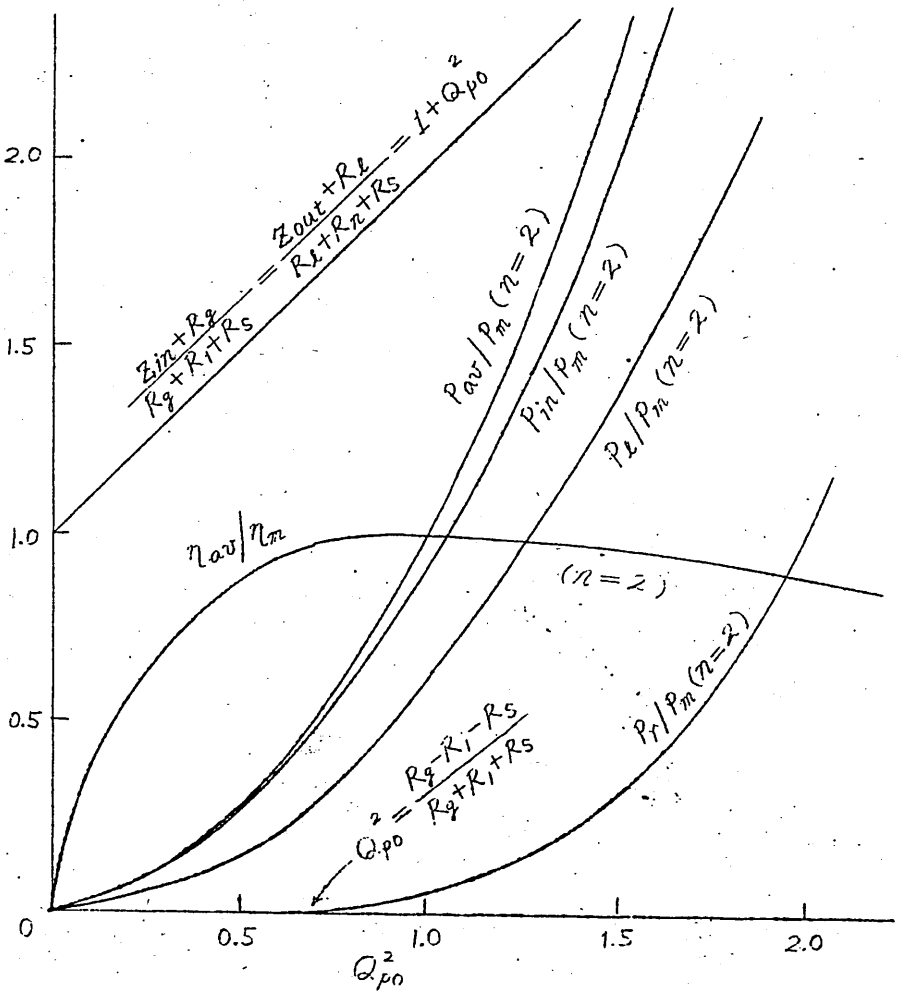



図3. 励振パラメーター $Q_{p0}^2$ に対する能率，入出電力及び諸電力の関係

(14)式においてδを変化させれば，能率$\eta_{av}$の周波数特性が得られる。特別な場合として$Q_p^2$の小さい所謂小信号の場合を考えると，(18)式を用いる事によって

$$\eta_{av}=\frac{4\eta_m(4P_{av}/P_m)^{n-1}}{\left|(1+j2\delta Q_1)^n(1+j2\delta Q_2)\right|^2} \tag{21}$$

を得る。信号の小さい場合は単峰特性であり，通倍次数が高くなる程比帯域巾が狭くなり，入力共振回路の方が出力共振回路より，大きい影響をもつことが判る。この式は電源電力が大きくなるに従って能率も大きくなる事を示しているが，これは K.K.N. Chang[1] の求めた小信号解析結果と比較すると興味がある。(14)式で$Q_p^2$のゆるやかな周波数特性を無視すると

$$Q_p^2 \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{Q_n}+\frac{Q_n}{Q_1}\right) \tag{22}$$

にしたがって，単峰，平坦，双峰特性となる。そして平坦特性になるときの帯域巾$2\delta_m$は

$$2\delta_m=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_n}\right) \tag{23}$$

である。

一方，入力インピーダンス$Z_{in}$と$Q_p$との関係は

$$Z_{in}+R_g=Z_{11}+\frac{|Z_{21}|^2}{R_{22}+R_L}+R_g$$

$$=(R_g+R_1+R_S)\left(1+j2\delta Q_1+\frac{Q_p^2}{1+j2\delta Q_n}\right) \tag{24}$$

と表わせる。出力インピーダンス$Z_{out}$は上式で$R_g$と$R_L$，$Q_1$と$Q_n$を交換すれば求まる（図5参照）。

## 4. 二逓倍について

$n=2$ のときは(18)式は $Q_p^2$ に関して三次式となり，$Q_p^2$ は電源電力の陽関数として表わす事ができ，逓倍能率はダイオード定数，回路定数及び電源・負荷定数の explicit な関数として表わすことができる。

更に階段接合ダイオードのように $S_3$（付録C）以上のエラスタンス係数が零となる場合は，基礎式として求めたインピーダンス行列(9)は近似式ではなく完全に正しい式となる。従って階段接合ダイオードの障壁容量の範囲で動作させるときは以下の結果は厳密な解である。

(18)式に於いて $n=2$ とおくと

$$Q_p^6+2(1-4\delta^2Q_1Q_2)Q_p^4+(1+4\delta^2Q_1^2)(1+4\delta^2Q_2^2)Q_p^2 -(1+4\delta^2Q_2^2)\cdot 4P_{av}/P_m=0 \qquad (25)$$

なる $Q_p^2$ の三次式を得る。$Q_p^2$ は実数であるべき事に注意して，カルダーノの方法によって上式を解くと

$$Q_p^2+\frac{2}{3}(1-4\delta^2Q_1Q_2)=\sqrt[3]{\frac{-g+\sqrt{g^2+4p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-g-\sqrt{g^2+4p^3}}{2}} \qquad (26)$$

$$\begin{cases} p=\frac{1}{9}\left\{3(1+4\delta^2Q_1^2)(1+4\delta^2Q_2^2)-4(1-4\delta^2Q_1Q_2)^2\right\} \\ g=\frac{2}{27}(1-4\delta^2Q_1Q_2)\left\{8(1-4\delta^2Q_1Q_2)^2-9(1+4\delta^2Q_1^2)(1+4\delta^2Q_2^2)\right\} \\ \qquad -(1+4\delta^2Q_2^2)4P_{av}/P_m \end{cases}$$

を得る。従って二逓倍の能率は(14)式及び(18)式を用いて

$$\eta_{av}=\eta_m\frac{P_n}{P_{av}}\cdot\frac{Q_p^4}{1+4\delta^2Q_2^2} \qquad (27)$$

とかくことができる。即ちダイオード，回路及び電源定数の explicit な関数として表わされた訳である。図4に二逓倍の能率 $\eta_{av}/\eta_m$ を電源有能電力 $P_{av}/P_m$ の関数として図示する。又図5に $Q$ 及び $P_{av}/P_m$ を種々変化させたときの二逓倍能率の周波数特性を示す。

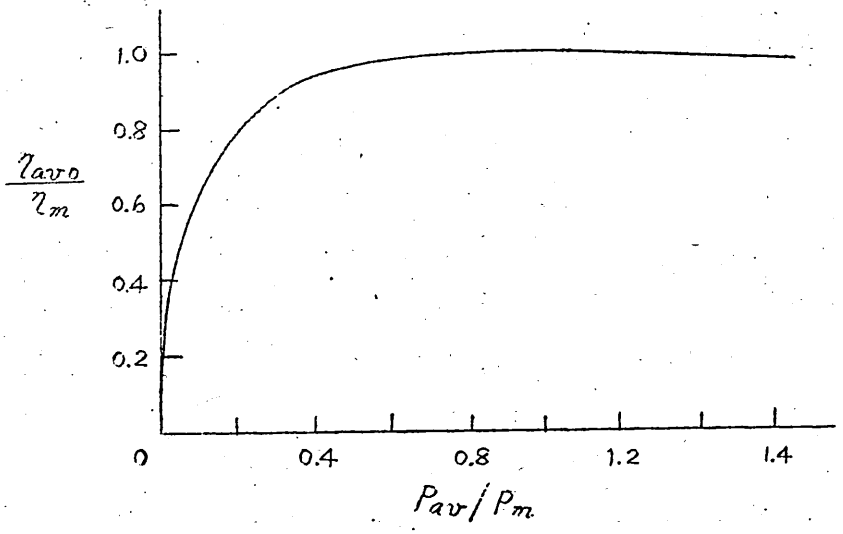



図4. 入力電力に対する二逓倍の能率特性

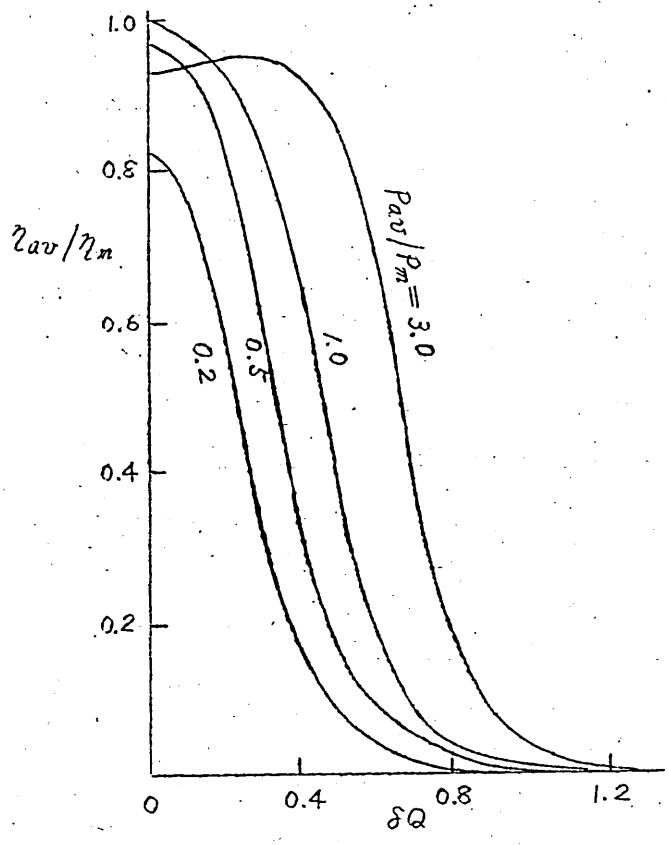



図5. (a) $Q_1 = 2Q$, $Q_2 = Q$

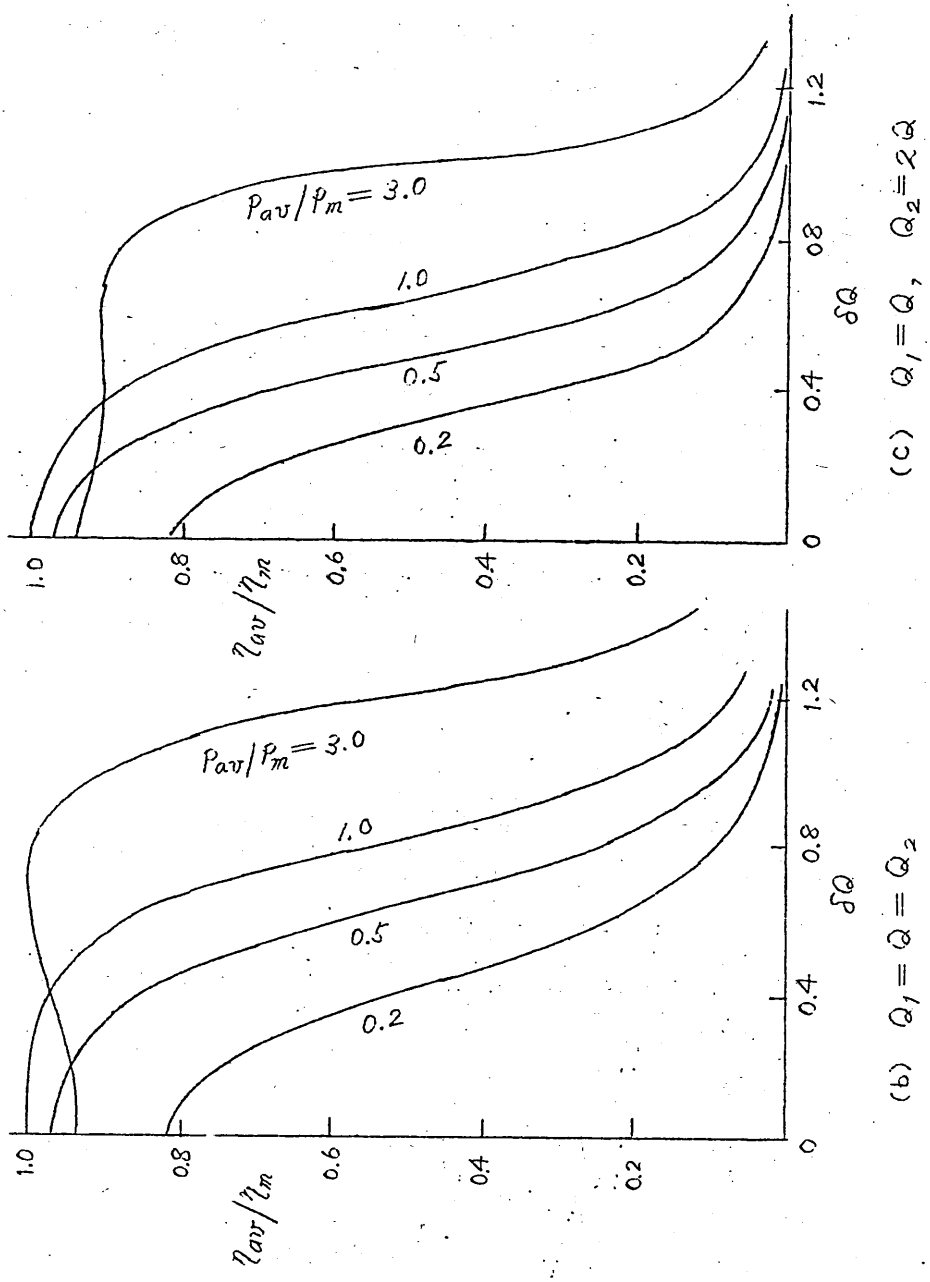



図5. 二逓倍能率の周波数特性

## 5. $Q_p^2$ に関する諸特性

励振パラメータ $Q_p^2$ に対する逓倍定数の特性を考察しておこう。

先ず中心周波数 $\delta=0$ に於いて考えると電源固有電力と $Q_{p0}^2$ の関係は (12)式より

$$P_{av0}=\frac{P_m}{4}Q_{p0}^{\frac{2}{n-1}}\left(1+Q_{p0}^2\right)^2 \tag{28}$$

であって，図2に示した通りである。従って出力（負荷消費）電力は

$$P_l=\eta_m P_m Q_{p0}^{2n/(n-1)} \tag{29}$$

であり，$Q_{p0}^2$ に従って単調に増加する。又実際に逓倍器に入る電力は

$$P_{in}=P_m Q_{p0}^{\frac{2}{n-1}}\frac{R_g\{(R_g+R_1+R_S)(1+Q_{p0}^2)-R_g\}}{(R_g+R_1+R_S)^2} \tag{30}$$

と計算されるが，入力端に於ける反射電力を求めると

$$P_r=P_{av}-P_{in}=\frac{P_m}{4}Q_{p0}^{\frac{2}{n-1}}\left(Q_{p0}^2-\frac{R_g-R_1-R_S}{R_g+R_1+R_S}\right)^2 \tag{31}$$

を得る。これから $Q_{p0}^2$ の値が

$$Q_{p0}^2=\frac{R_g-R_1-R_S}{R_g+R_1+R_S} \tag{32}$$

となるとき，入力回路の整合がとれる事を知る。この値は1より小さいので，逓倍器の能率が最大 $\eta_m$ となる少し手前で整合がとれる事になる。以上電力の諸関係を図示すると図3を得る。

中心周波数に於ける入力インピーダンスは(24)式で $\delta=0$ とおくことによつて

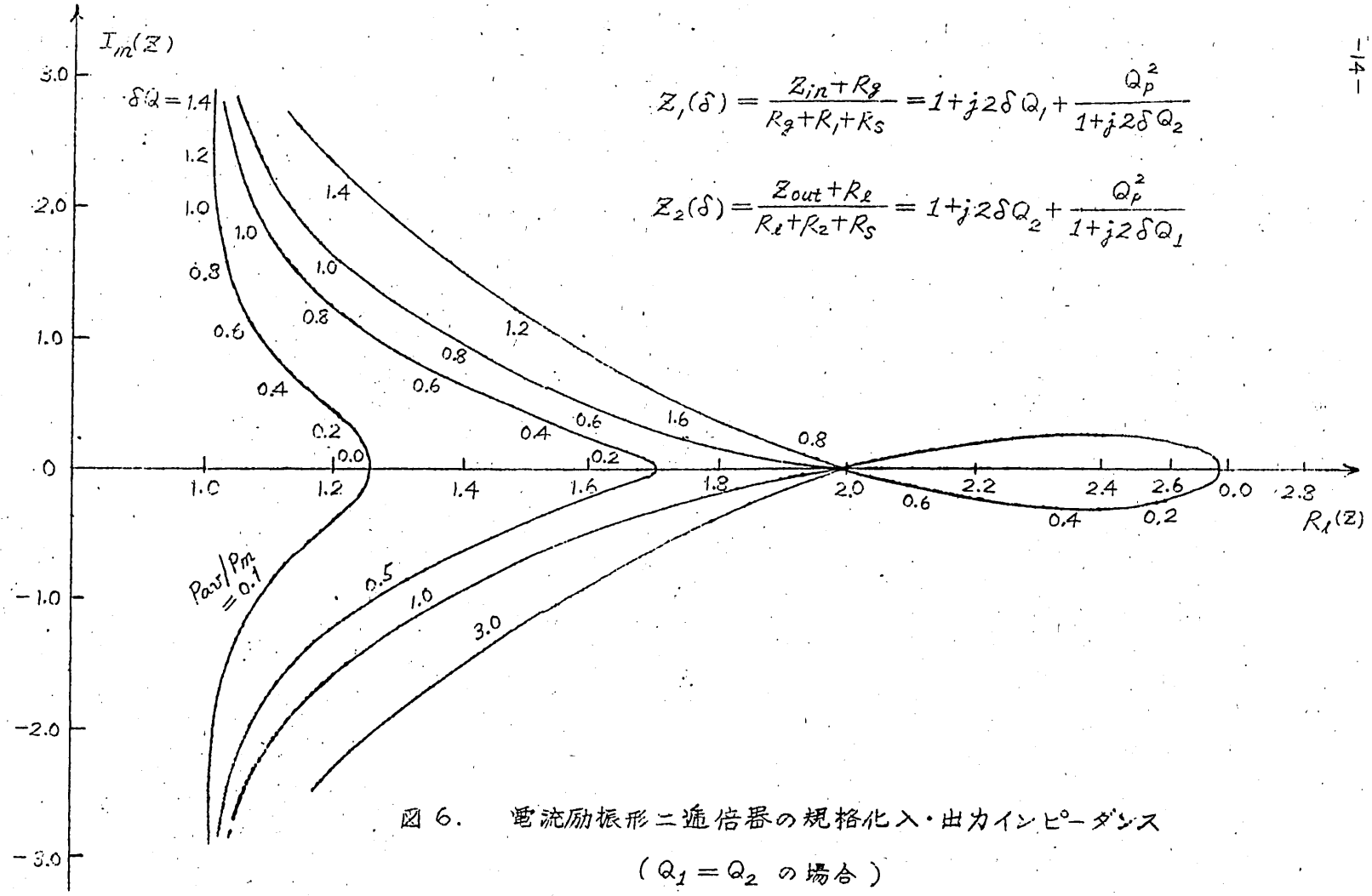
$$\frac{Z_{in}+R_g}{R_g+R_1+R_S}=1+Q_{p0}^2 \tag{33}$$

とかける。$Q_{p0}^2$ の一次増加関数であつて図3に示した通りである。出力インピーダンスも $R_1+R_2+R_S$ で規格化すれば(33)式と全く同じになる。

次に $Q_{p0}^2$ 或は $P_{av}/P_m$ を適当に定めて周波数 $\delta Q$ を変化させたときの入力・出力インピーダンスの軌跡を画くと図6を得る［(24)式］。電源電力が小さく

$$Q_p^2\leqq Q_1/Q_2\ ,\quad (入力インピーダンスの場合)$$

なる範囲ではループを画かず，電源電力が大きくなるとループを画くよ




$$Z_1(\delta) = \frac{Z_{in}+R_g}{R_g+R_1+R_S} = 1+j2\delta Q_1 + \frac{Q_p^2}{1+j2\delta Q_2}$$

$$Z_2(\delta) = \frac{Z_{out}+R_L}{R_L+R_2+R_S} = 1+j2\delta Q_2 + \frac{Q_p^2}{1+j2\delta Q_1}$$

図 6.　電流励振形二逓倍器の規格化入・出力インピーダンス

（$Q_1 = Q_2$ の場合）

うになる。

## 6. FM信号に対する歪

以上，単一周波数の電力を逓倍器に入れた場合の能率及びその周波数特性を求めた。FM信号は多くの側帯波を有するが，変調指数が大きい場合，換言すれば，FMの周波数偏移に対して周波数移動速度（変調周波数）が小さいときは，準定常状態とみなして上述の結果を直接用いることができる。*

先ず，逓倍器の伝達関数を

$$\sqrt{\eta_{av}}(\delta)=\frac{-I_n}{V_g/2}\sqrt{R_g R_L}=\frac{2Z_{21}\sqrt{R_g R_L}}{(Z_{11}+R_g)(Z_{22}+R_L)-Z_{12}Z_{21}} \tag{34}$$

と定義する。これは信号源電圧に対する負荷電流（又は電圧）の比に比例するもので，これの絶対値の自乗は能率 $\eta_{av}$ (14) を与える。電子管又は半導体増巾器で用いられる入力端電圧に対する出力端電圧で，伝達関数を定義するならば，入力回路の不整合による歪も別に述べなければならない。

(34)式に具体的な式を代入すれば

$$\sqrt{\eta_{av}}(\delta)=\sqrt{\eta_n}\frac{2\dot{Q}_p}{(1+j2\delta Q_1)(1+j2\delta Q_n)+Q_p^2}$$

$$=\sqrt{\eta_n}\frac{2S_n V_g^{n-1}(1+j2\delta Q_n)^{n-1}}{(j\omega)^n(R_g+R_1+R_s)^{n-1/2}(R_L+R_n+R_s)^{1/2}\{(1+j2\delta Q_1)(1+j2\delta Q_n)+Q_p^2\}^n} \tag{35}$$

を得る。したがって入出力間の移相量は

$$\varphi=-\frac{n\pi}{2}+(n-1)\tan^{-1}2\delta Q_n-n\tan^{-1}\frac{2\delta(Q_1+Q_n)}{1-4\delta^2Q_1Q_n+Q_p^2}+(\operatorname{sgn}S_n-1)\frac{\pi}{2} \tag{36}$$

$Q_p^2$ が小さい小信号の場合は

---

* 準定常とみなせないときの詳細については他の機会にゆずる。

$$\varphi=(sgn S_n-n-1)\frac{\pi}{2}-n\tan^{-1}2\delta Q_1-\tan^{-1}2\delta Q_n \qquad (37)$$

となる。(37)式を周波数ωについて，巾級数展開すると

$$\varphi(\omega)=\beta_0+\beta_1(\omega-\omega_0)+\beta_2(\omega-\omega_0)^2+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\beta_\lambda(\delta\omega_0)^\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}(\beta_\lambda\omega_0^\lambda)\delta^\lambda$$

$$=\beta_0+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{2\lambda-1}\left\{n(2Q_1)^{2\lambda-1}+(2Q_n)^{2\lambda-1}\right\}\delta^{2\lambda-1}$$

あるいは

$$\beta_0=(sgn S_n-n-1)\pi/2,\quad \beta_{2\lambda}=0\quad(\lambda\neq 0)$$

$$\beta_{2\lambda-1}\omega_0^{2\lambda-1}=\frac{(-1)^\lambda 2^{2\lambda-1}}{2\lambda-1}\left(nQ_1^{2\lambda-1}+Q_n^{2\lambda}\right) \qquad (38)$$

ここで，$\beta_0$の値は入出力位相差の基準を与えるもので，歪には関係ない。

$$\beta_1=-2(nQ_1+Q_n)/\omega_0$$

は信号の時間遅れをあらわし，これも歪に無関係である。偶数次の歪$\beta_{2\lambda}$は零であるが，これは伝送周波数特性が対称であるからである。又高次の歪は絶対値も小さく，(38)式は近似計算でもあるので，あまり重要でなく，最も重要なのは三次歪の項

$$\beta_3=(8/3)(nQ_1^3+Q_n^3)/\omega_0^3 \qquad (39)$$

である。入出力回路の quality factor が小さい程小さく，入力回路のそれの方が強く効くことがわかる。

信号が大きいときは(36)式を級数展開しなければならないが，$Q_p^2$が周波数の複雑な関数であるので，あらわな形で歪を求めることはできない。しかし，計算機で求める前に$Q_p^2$の周波数特性を無視して(36)式を級数に展開して

$$\beta_3\omega_0^3=\frac{8}{3(1+Q_p^2)^3}\left[nQ_1^3+Q_n^3-3Q_p^2\left\{nQ_1Q_n(Q_1+Q_n)+(n-1)Q_n^3\right\}\right.$$
$$\left.-(3Q_p^4+Q_p^6)(n-1)Q_n^3\right]$$

が求められるが，当然のことながら $Q_p^2 \to 0$ のとき(39)式に一致し，

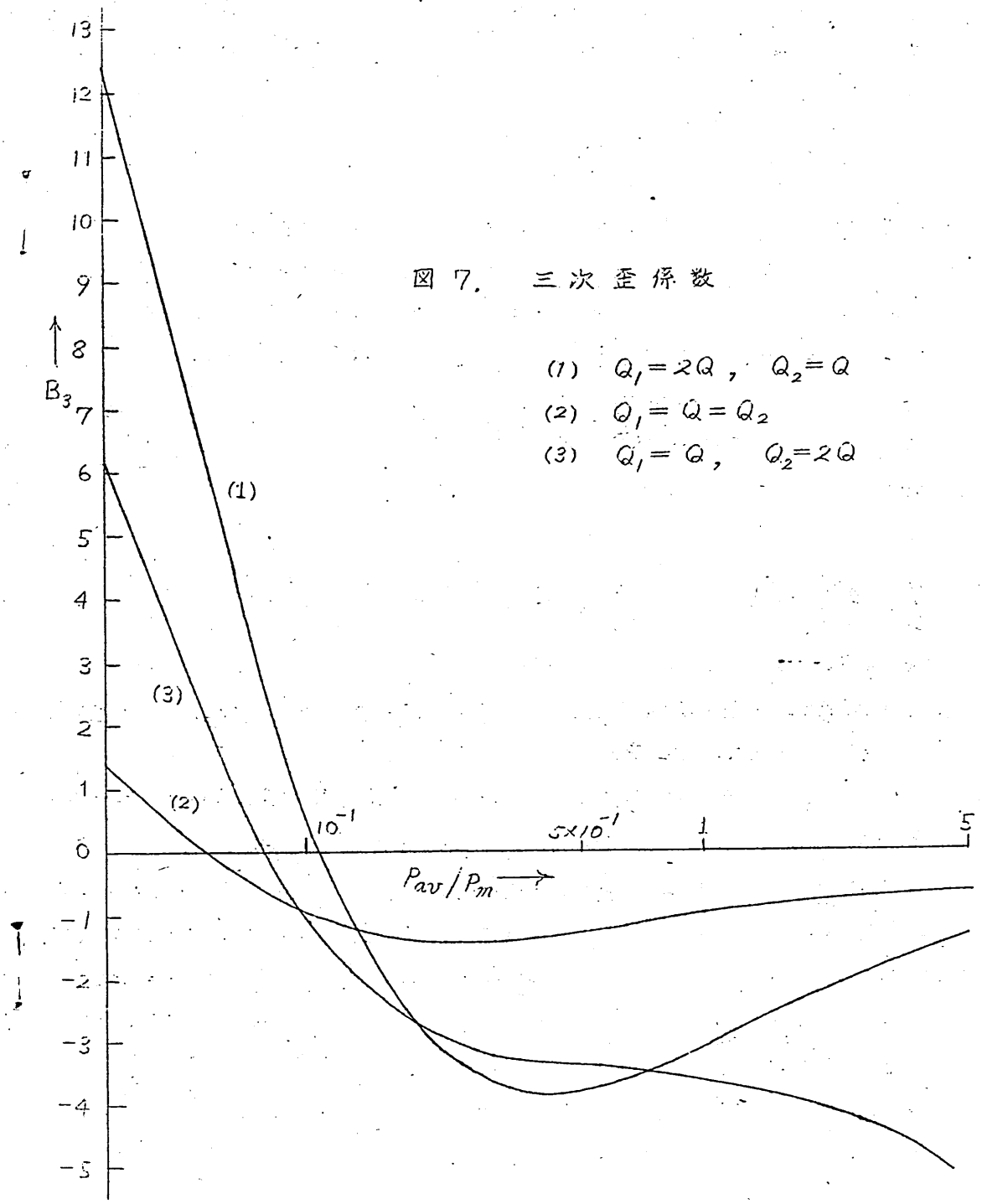



図 7. 三次歪係数

(1) $Q_1 = 2Q$ , $Q_2 = Q$

(2) $Q_1 = Q = Q_2$

(3) $Q_1 = Q$ , $Q_2 = 2Q$

$Q_p^2 \neq 0$ のときは(39)式より小さい。いいかえれば入力信号が大きくなると，かえって歪は少なくなる傾向にある。前述のごとく信号が大きくなれば，周波数帯域巾が増大するためとみられる。図7にQを変化させた場合の二逓倍の三次歪の係数

$$B_3 = \frac{3}{4}\beta_3\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^3 \tag{40}$$

を電源固有電力 $P_{av}/P_m$ を横軸にとつてかいてある。$P_{av}/P_m$ が小さいときは、小信号理論から求められる値に漸近し，入力電力が大になるにしたがい歪が小さくなり，ある点で三次歪が零となるのがみられる。

実際の三次歪は変調周波数を $\omega_m$，周波数偏移を $\omega_d$ とすれば

$$K_3 = \beta_3\omega_m\omega_d^2 = B_3Q^3\frac{\omega_m}{\omega_0}\left(\frac{\omega_d}{\omega_0}\right)^2 \tag{41}$$

より算出できる。

## 7. 小中信号論による逓倍器の設計

逓倍器には非線形素子が用いられているので、統一的な解析が難しく設計法は確立されていない。以上述べた電流励振小中信号論によつて設計を試みよう。

逓倍器に対して要求される主な性能は、能率がよい事及びFM波を逓倍する場合は帯域巾が広い事であろう。逓倍器の最大能率は(15)式で与えられる。従つて能率の高い逓倍器を得るには、できるかぎり損失 $R_S$ の少ないダイオードを選び，回路損失 $R_l$, $R_n$ を小さくすると共に電源と負荷のインピーダンス $R_g$, $R_L$ を高くとることである。このときダイオードの直列抵抗 $R_S$ は動作状態での値を考えねばならず，特に励振が大きく電荷蓄積のあるような場合［このときでも(15)式は成立する］には，ダイオード中の小数キヤリヤーの注入によつて拡散抵抗は逆バイアス領域の値より小さくなる筈である。回路損失 $R_l$, $R_n$ は通常零と仮定

されているが，高い周波数ではコイルの直列抵抗のみではなく，輻射損，表皮効果，共振容量の損失も含めて考えなければならない。後の実験結果をみてもこの損失は無視し得ないものであることを示している。ダイオード直列抵抗と回路損失が定まれば，高能率を得るには電源と負荷のインピーダンス $R_g$, $R_l$ を大きくとればよい筈である。ここに共振回路の負荷Qは

$$Q_1=\frac{\sqrt{L_1(S_1+1/C_1)}}{R_g+R_1+R_S}=\frac{S_1+1/C_1}{\omega_0(R_g+R_1+R_S)} \tag{42}$$

$$Q_n=\frac{\sqrt{L_n(S_1+1/C_1)}}{R_l+R_n+R_S}=\frac{S_1+1/C_1}{n\omega_0(R_l+R_n+R_S)}$$

であるが，$R_g$, $R_l$ を大きくとれば，$Q_1$, $Q_n$ が小さくなり，同時に周波数帯域巾も広くなり好都合ではあるが，余りQが小さくなると図1に於ける共振回路のフィルタ作用が悪くなり（解析の仮定が成立し難くなる）逓倍能率が落ちる。共振回路の全くない場合の解析は D. Leenov and A. Uhlir によってなされており，[6] それによれば，理想ダイオードを用いたときの最大二逓倍能率は 34.7 % である。従って特殊な回路を使用しないかぎりQは大体 10 位に選ぶのが適当であると思われる。次に実際の数値例を示しつつ，設計手順を述べよう。

周波数 $f=250\ MH_Z$ を二逓倍する場合を考え，この周波数帯に適するダイオードとして SV 88 B に相当する図8のような特性のダイオードを撰定する。

ダイオード容量の電圧に対する依存性は $v<V_\phi$ の範囲で

$$C=C_{j0}\left(1-\frac{v}{V_\phi}\right)^{-m}+C_m \tag{43}$$

で表わされる。ここに $C_m$ はカートリッヂ等による浮遊容量等の影響を考慮するために入れた定数である。図7に示されるダイオードに対する各定数を求めると

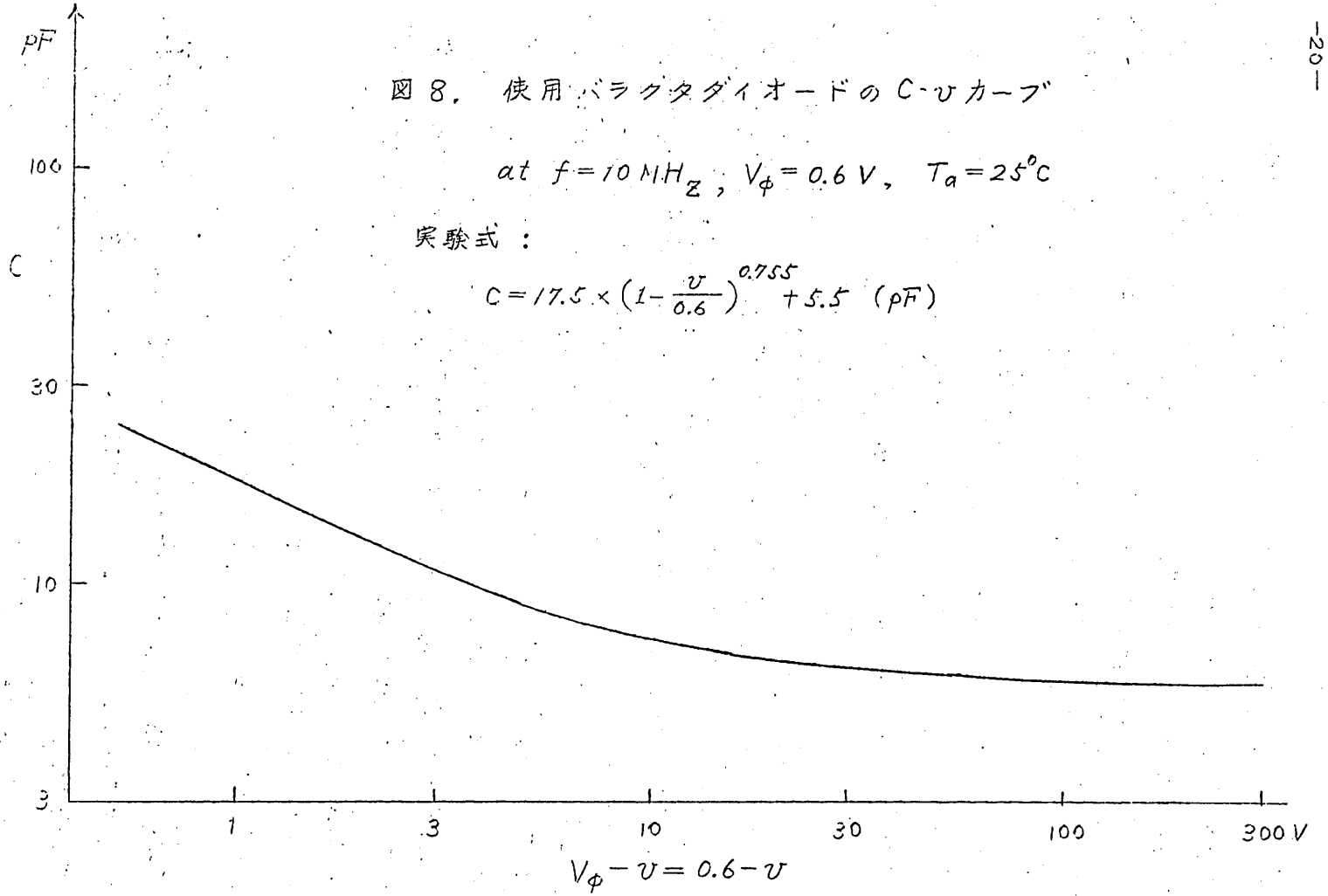
$$C_{j0}=17.5\ pF$$

図 8. 使用バラクタダイオードの C-v カーブ

at $f = 10\,MHz$, $V_\phi = 0.6\,V$, $T_a = 25^\circ C$

実験式：

$$C = 17.5 \times \left(1 - \frac{v}{0.6}\right)^{0.755} + 5.5 \quad (pF)$$



$$V_\phi = 0.6\,V$$
$$m = 0.755$$
$$C_m = 5.5\,pF$$

を得る。今，ダイオードにかかるバイアス電圧を $V_0 = -10\,V$ とすれば動作状態における平均容量は，図8又は(43)式によって

$$\frac{1}{S_1} = 17.5 \times \left(1 + \frac{10}{0.6}\right)^{-0.755} + 5.5 = 7.5\,pF$$

である。* そしてこれに直列に入る基本波共振回路の容量はその半分程度（$C_1 = 3.7\,pF$）とすると，(42)式より（$Q_1 = 10$）

$$R_g + R_1 + R_s = \frac{S_1 + 1/C_1}{\omega_0 Q_1} = \frac{\frac{1}{7.5\times10^{-12}} + \frac{1}{3.7\times10^{-12}}}{6.28\times250\times10^6\times10} = 25.5\,(\Omega)$$

を得る。ダイオード直列抵抗は $R_s = 2.5\,\Omega$ であり，コイル $L_1$ による損失を $R_1 = 3.0\,\Omega$（無負荷 $Q = 85$）とすれば

$$R_g = 2.55 - 2.5 - 3.0 = 20.0\ (\Omega)$$

となる。簡単のため逓倍器の入出力のインピーダンスレベルは等しいものとおいて

$$R_g = R_l = 20.0, \quad R_1 = R_n = 3.0$$

---

* 基本波交流分を考慮して更に厳密に計算すれば

$$Q_{do} = -\frac{C_{jo}V_\phi}{1-m}\left\{\left(1 - \frac{V_0}{V_\phi}\right)^{1-m} - 1\right\}$$

とおくとき

$$\frac{1}{S_1} = \frac{|Q_{do}|}{V_\phi}\left\{1 - \frac{1-m}{C_{jo}V_\phi}Q_{do}\right\}^{-\frac{1}{1-m}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-m}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-m}+1\right)} \cdot \frac{Z^{\frac{1}{1-m}}}{P'_{\frac{1}{1-m}}(Z)} + C_m = 7.3\,pF$$

と求められるが，これは静特性によって求められるものと殆んど変らない。ここに

$$Z = \left[1 - \left\{\frac{1}{C_{jo}V_\phi/(1-m)Q_{do} - 1}\right\}^2\right]^{-1/2}$$

とする。このとき最大能率は(15)式より

$$\eta_m = 0.617$$

この能率が得られるときの入力電力を知るために，エラスタンス係数$S_2$を求めよう。

$$S_2 = -\frac{mC_{j0}}{2V_\phi}\cdot\frac{(1-V_0/V_\phi)^{-m-1}}{\{C_{j0}(1-V_0/V_\phi)^{-m}+C_m\}^3}$$

$$= -\frac{0.755\times17.5\times10^{-10}}{2\times0.6}\times\frac{(1+10/0.6)^{-0.755-1}}{\{17.5\times10^{-12}\times(1+10/0.6)^{-0.755}+5.5\}^3}$$

$$= -1.69\times10^{20} \quad (\text{附録C参照})$$

これは又図8より $S_2=-\Delta C/2C^3\Delta v$ によっても容易に求められる。従って $\eta_m$ を与える電力は(19)によって

$$P_m = \frac{2\omega_0^4(R_g+R_1+R_s)^4}{R_g S_2^2} = \frac{2\times(6.28\times250\times10^6)^4\times25.5^4}{20\times(1.69\times10^{20})^2}$$

$$= 8.87\ (W)$$

又このときの比帯域巾は(23)式より

$$2\delta_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right) = 0.14 \quad (14\%)$$

実際の帯域巾はこれに中心周波数250MHzをかけて35MHzとなる。

以上で逓倍器の大体の設計はできたが，もう少し特性を改めたいと思えば，諸式をにらみ合せて手加減すればよい。これで大体満足となれば実際に使用する状況に照らして，入出力回路の結合部を設計する。即ち上に得られた電源及び負荷のインピーダンスは20Ωとなったが，入出力には通常50Ωの同軸線が用いられるので図1の回路はそのまま使うことができず，トランスを用いるか共振回路に細工を施して，インピーダンス整合を考えなければならない。図9はその最も簡単な方法であって，容量結合によってその目的を果している。$C_1'$, $C_1''$, $L_1$, $C$ が基本周波数の直列共振回路を形成し，$C_1'$によって電源の等価内部インピーダンスを定めている。電源部 $V_g'$, $R_g'$ $C_1'$ は図10のように$V_g$, $R_g$, Xに

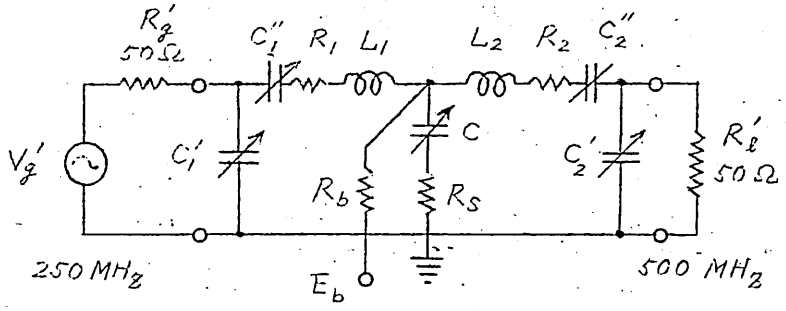
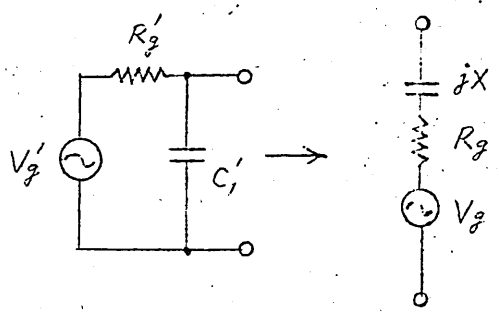



図9. 電流励振形二逓倍器回路図




$$jX = \frac{-j\omega C_1' R_g'^2}{1+(\omega C_1' R_g')^2}$$

$$R_g = \frac{R_g}{1+(\omega C_1' R_g')^2}$$

$$V_g = \frac{}{1+j\omega C_1' R_g}$$

図10. 電源回路の等価変換

等価変換される。前述の設計より $R_g=20$ であり，同軸線の特性インピーダンスは $R_g'=50$ であるから，$C_1'$ の値は

$$C_1' = \frac{1}{\omega_0 R_g'}\sqrt{\frac{R_g'}{R_g}-1} = \frac{1}{6.28\times 250\times 10^6\times 50}\sqrt{\frac{50}{20}-1}$$

$$= 15.6\times 10^{-12}\ (F)$$

又 $C_1''$ は

$$C_1'' = \frac{C_1}{1-\omega_0^2 C_1 C_1' R_g R_g'} = 3.9\times 10^{-12}\ (F)$$

コイル $L_1$ は

$$L_1 = \frac{1}{\omega_0^2}\left(C_1+\frac{1}{C_1}\right) = \frac{1}{(6.28\times 250\times 10^6)^2\times 2.5\times 10^{-12}}$$

$$= 1.62\times 10^{-7}$$

出力側も同様に計算して次の表を得る。

表　逓倍器の仕様

| | |
|---|---|
| 基本周数数（入力） | 250 MHz |
| 二逓倍周波数（出力） | 500 MHz |
| 最適入力電力 | 8.9 W |
| 最大逓倍能率 | 62 % |
| 周波数帯域巾 | 35 MHz (14%) |
| 入力及び出力インピーダンス | 50 Ω（同軸） |

回路定数（図9）

$C_1' = 16pF$, $C_1'' = 4pF$　$L_1 = 0.16\mu H$ $(Q_{L1} \approx 85)$

$C_2'' = 8pF$, $C_2'' = 1.5pF$　$L_2 = 0.08\mu H$ $(Q_{L2} \approx 80)$

大体上の設計に従つて図9の逓倍器を作つたときに得られた能率の電力特性と周波数特性とを図11及び図12に示す。実験はVHF帯で

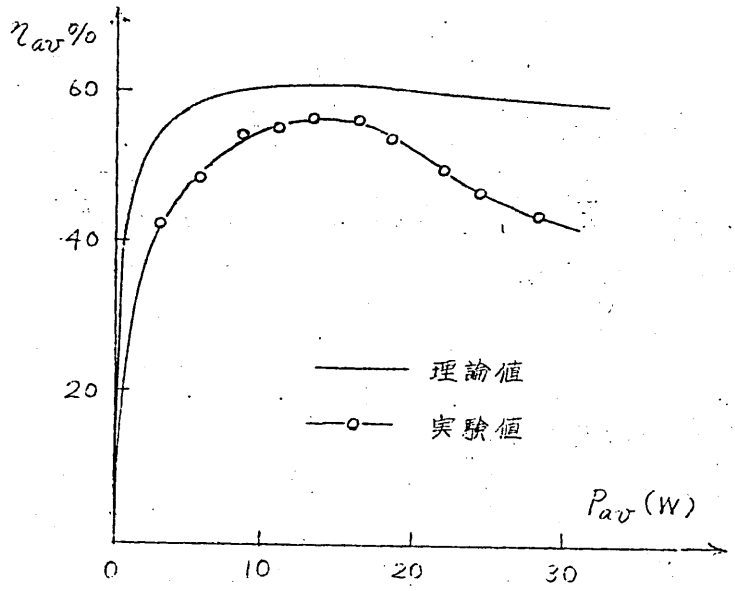



図11.　二逓倍能率の電力特性

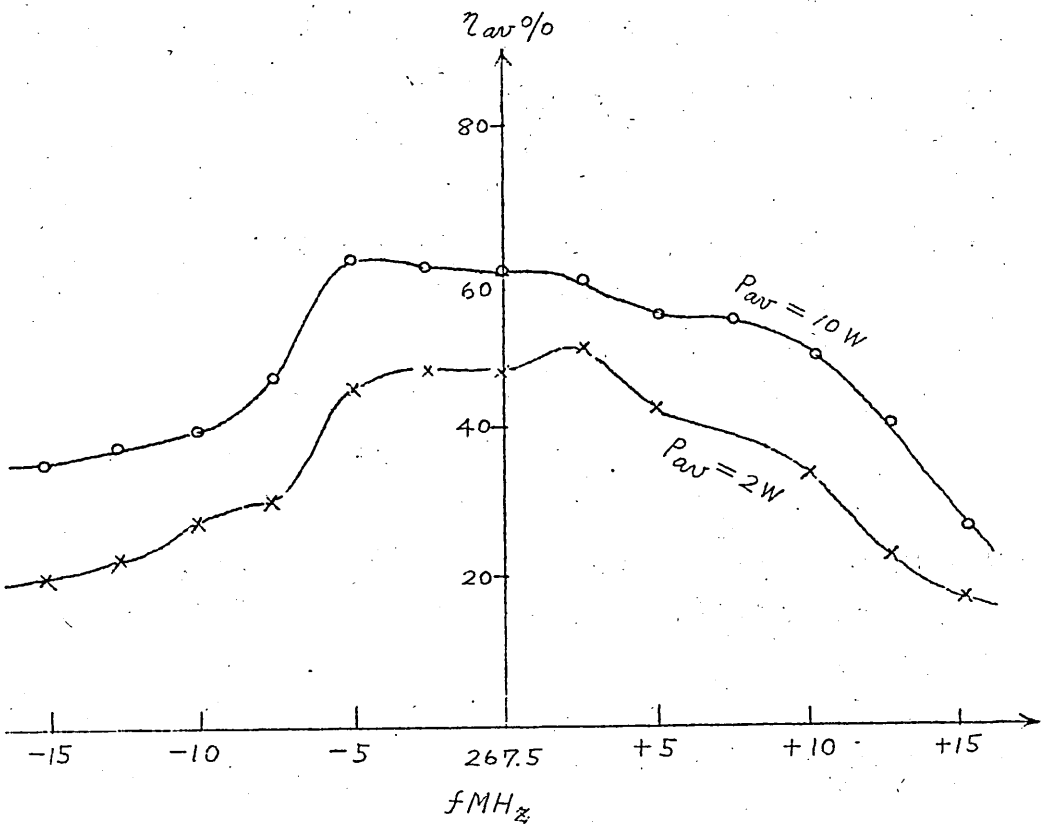



図 12.　二逓倍能率の周波数特性

ある故装置等の関係で正確なものではないが，大体設計通りの特性が得られている。

## 8. むすび

従来逓倍器の解析としては単一周波数において計算機によるものが多かったが，それに対して周波数特性をも考慮に入れて，総括的な数式的解析を行った。これは K.K.N. Chang.[1] T.M. Hyltin[2] 等が行なったものの拡張である。この理論の適用される範囲は，ダイオードに電荷蓄積の生じない場合，即ち非線形特性が連続的な場合であるが，計算機解

ではないので，逓倍動作を理解し設計を行う上で便利であろう。FM波を逓倍したときの歪に関しては，その最も簡単な場合を述べたが，この解析を用いて更に詳細な検討をすることも出来る。

本研究に当って便益を与えられた通研無線伝送課の方々及び協力頂いた元大学院生村上保代氏（現在電々公社），文献を提供頂いた阪大基礎工学部西村貞彦氏に感謝する。

## 参考文献

(1) K.K.N. Chang, "Harmonic Generation with Nonlinear Reactances", R.C.A. Review, Vol. 19 pp. 455-464 (Sept. 1958)

(2) T.M. Hyltin and K.L. Kotzebue, "A Solid-State Microwave Source from Reactance-Diode Harmonic Generators," I.R.E. Trans. Vol. MTT-9. No.1, pp. 73-78 (Jan. 1961)

(3) 池上，福井，松崎，"可変容量ダイオードによる周波数逓倍の一方式，" 信学誌，46. 7, pp. 912-919 (昭38-7)

(4) 宮川，"パンチスルーダイオードを用いた電流励振形二逓倍の解析，" マイクロ波研究会資料（昭42-8）及び信学誌，51-B，4. pp. 117-124 (昭43-4)

(5) Burkhard Schiek ; "Frequenzverhalten von Vervielfachern mit Kapazitätsdioden," A.E.Ü 20. 9 pp. 514-526 (Sept. 1966)

(6) D. Leenov and A. Uhlir. Jr., "Generation of Harmonics and Subharmonics at Microwave Frequencies with P-N Junction Diodes," Proc. IRE, Vol. 47. No. 9

pp. 1724-1729 (Oct. 1959)

# 付録A　(4)式の導出

非線形容量関係式を積分表示

$$v(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(ju)e^{jug}du \tag{A1}$$

すれば，一般的導出が容易になる。ここに

$$F(ju)=\int_{-\infty}^{\infty}v(g)e^{-jug}du \tag{A2}$$

である。(3)式の電圧のフーリエ係数は

$$V_h=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}ve^{-jh\omega t}d\omega t \tag{A3}$$

であるから，これに(A1)式及び(2)式を代入し

$$e^{j\omega t}=Z$$

なる変数変換を行うと

$$V_h=\frac{1}{2\pi}\int_C F(ju)du\frac{1}{j2\pi}\oint\frac{e^{ju\sum_{\nu=-m}^{m}Q_\nu Z^\nu}}{Z^{h+1}}dZ$$

を得るが

$$e^{ju\sum_{\nu=-m}^{m}Q_\nu Z^\nu}=\prod_{\nu=-m}^{m}e^{juQ_\nu Z^\nu}=e^{juQ_0}\prod_{\nu\neq 0}\sum_{\lambda_\nu=0}^{\infty}\frac{(juQ_\nu Z^\nu)^{\lambda_\nu}}{\lambda_\nu!}$$

$$=e^{juQ_0}\sum_{\lambda_{-m}=0}^{\infty}\frac{(juQ_{-m}Z^{-m})^{\lambda_{-m}}}{\lambda_m!}\cdots\sum_{\lambda_{-1}=0}^{\infty}\frac{(juQ_{-1}Z^{-1})^{\lambda_{-1}}}{\lambda_{-1}!}$$

$$\times\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\frac{(juQ_1Z)^{\lambda_1}}{\lambda_1!}\cdots\sum_{\lambda_m=0}^{\infty}\frac{(juQ_mZ^m)\lambda_m}{\lambda_m!}$$

$$=e^{juQ_0}\sum_{\lambda_{-m}=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_m=0}^{\infty}\prod_{\nu\neq 0}\frac{(juQ_\nu Z^\nu)^{\lambda_\nu}}{\lambda_\nu!}$$

及び

$$\frac{1}{j2\pi}\oint \frac{\prod_{\nu} z^{\nu\lambda_\nu}}{z^{h+1}}dz=\delta\left(\sum_{\nu}\nu\lambda_\nu-h\right)$$

に注意し，積分及び総和の順序交換が可能であるとすると

$$V_h=\sum_{\lambda_\nu}^{h}\left(\prod_{\nu\neq 0}\frac{Q_\nu^{\lambda_\nu}}{\lambda_\nu}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(ju)^{\sum_\nu\lambda_\nu}F(ju)e^{juQ_0}du$$

より（A1）式を用いて（4）式を得る。但し

$$v^{(k)}(Q_0)=k!\,S_k$$

## 付録 B　電圧励振形に関する基本式

非線形容量の電圧依存性を

$$C=C(v)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(v-V_0)^k \qquad (B1)$$

と表わすと，電圧 $v$ と電荷 $q$ との関係は上の式を積分することによって

$$q=\int_0^v C(v)dv=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{k+1}(v-V_0)^{k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{k-1}}{k}(v-V_0)^k \qquad (B2)$$

となる。これは（1）式に於いて $v$ と $q$，$S_k$ と $C_{k-1}/k$ を交換した形になっているので，これらの役割を交換して交流分の間の関係を求めると

$$Q_h=\sum_{\lambda_\nu}^{h}(k-1)!\,C_{k-1}\prod_{\nu\neq 0}\frac{1}{\lambda_\nu!}V_\nu^{\lambda_\nu} \qquad (B3)$$

を得る。（B3）式の主要項（$k=1,3,n$）をとって（2）式を用いるとアドミタンス行列

$$Y_c=\begin{bmatrix} j\omega(C_0+C_2|V_1|^2) & j\omega C_{n-1}V_1^{*n-1} \\ j\omega C_{n-1}V_1^{n-1} & jn\omega(C_0+2C_2|V_1|^2)\end{bmatrix} \qquad (B4)$$

が得られる。無損失条件 $Y_C + Y_C^+ = 0$ が満されている。

## 付録 C　バラクタ・ダイオードのエラスタンス係数

(43)式を電圧 $v$ について積分すると電荷 $q$ との関係式が得られる：

$$q = \int_0^v C\,dv = -\frac{C_{j0} V_\phi}{1-m}\left\{\left(1-\frac{v}{V_\phi}\right)^{1-m} - 1\right\} + C_m v \qquad (C1)$$

これを $v$ について解けば，(1) 式の関係が容易に得られる筈であるが，一般的には解けない。しかし逐次計算によって $v$ を $q$ について展開する事ができて，その係数 $S_k$ は次のようになる：

$$S_1 = \left.\frac{dv}{dq}\right|_{v=V_0} = \frac{1}{C_{j0}(1-V_0/V_\phi)^{-m} + C_m} \qquad (C2)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v}{dq^2}\right|_{v=V_0} = -\frac{m C_{j0}}{2V_\phi}\cdot\frac{(1-V_0/V_\phi)^{-m-1}}{\{C_{j0}(1-V_0/V_\phi)^{-m} + C_m\}^3} \qquad (C3)$$

$$S_3 = \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v}{dq^3}\right|_{v=V_0} = -\frac{m C_{j0}}{6V_\phi^2}\left(1-\frac{V_0}{V_\phi}\right)^{-m-2} \times \frac{(m+1)\{C_{j0}(1-V_0/V_\phi)^{-m} + C_m\} - 3m C_{j0}(1-V_0/V_\phi)^{-m}}{\{C_{j0}(1-V_0/V_\phi)^{-m} + C_m\}^5} \qquad (C4)$$

ここに $V_0$ はバイアス電荷 $Q_0$ と

$$Q_0 = -\frac{C_{j0} V_\phi}{1-m}\left\{\left(1-\frac{V_0}{V_\phi}\right)^{1-m} - 1\right\} + C_m V_0 \qquad (C5)$$

なる関係がある。

輻射科学研究会資料

# グレイティング・ローブを組合わせた周波数走査アンテナ

西村貞彦・松村正典・牧本利夫
（大阪大学　基礎工学部）

1968年7月26日

# グレイティング・ローブを組合わせた周波数走査アンテナ

西村貞彦・松村正典†・牧本利夫
（大阪大学・基礎工学部）

## §1. まえがき

電子走査アンテナ列として周波数走査アンテナ列を用いたレーダー方式において,[1] 角度分解能を高めようとすると，非常に多くの数の放射器および回路素子（方向性結合器等）が必要となる。アンテナ列の全長は等しく角度分解能は同じで，放射器および回路素子の数をなるだけ少くしたい。このような場合には，多数個のグレイティング・ローブが生じて，角度決定に不確定さが残る。この不確定さを避けるために，送受信に別々のアンテナ列を用いたVernier Product Array[2][3]がある。

我々は，放射器間隔が広くてわずかに異なる2個の周波数走査アンテナ列を用いて，そのグレイティング・ローブの方向を適当に組合わせることにより角度決定を行なう方式を提案し，基礎的な実験を行ない，その検討した結果を報告する。

---

†現在 東京芝浦電気株式会社勤務

## §2. グレイティング・ローブを組合わせた周波数走査アンテナ

放射器数が $N_1$ 個の周波数走査アレテナにおいて，放射器間隔を波長に比べて広くしておくと，一定周波数 $f_0$ に対して，図1(a)の実線のように，鋭いグレイティング・ローブを数多く含む指向特性となる。周波数を $f_1$, $f_2$, ----- と順次変えていくと，指向特性の角度が順次推移していく。したがって，周波数より放射(受信)角度を決定しようとすると，同じ周波数に対して数個のグレイティング・ローブがあり，角度決定に不確定さが残る。

放射器数が $N_2$ ($=N_1-1$) 個の周波数走査アレテナを別に作り，放射器間隔を前よりもわずかに広くして，図1(b)のように図1(a)に対して $f_0$ (一般に $f_1$, $f_2$, -----) のグレイティング・ローブの間隔が少し狭く，図1(a)の $f_0$ ----- $f_4$ のビーム間隔と図1(b)の同じ周波数のグレイティング・ローブの間隔が一致するようにする。

特定の放射(受信)角度 $\theta$ に放射する図1(a)の周波数 $f_a$ と図1(b)で放射する周波数 $f_b$ との組合わせは，角度 $\theta$ に対して，周期Ⓗ内では，1対1の対応をしている。したがって，$\theta$ を決定するには，$f_a$ と $f_b$ の組合わせを決定すればよい。ここで周期Ⓗは同じ周波数の組合わせ ($f_a$ と $f_b$) で異る方向 $\theta_1$ および $\theta_2$ に放射する角度の間隔であり，これが走査範囲に相当している。図から

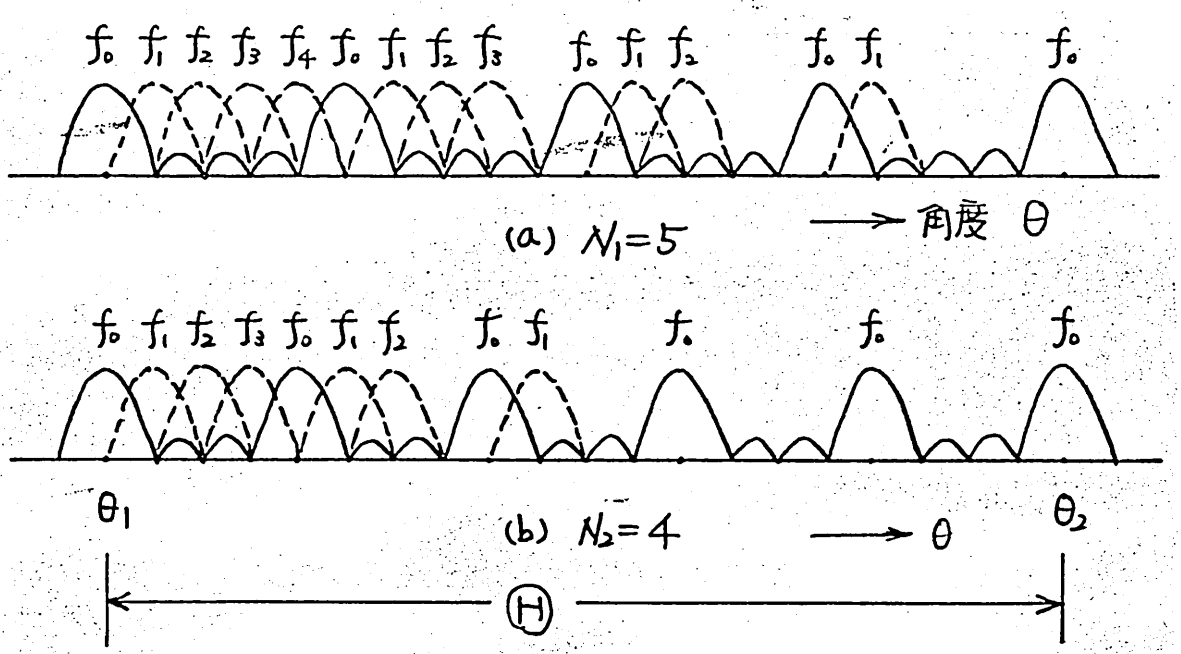



図 1.

明らかなようにⒽの範囲内で放射のビーム数は $N_1 \times N_2$ 個となり，放射器数が $N_1 \times N_2$ 個の単一ビームの周波数走査アンテナと同等の角度分解能になる．

このように2個の周波数走査アンテナを用いてグレイティングローブを組合せることにより，放射器および回路素子をかなり減少させて，単一ビームを走査する1個の周波数走査アンテナを用いたと同等の角度分解能を得ることができる．

## 2-1 周波数走査アンテナについて

図2に示すように，等間隔 $d$ で並ぶ $N$ 個の一次元放射器列を考える．各放射器は無指向性とし，ヘリックス形

の給電線によって等振幅に給電されているものとする。各放射器間の給電線路長は，同じ長さ $d_F$ とする。放射方向 $\theta$ は，アンテナ列の法線から図示の向きに測るものとする。

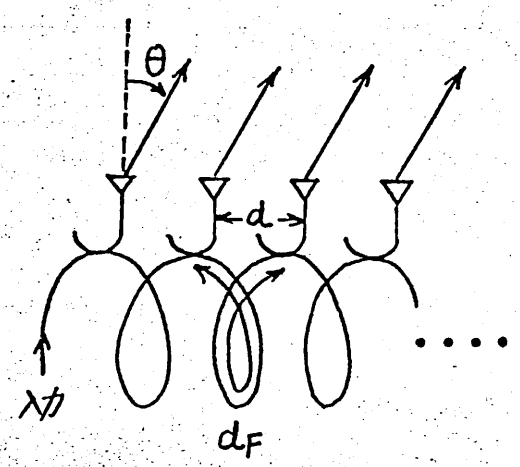



図2. 周波数走査アンテナ

このアンテナ列における合成の放射特性 $E$ は，規格化して，

$$E = \frac{\sin(N\psi/2)}{N\sin(\psi/2)} \qquad (1)$$

で示される。$\psi$ は相隣る放射器を通る $\theta$ 方向における位相差で，次のように表わせる。

$$\psi = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta - \frac{2\pi d_F}{\lambda_g} \qquad (2)$$

ただし，$\lambda$ は自由空間波長，$\lambda_g$ は給電線の線路波長である。式(1)において，

$$\psi = \psi_k \equiv -2\pi k \qquad k: \text{整数} \qquad (3)$$

のときに最大値 $E=1$ となり，$k$ 次のグレイティング・ローブ（主ビーム）となる。また，

$$\psi = \psi_{k,p} \equiv -2\pi\left(k - \frac{p}{N}\right), \quad p = 1, 2, \cdots, N-1. \qquad (4)$$

のときに $E=0$ となる。$p=0$ または $N$ のときには $\psi_{k,p}=\psi_k$ となり，$E$ は最大値（グレイティング・ローブ）となる。一般に $\psi$ は $k,p$ の値によって定まる。したがって，周波数が与えられた場合，式(3),(4)を満足する方向は $k,p$ で決められるので，一般に $\theta_{k,p}$ と書くことにする。

周波数が $f_0$ のときの $k$ 次グレイティング・ローブとなる方向を $\theta_{k,0}$ とすると，式(2),(3)より $\theta_{k,0}$ は

$$\sin\theta_{k,0}=\frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_{g0}}-k\frac{\lambda_0}{d} \qquad (5)$$

で与えられる。また，周波数 $f_0$ のときに放射ビームが零となる方向 $\theta_{k,p}$ は，式(2),(4)より

$$\sin\theta_{k,p}=\frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_{g0}}-\left(k-\frac{p}{N}\right)\frac{\lambda_0}{d} \qquad (6)$$

で与えられる。

いま，$k$ 次グレイティング・ローブの方向が，式(6)で与えられる方向 $\theta_{k,p}$ と一致するように周波数 $f_p$ を選ぶことにする。したがって，式(5)より

$$\sin\theta_{k,p}=\frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_p}{\lambda_{gp}}-k\frac{\lambda_p}{d} \qquad (7)$$

であるから，式(6)＝式(7)より，$f_p$ は

$$d_F\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_{gp}}-\frac{\lambda_0}{\lambda_{g0}}\right)-k(\lambda_p-\lambda_0)=\frac{p}{N}\lambda_0 \qquad (8)$$

から決定される。

図1に示すように，走査範囲Ⓗ，すなわち，$\theta_1$および$\theta_2$は与えられ，$k=k_0$次のブリルアン・ローブの方向$\theta_{k_0,0}$を$\theta_1$に選ぶものとする。したがって，式(5)は

$$\sin\theta_{k_0,0} = \sin\theta_1 = \frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_{g_0}} - k_0\frac{\lambda_0}{d} \qquad (9)$$

となり，この関係を式(8)に代入すると，

$$\frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_p}{\lambda_{gp}} - k_0\frac{\lambda_p}{d} - \sin\theta_1 = \frac{p\lambda_0}{Nd} \qquad (10)$$

となる。いま，給電線に方形導波管を用いると，$\lambda_c$を遮断波長として $\lambda_{gp} = \lambda_p/\sqrt{1-(\lambda_p/\lambda_c)^2}$ の関係があるゆえ，式(10)は

$$\frac{d_F}{d}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_c}\right)^2} - k_0\frac{\lambda_p}{d} - \sin\theta_1 = \frac{p\lambda_0}{Nd}$$

となる。これを$\lambda_p$について解くと

$$\lambda_p = \frac{-\frac{p\lambda_0}{N} - d\sin\theta_1 + d_F\sqrt{1+\left(\frac{1}{k_0\lambda_c}\right)^2\left[d_F^2-\left(\frac{p\lambda_0}{N}-d\sin\theta_1\right)^2\right]}}{k_0\left[1+\left(\frac{d_F}{k_0\lambda_c}\right)^2\right]} \qquad (11)$$

となり，$\lambda_p$が決定される。($p=1,2,\cdots\cdots,N-1$.)

## 2-2 2個のアンテナ列によるグレイティング・ローブの組合わせ方

図2において，放射器数が $N-1$ 個の場合について考える。このアンテナ列における合成の放射特性 $E'$ は，規格化して

$$E' = \frac{\sin(N-1\,\psi/2)}{N-1\,\sin(\psi/2)} \qquad (12)$$

で示される。ただし，$\psi'$ は次のように表わされる。

$$\psi' = \frac{2\pi d'}{\lambda'}\sin\theta' - \frac{2\pi d_F'}{\lambda_{g'}} \qquad (13)$$

いま，放射器数が $N$ 個および $N-1$ 個のアンテナ列を，それぞれ，便宜上，Aアンテナおよび Bアンテナと称することにする。また，Bアンテナについては各記号に「ダッシュ」を付って表わすことにする。Aアンテナの次数，周波数番号は前と同様に $k$, $p$ で，Bアンテナについては $m$, $q$ とする。ただし，$m$ は整数，$q = 1, 2, \cdots, N-2$.

Aアンテナの $k_0$ 次グレイティング・ローブと Bアンテナの $m_0$ 次グレイティング・ローブとが，同じ周波数（これを基準周波数）$f_0 = f_0'$ のときに，同じ方向を向いている。すなわち $\theta_{k_0,0} = \theta'_{m_0,0}$ であるように決めるものとする。式(5)より

$$\sin\theta_{k_0,0} = \frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_{g_0}} - k_0\frac{\lambda_0}{d}, \quad \sin\theta'_{m_0,0} = \frac{d_F'}{d'}\cdot\frac{\lambda_0'}{\lambda_{g_0}'} - m_0\frac{\lambda_0'}{d'} \qquad (14)$$

であって，$\theta_{k_0,0} = \theta'_{m_0,0}$，$\lambda_0 = \lambda'_0$ および $\lambda_{g_0} = \lambda_{g_0}'$ とおくと

$$\frac{1}{\lambda_{g_0}}\left(\frac{d_F}{d} - \frac{d_F'}{d'}\right) - \left(\frac{k_0}{d} - \frac{m_0}{d'}\right) = 0 \qquad (15)$$

が成立つことが必要である。したがって，特別な場合として各項を零とおいた

$$\frac{d_F}{d} = \frac{d_F'}{d'}, \quad \frac{k_0}{d} = \frac{m_0}{d'} \qquad (16)$$

が条件づけられる。

つぎに，基準周波数 $f_0 = f_0'$ において，Aアレテナの $k_0$ 次の $p$ 番目の零とBアレテナの $m_0$ 次の $q$ 番目の零の角度 $\theta_{k_0,p}$，$\theta'_{m_0,q}$ は式(6)より

$$\begin{aligned} \sin\theta_{k_0,p} &= \frac{d_F}{d}\frac{\lambda_0}{\lambda_{g_0}} - \left(k_0 - \frac{p}{N}\right)\frac{\lambda_0}{d}, \\ \sin\theta'_{m_0,q} &= \frac{d_F'}{d'}\frac{\lambda_0'}{\lambda_{g_0}'} - \left(m - \frac{q}{N-1}\right)\frac{\lambda_0'}{d'} \end{aligned} \qquad (17)$$

となる。これらの角度が $p = q$ の時一致する（$\theta_{k_0,p} = \theta'_{m_0,q}$）条件をもとめると，式(16)，(17)より

$$Nd = (N-1)d' \qquad (18)$$

となる。また，式(16)の関係を用いると

$$Nd_F = (N-1)d_F', \quad Nk_0 = (N-1)m_0 \qquad (19)$$

と条件づけられる。ここで K を次のように定義しておく。

$$K=\frac{k_0}{N-1}=\frac{m_0}{N},\quad (K=1,2,\cdots\cdots) \tag{20}$$

以上の条件式(16)、(18)および(19)を満足しておれば、A アンテナの $k_0$ 次の $p$ 番目の周波数と、B アンテナの $m_0$ 次の $p$ 番目の周波数とは一致していて、$k_0$ 次および $m_0$ 次グレイティングローブは同じ方向 $\theta_{k_0,p}=\theta'_{m_0,p}$ を示す。

つぎに一般の場合、すなわち、A および B アンテナのグレイティングローブの方向 $\theta_{k,p}=\theta'_{m,q}$ が成立っているとき、$k$、$p$、$m$ および $q$ 間の関係（組合わせ方）を求める。式(7)より

$$\begin{aligned}\sin\theta_{k,p}&=\frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_p}{\lambda_{gp}}-k\frac{\lambda_p}{d}\\ \sin\theta'_{m,q}&=\frac{d'_F}{d'}\cdot\frac{\lambda'_q}{\lambda'_{gq}}-m\frac{\lambda'_q}{d'}\end{aligned} \tag{21}$$

であるから、$\theta_{k,p}=\theta'_{m,q}$、式(8)および式(16)の関係を用いると

$$\frac{1}{d}\left(k-\frac{p}{N}\right)=\frac{1}{d'}\left(m-\frac{q}{N-1}\right) \tag{22}$$

となる。さらに式(18)を用いると

$$Nk-p=(N-1)m-q \tag{23}$$

となる。いま基準周波数 $f_0$ においてグレイティングローブが

一致しているAおよびBアレテナの次数 $k_0, m_0$ を基準として

$$k = k_0 - k_0' \quad , \quad m = m_0 - m_0' \tag{24}$$

$$k_0', m_0' = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

とおくと，$k_0, m_0$ に対して式(19)を用いると，式(23)は

$$Nk_0' + p = (N-1)m_0' + q \tag{25}$$

となる。$Nk_0' + p$ はAアレテナの放射特性のグレイティング・ローブおよび零の方向を $k_0' = 0$, $p = 0$ から $0, 1, 2, \cdots$ と番号付けしたものであり，その方向がグレイティング・ローブとなる周波数は $p$ 番目周波数であるから，式(25)は周波数を変えたときにおけるすべてのグレイティング・ローブの番号付けの値を示し，その方向の周波数がAアレテナでは $p$，Bアレテナでは $q$ 番目となることを示している。式(25)を

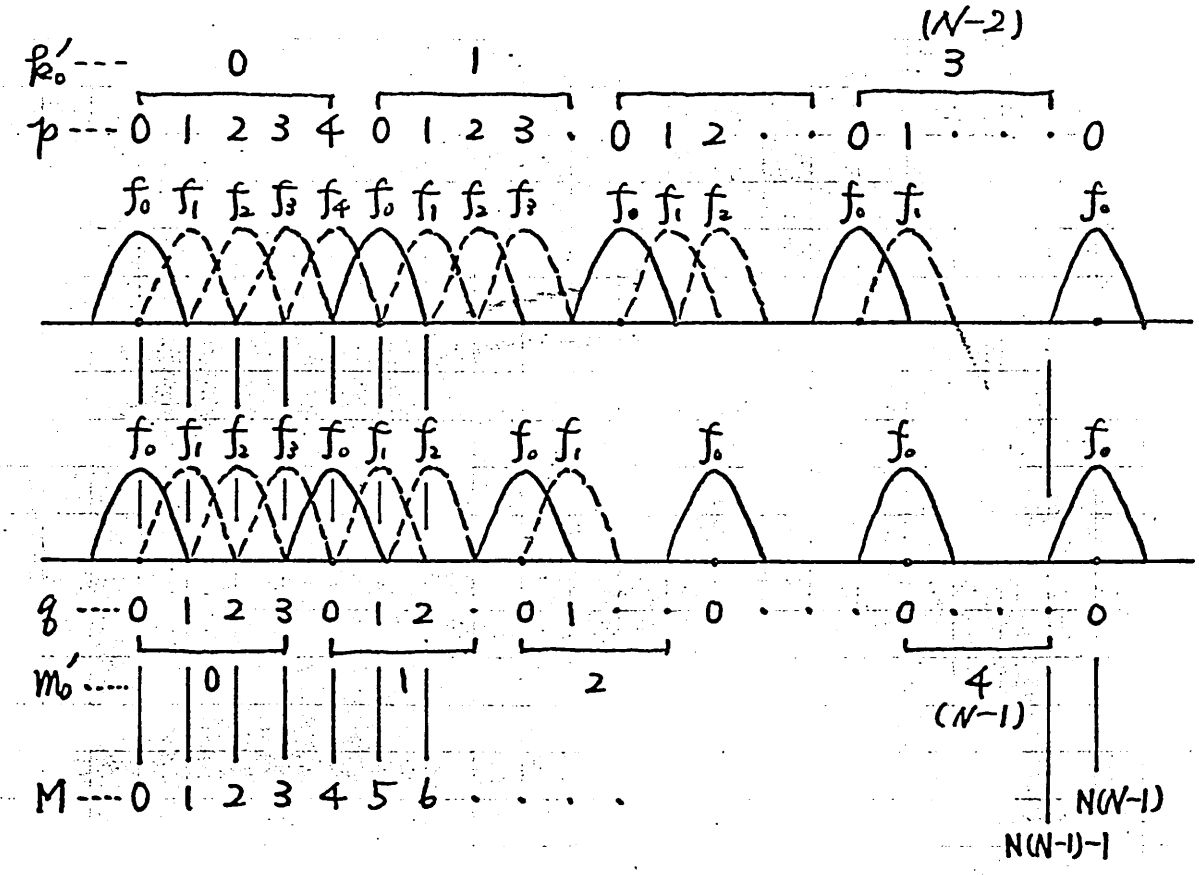
$$M = Nk_0' + p = (N-1)m_0' + q \tag{26}$$

とおいて，$M$ と $p, q$ の関係を見れば，図3に示すように放射方向 $\theta_{k,p}$ とその方向がグレイティング・ローブとなる周波数の組合わせ $(p, q)$ との関係が求められる。

基準周波数 $f_0$ において，グレイティング・ローブが $\theta_1$ と異なる方向 $\theta_2$ で一致しているAおよびBアレテナの次数 $k$ および $m$ は，式(26)において，$M = N(N-1)$, $p = q = 0$ であるから，式(24)を用いると，

$$k = k_0 - (N-1), \quad m = m_0 - N \qquad (27)$$

で示される。




| q \ p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 16 | 12 | 8 | 4 |
| 1 | 5 | 1 | 17 | 13 | 9 |
| 2 | 10 | 6 | 2 | 18 | 14 |
| 3 | 15 | 11 | 7 | 3 | 19 |

Mの値とp, qの関係

図3. AおよびBアレイのグレイティング・ローブの組合わせ (N=5)

## 2-3 設計方針

グレイティング・ローブを組合わせた周波数走査アレテナを設計する方針をここでまとめて示す。

最初から与えられているもの

- 走査範囲 Ⓗ $= \theta_2 - \theta_1$
- ビーム幅 $\Delta\theta = Ⓗ/(N-1)N$
- 基準周波数 $f_0$
- 定数 $K^*$

基準周波数 $f_0$ において，$\theta = \theta_1$ および $\theta_2$ の方向でAおよびBアンテナのグレイティング・ローブが一致している場合について考える。

i) 式(20)より $k_0 = K(N-1)$, $m_0 = KN$ (28)
によって定数 $k_0$, $m_0$ が求まる。

ii) 式(19)および(27)より

$$\sin\theta_2 = \frac{d}{\lambda_{g0}} \cdot \frac{\lambda_0}{d} - (k_0 - N + 1)\frac{\lambda_0}{d}$$

$$= (N-1)\frac{\lambda_0}{d} + \sin\theta_1$$

$$\therefore d = (N-1)\lambda_0/(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad (29)$$

---

* 定数 $K$ の値には自由度があり，周波数帯域幅 $\Delta F = f_0 - f_0$ に関係して定められる。

によって，放射器間隔 $d$，また式(18)より $d'$ が求まる。

iii) 式(9)より

$$d_F = \lambda_{g_0}\left(\frac{d}{\lambda_0}\sin\theta_1 + k_0\right) \tag{30}$$

によって放射器間給電線路長 $d_F$，また式(16)より $d_F'$ が求まる。

iv) 式(11)より $f_p$ が求められる。

$$f_p = c/\lambda_p, \tag{31}$$

$$\lambda_p = \frac{-\left(\frac{p\lambda_0}{N} + d\sin\theta_1\right) + d_F\sqrt{1+\left(\frac{1}{k_0\lambda_c}\right)^2\left[d_F^2 - \left(\frac{p\lambda_0}{N} + d\sin\theta_1\right)^2\right]}}{k_0\left[1+\left(\frac{d_F}{k_0\lambda_c}\right)^2\right]}$$

ただし，$c$ = 光速，$p = 1, 2, 3, \cdots\cdots, N-1$.

v) 式(7)，(9)および(24)より $\theta_{k,p}$ ($\theta'_{m,q}$) が求められる。

$$\sin\theta_{k,p} = \frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_p}{\lambda_{gp}} - k\frac{\lambda_p}{d}$$

$$= \frac{d_F}{d}\cdot\frac{\lambda_p}{\lambda_{gp}} - (k_0 - k_0')\frac{\lambda_p}{d}$$

$$= \sin\theta_1 + k_0'\frac{\lambda_p}{d}$$

(32)

$$\sin\theta'_{m,q} = \sin\theta_1 + m_0'\frac{\lambda_p}{d'}$$

## 2-4 設計例

次に示す諸元に対する設計例を求める.

- 走査範囲 $\Theta = 90^\circ$ ( $\theta_1 = -45^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$ )
- ビーム幅 $\Delta\theta = 90^\circ/5 \times 4 = 45^\circ$ ($N=5$)
- 基準周波数 $f_0 = 9300\,MHz$
  ($\lambda_0 = 32.23\,mm$, $\lambda g_0 = 45.38\,mm$)
- 定 数 : $K = 5$

i) 定数 $k_0$, $m_0$

式(28)より $k_0 = 20$, $m_0 = 25$

ii) 放射器間隔 $d$, $d'$

式(29)より $d = 91.17\,mm$, $d' = 113.96\,mm$

iii) 放射器間給電線路長 $d_F$, $d_F'$

式(30)より $d_F = 816.75\,mm$, $d_F' = 1020.94\,mm$

iv) 励振周波数 $f_p$

式(31)より

| $p$ | $f_p$ (MHz) |
|---|---|
| 0 | $f_0 = 9300.0$ |
| 1 | $f_1 = 9352.7$ |
| 2 | $f_2 = 9404.9$ |
| 3 | $f_3 = 9460.5$ |
| 4 | $f_4 = 9515.9$ |

v) グレイティング・ローブ方向 $\theta_{k,p}$, $\theta'_{m,q}$

式(32)より

| Aアンテナ | | | $\theta_{k,p}(m,q)$ | Bアンテナ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k'_0$ | $p$ | $f_p$ | | $f_q$ | $q$ | $m'_0$ |
| 0 | 0 | $f_0$ | $-45.00°$ | $f_0$ | 0 | 0 |
| | 1 | $f_1$ | $-39.52$ | $f_1$ | 1 | |
| | 2 | $f_2$ | $-34.45$ | $f_2$ | 2 | |
| | 3 | $f_3$ | $-29.67$ | $f_3$ | 3 | |
| | 4 | $f_4$ | $-25.10$ | $f_0$ | 0 | 1 |
| 1 | 0 | $f_0$ | $-20.71$ | $f_1$ | 1 | |
| | 1 | $f_1$ | $-16.43$ | $f_2$ | 2 | |
| | 2 | $f_2$ | $-12.25$ | $f_3$ | 3 | |
| | 3 | $f_3$ | $-8.13$ | $f_0$ | 0 | 2 |
| | 4 | $f_4$ | $-4.05$ | $f_1$ | 1 | |
| 2 | 0 | $f_0$ | $0.0$ | $f_2$ | 2 | |
| | 1 | $f_1$ | $4.05$ | $f_3$ | 3 | |
| | 2 | $f_2$ | $8.13$ | $f_0$ | 0 | 3 |
| | 3 | $f_3$ | $12.25$ | $f_1$ | 1 | |
| | 4 | $f_4$ | $16.43$ | $f_2$ | 2 | |
| 3 | 0 | $f_0$ | $20.71$ | $f_3$ | 3 | |
| | 1 | $f_1$ | $25.10$ | $f_0$ | 0 | 4 |
| | 2 | $f_2$ | $29.67$ | $f_1$ | 1 | |
| | 3 | $f_3$ | $34.45$ | $f_2$ | 2 | |
| | 4 | $f_4$ | $39.52$ | $f_3$ | 3 | |
| | 0 | $f_0$ | $45.00$ | $f_0$ | 0 | |

## §3. 実験

グレイティング・ローブを組合わせた周波数走査アンテナの動作を確認するために，実験を行なった。実験に用いたAおよびBアンテナは前章の設計例にしたがって構成している。

### 3-1 供試アンテナの構造

図4に供試アンテナの構造を示す．ヘリックス状の方形導波管（WRJ-10）を給電線に用いている。AB両アンテナは図のように2階建に配置している。

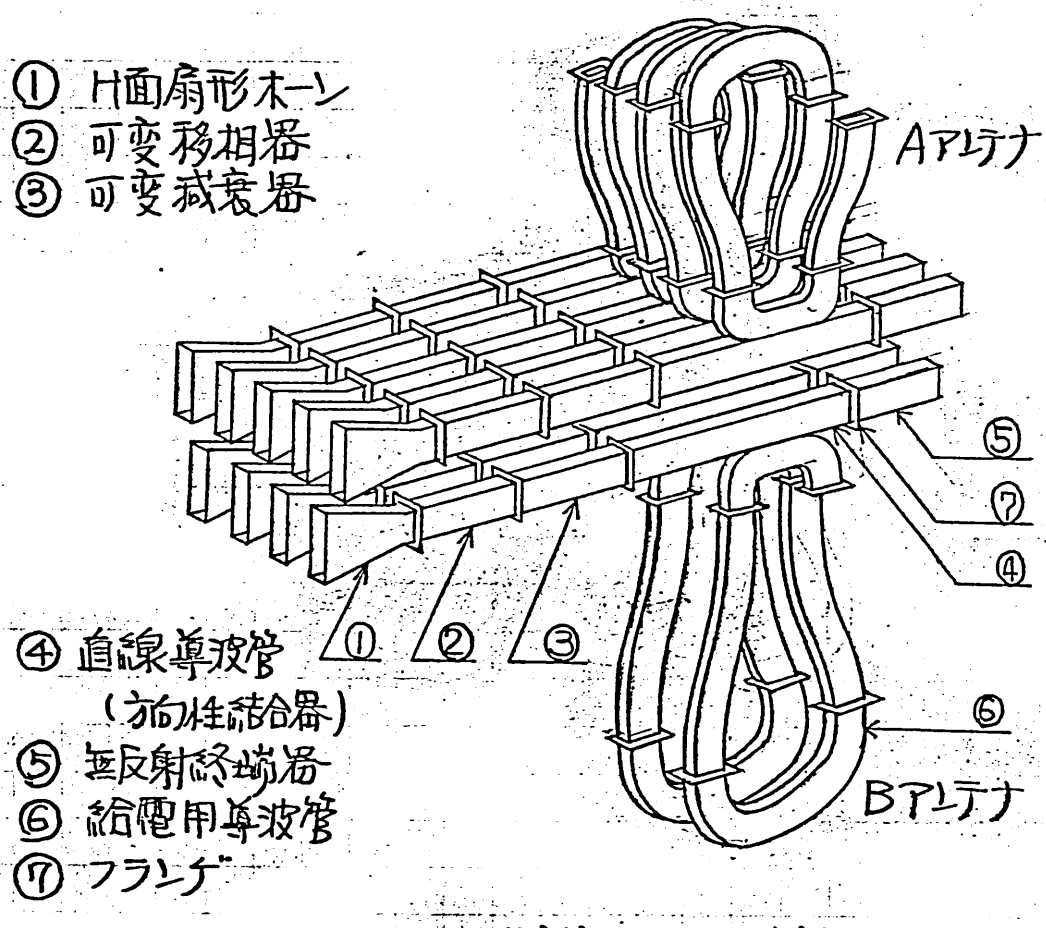



図4. 供試アンテナの構造

## 3－2　放射特性測定装置

図5に放射特性の測定装置を示す。A,B両アンテナの放射特性は，それぞれ切替えて別々に測定している。

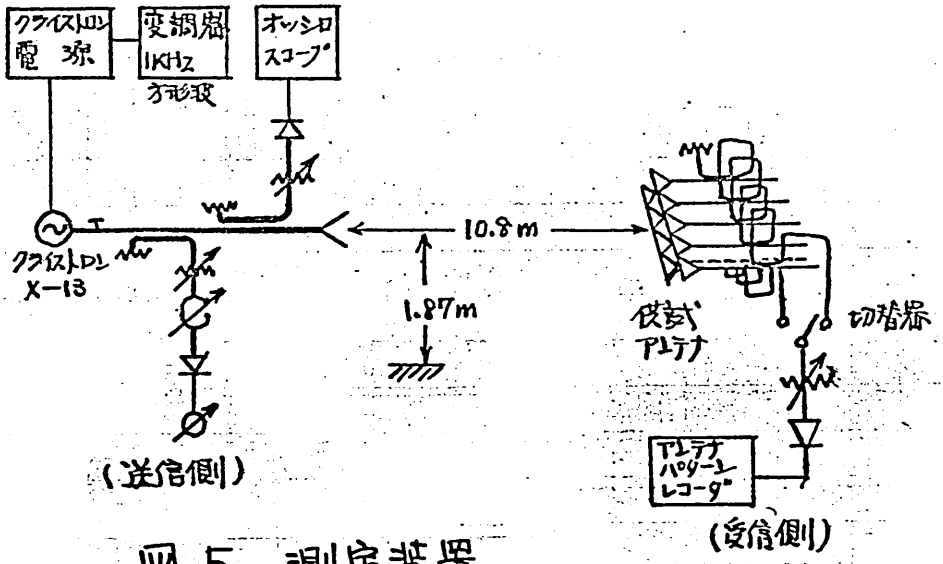



図5. 測定装置

## 3－3　H面扇形ホーン（素子因子）

実験に用いたH面扇形ホーンは，開口が 89.1×10.2 mm で全開口角は 40° である。単独のH面扇形ホーンについての測定結果は，$f=9300$ MHz において，半値幅 H面 約30°，E面 約114° で，周波数 9100～9500 MHz の範囲にわたり，放射特性はだいたい同じものを得ている。

## 3－4　放射特性

5つの周波数（9300, 9353, 9404, 9461, 9516 MHz）について，AB両アンテナの放射特性を測定した。

E面放射特性測定結果の1例を図6～9に示す。図6は $f_0 = 9300\,MHz$，図7は $f_1 = 9353\,MHz$ のときの両アンテナの放射特性を重ねて記録した結果である。図8はAアンテナにおいて $f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ の各周波数の放射特性を重ねて測定したもの，図9はBアンテナにおいて $f_0\ f_1\ f_2\ f_3$ の各周波数の放射特性を重ねて測定したものである。

i) グレイティング・ローブ方向

放射特性の測定結果から，グレイティング・ローブ方向 $\theta_{k,p}$ ($\theta'_{m,q}$) と周波数との関係を図10に示す。この測定結果は，両アンテナ共に計算値と良く一致している。

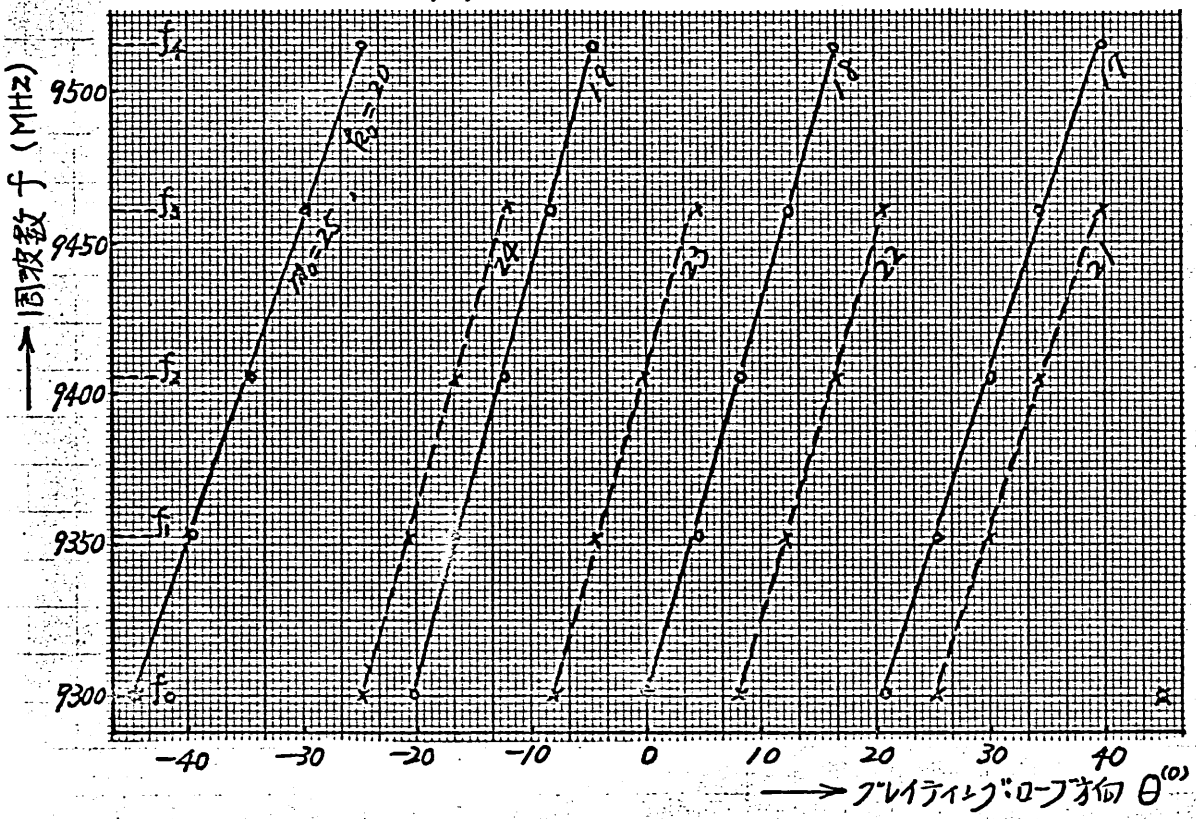



図10. グレイティング・ローブ方向と周波数との関係

—— Aアンテナ, ----- Bアンテナ } 計算値，　○印 Aアンテナ, ×印 Bアンテナ } 測定値

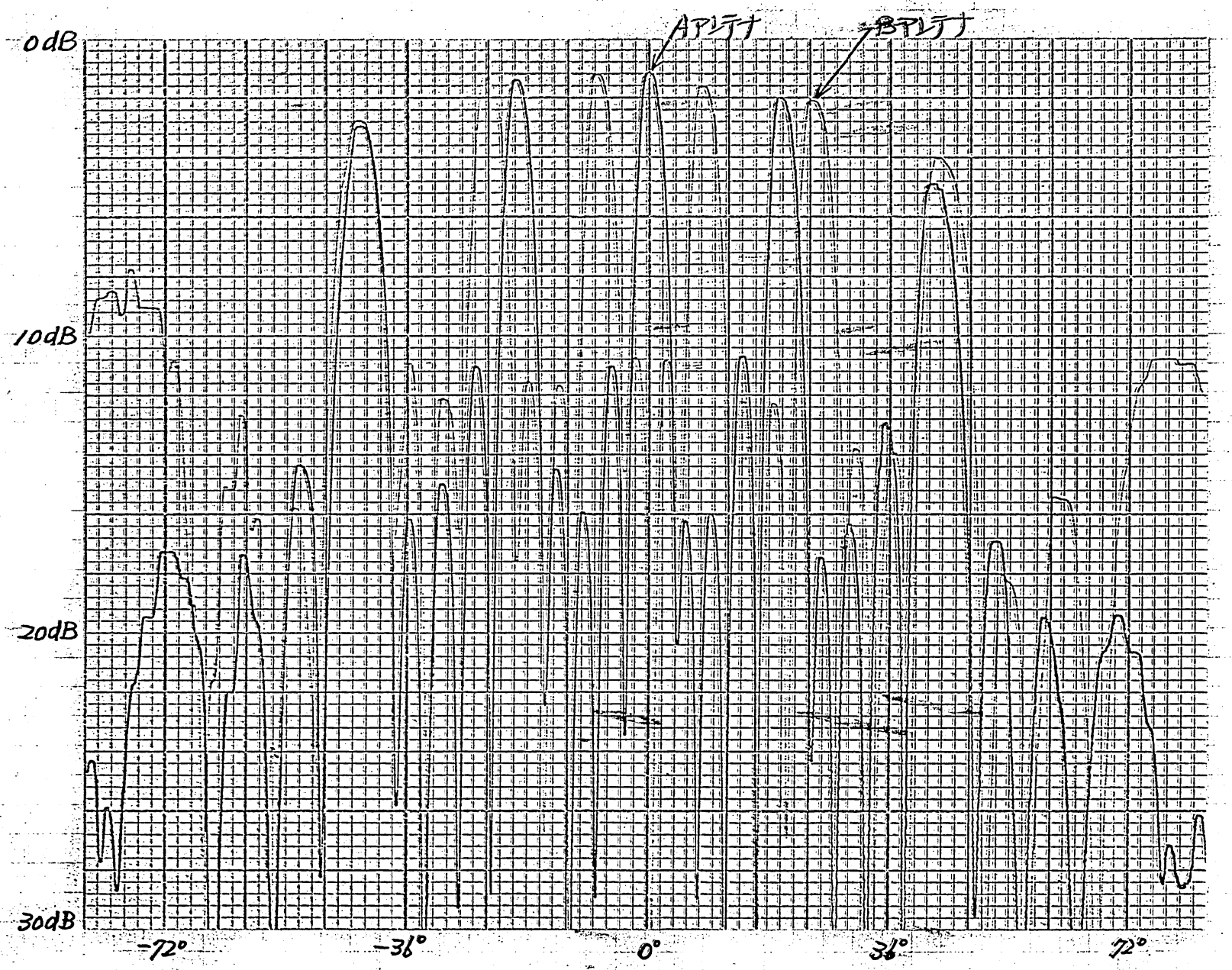



図6.— E面放射特性 ($f_0 = 9300$ MHz)

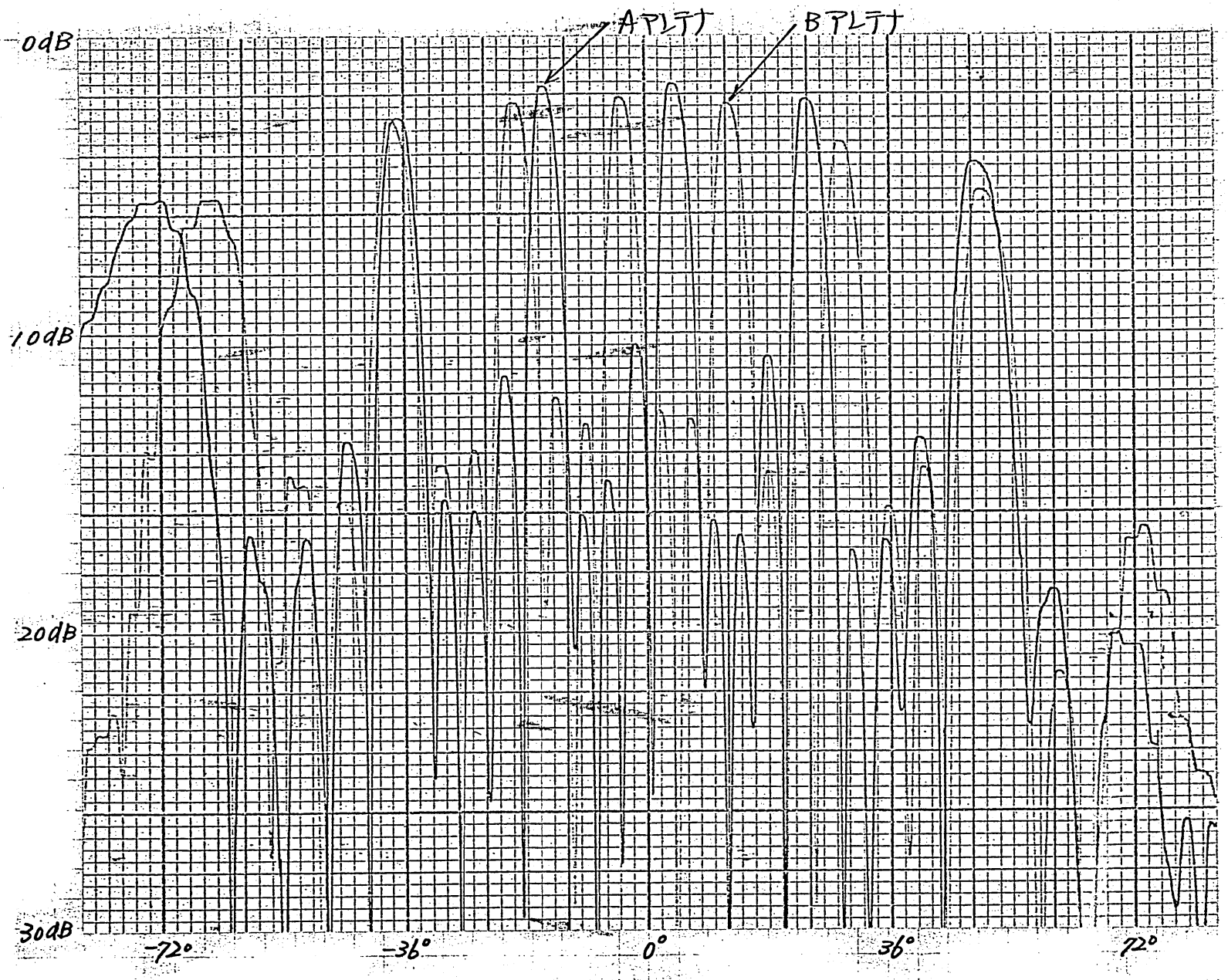



図7. E面放射特性 ($f_1 = 9353$ MHz)

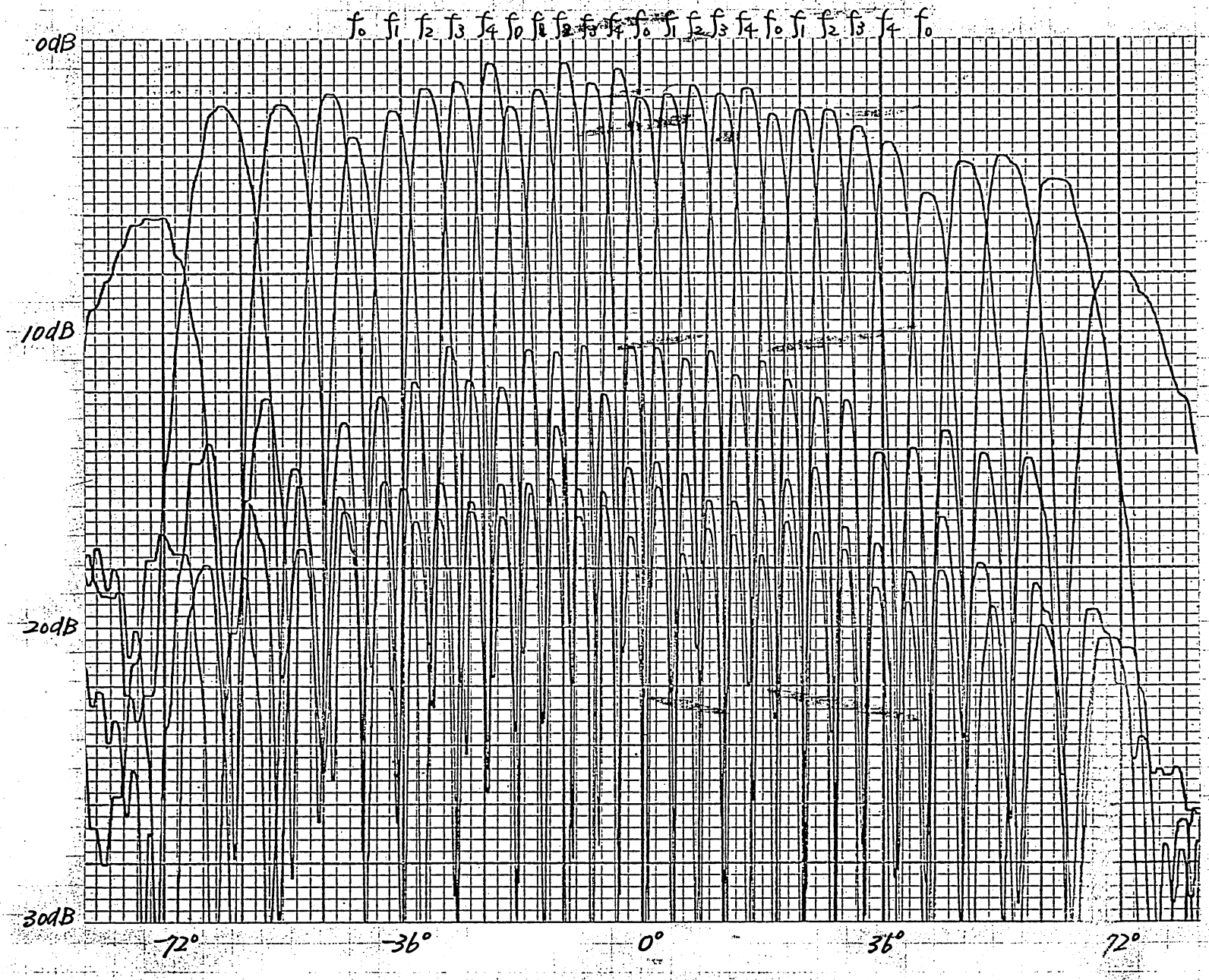



図8. E面放射特性（Aアンテナ）

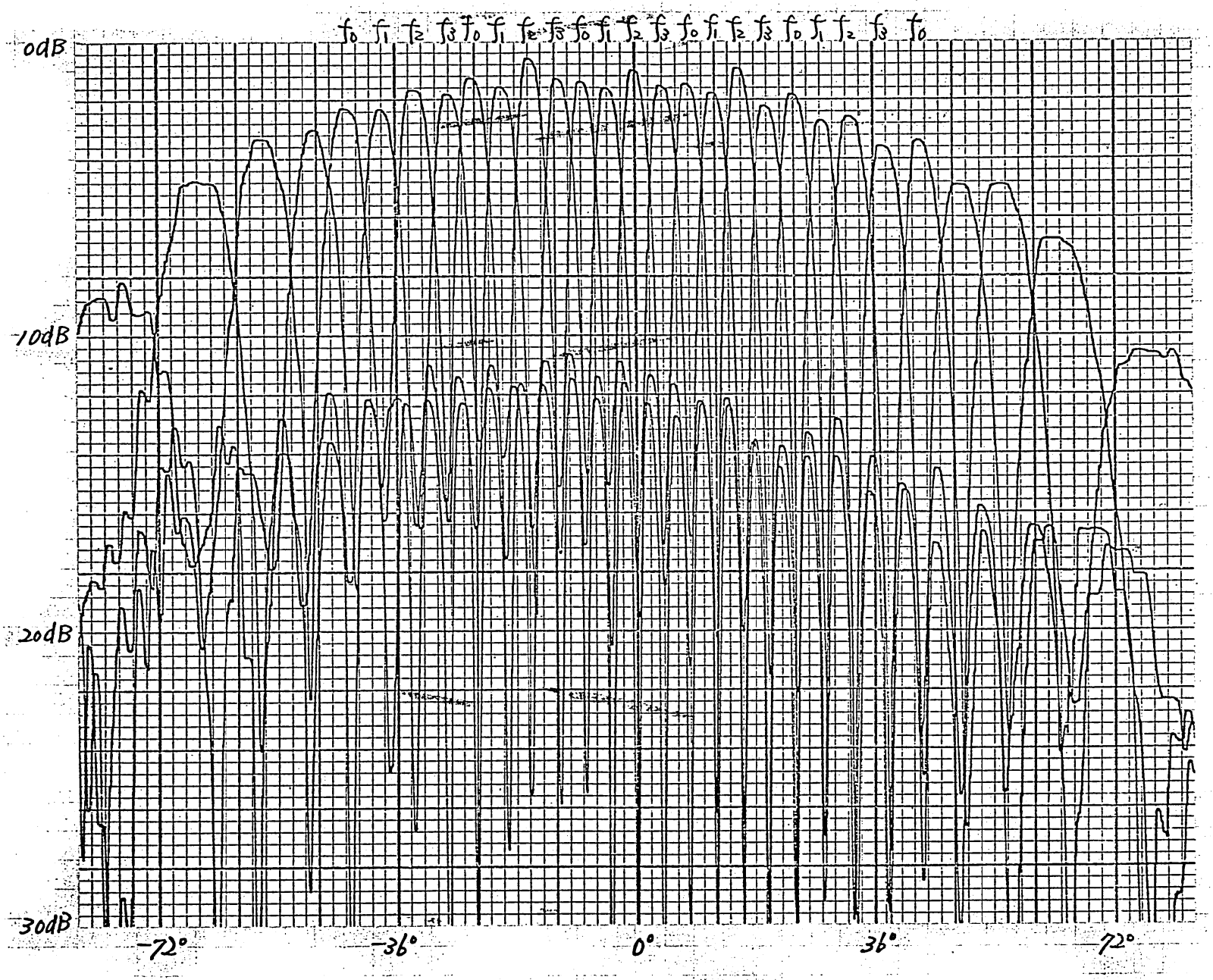



図9. E面放射特性（Bアンテナ）

ii) ビーム幅 および サイドローブ・レベル

ビーム幅は $\theta \fallingdotseq 0°$ 附近では，両アンテナ共に測定値は約4°，計算値は3.5°でほぼ合っている。

サイドローブ・レベルは $\theta \fallingdotseq 0°$ 附近に対には，Aアンテナは測定値 −9.8 dB，計算値 −11.8 dB，Bアンテナは測定値 −10.0 dB，計算値 −11.1 dB でいずれも測定値は計算値よりやや高めになっている。

## §4. 検討

### 4−1 放射特性

i) グレイティング・ローブ方向

グレイティング・ローブ方向は，計算値と全く良く一致している。したがって，両アンテナのグレイティング・ローブの組合わせによる角度決定は正確に行なうことができるものと思われる。

ii) AB両アンテナの配置による影響

a) AB両アンテナを同一周波数で同時に励振した場合，この両アンテナ列の相対的な位置によって放射特性に影響を及ぼす。すなわち，放射特性は両アンテナが合成されたものと同じになり，単独の各アンテナ放射特性とは異なったものとなる。実験に用いた配置が，一番影響の少ない場合であるが，このとき両アンテナのサイドローブ・レベルの影響でグレイティング・ローブは非対称になる。(サイドローブ・レベルを低く

すれば，この影響はなくなる。），また，同一周波数で同一方向に放射する組合せ（図3・M=0,1,2,3）の方向だけは放射特性に大きな乱れが生じ，この部分は走査範囲から除外した方が良い。

b) 上記の障害を避けるために，両アレテナは同一周波数に対して，時間差を与えて励振することが望ましい。

iii) 振幅分布をもたせた場合

サイドローブ・レベルを下げるために，通常アレテナ列に振幅分布をもたせる。この場合，§2，2-1および2-2の各式は成立しなくなるが，一様分布についての条件式で決るd，$d_F$，K，$f_p$をそのまゝ用いることにより，両アレテナ列のグレイティング・ローブの方向を一致させることができる。このとき一般に各グレイティング・ローブのビーム幅が拡くなるために隣接したグレイティング・ローブ間の交叉レベルが浮き上がる。例えば，一様分布の場合−4dB（計算値）であるが，サイドローブ・レベルが−20dBのドルフ・チェビシェフ分布の場合−3dBになる。

## 4−2 レーダーヒレての構成例

図11にレーダーヒレての構成例を示す。

図11(a)は両アレテナを同一周波数で同時に励振したときを示す。このときは，実効的な走査範囲は$1/(N-1)$だけ減少することを考慮に入れて設計しなければならない。

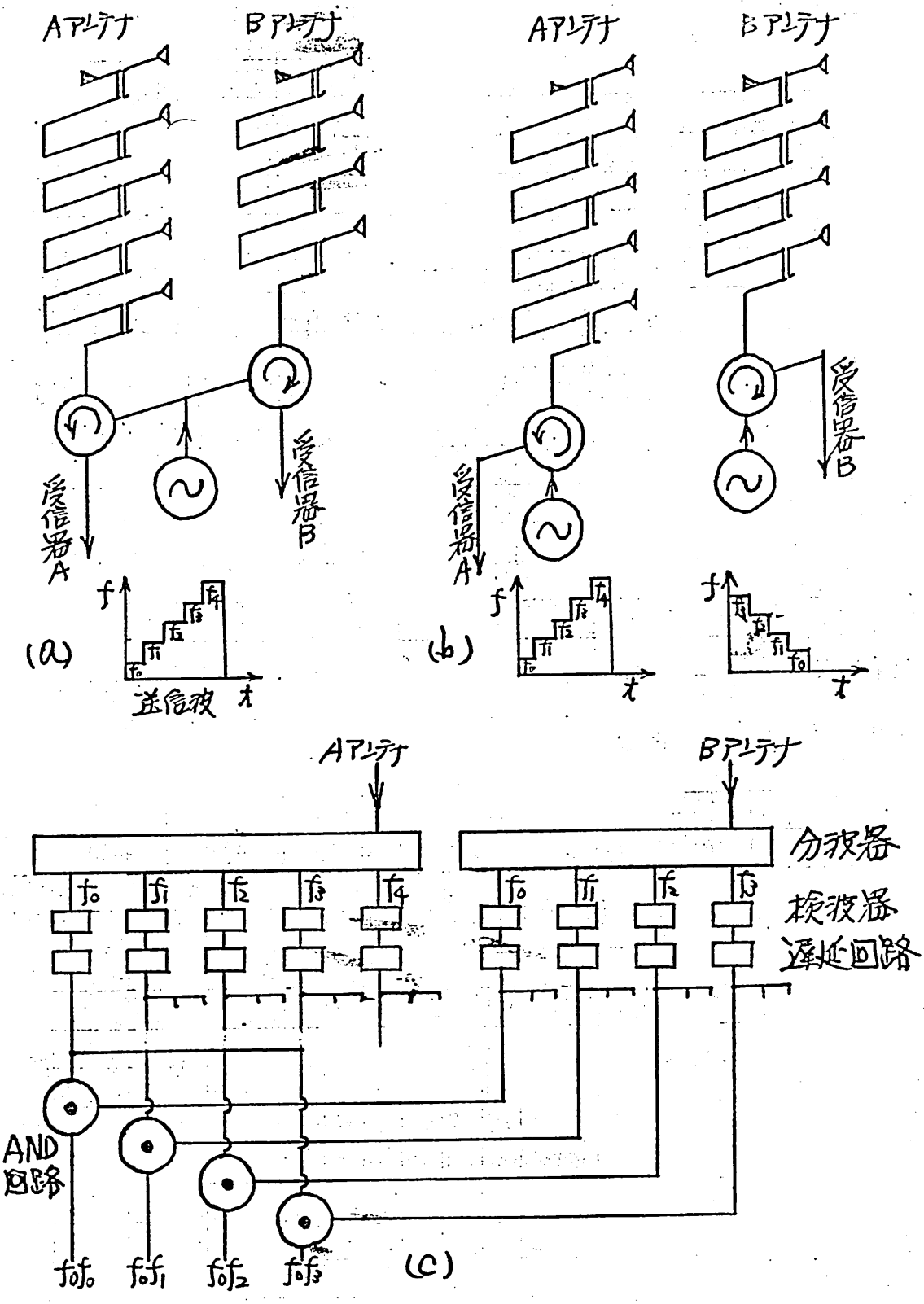



図 11. レーダーヒトの構成例

図11(b)は両アンテナを別々の発振器で，同一周波数を時間的に違えて励振したときを示す。この場合は両アンテナの配置には，かなりの任意性がある。

図11(c)は受信回路を示す。発振(送信周波数を図のように時間的に変化させているので，目標物からの反射波はAND回路に同一時刻に，AB両アンテナからの信号が入るように遅延回路を設けている。なお，AND回路は同一時刻に2つの信号が入ったときのみ動作する回路とする。

上に示した構成例の場合，同じ時刻に2つ以上の目標物からの反射波を受信すると(同じ距離，角度は異なる)，角度が全く違った所にも受信波を受けたような誤りを生ずる欠点がある。

## 4-3 グレイティング・ローブを組合わせた周波数走査アンテナと単一ビーム周波数走査アンテナとの比較

両者共に等振幅給電の場合において，その諸特性を比較検討してみる。ここでは，単一ビームの場合 S.B.，グレイティング・ローブの場合 G.L. なる添字を付けることにする。なお，グレイティング・ローブの場合は，同一周波数を時間的に違えて励振する方法を考えている。

比較条件として，走査範囲，ビーム幅，周波数帯域が同じ場合

とする。

a) 全放射器数 $N_{GL}$ と $N_{S.B}$ との比較

$$N_{GL} = N + (N-1) = 2N-1$$

$$N_{S.B} = N(N-1)$$

b) 全給電線路長 $L_{GL}$ と $L_{SB}$ との比較

$$L_{GL} = d_F(N-1) + d_F'(N-2) = d_F \frac{2N^2-4N+1}{N-1}$$

$$L_{SB} = d_{FSB}[N(N-1)-1] = d_F(N^2-N-1)$$

c) 利得の比較

放射器間隔を半波長の整数倍と仮定したときには，利得は放射器数に比例する．したがって，

$$G_{GL} = N \text{ および } N-1$$

$$G_{SB} = N(N-1)$$

以上の結果から，グレイティング・ローブを組合わせた周波数走査アレテナは単一ビーム周波数走査アレテナに比べて，放射器数および給電線路長は少くなっていることがわかる．しかしながら，利得はかなり減少している。

## §5. むすび

グレイティング・ローブを組合わせた周波数走査アレテナを提案し，その動作原理を示し，実験により動作を確認

た。このグレイティング・ローブの組合せによる角度決定は正確である。この方式の利点としては，

- 放射器および回路素子の数が少なくてすむ
- 給電線路長が短かくてすむ
- 重量軽減，コスト低下 等が期待できる。

一方，この方式の欠点としては

- 利得の低下
- 同じ時刻に2つ以上の目標物からの反射波を受信すると（同じ距離，角度が異なる），角度が全然違った所にも受信波を受けたような誤りを生ずる
- 走査範囲外の目標物の反射も範囲内として受信される。

最後に，実験に関して御便宜を与えられた東京芝浦電気株式会社に感謝する。

文献

(1) 牧本，末田，西村 吉田 "ベリックス型給電開放走査アンテナ" 信学アンテナ研資（昭40－12）

(2) W.A. BIRGE "Application of Grating Lobe Techniques to the Thinning of Large Phased Arrays" Microwave Journal, Vol.8, No.12, December 1965

(3) W.O. Copeland, C.W. Schisler, and A.A. Segel "The Implementation of Grating Lobe Techniques in Phased Array Design" 1965 IEEE International Convention Record Vol.13, Pt.5, P.P. 110－120

輻射研究会資料

# 電磁界境界値問題における固有値及び固有モードのマトリックス解法とその誤差評価

橋本正弘　藤沢和男
（大阪大学　基礎工学部）

1968年9月

まえがき　最近，高速度電子計算機の発達にともない，各分野で，従来，数学上困難なことから解かれなかった種々の問題を数値的に求めようとする傾向がある。電磁界境界値問題の解法には多くの人々が数学を駆使して奇麗に整理されているが，従来の古典数学では解き求めることができない数多くの問題が残されている。たとえば電磁界の満足するHELMHOLTZの偏微分方程式を解く有力な手段としては変数分離法があるが，この方法では全くの任意の境界に対して分離係数を求めることができない。したがって，電磁界の諸問題を変数分離により求められるのは13の座標系に限られて，それ以外は解くことができなかった。

一方，われわれが実際に求めるべき解は必ず，指定された境界条件を包含しているから，方程式の解を求めてから，それを代入する偏微分方程式の解法よりさらに積極的な，既に，方程式自体に境界条件を含む積分方程式の解法の方が有利である。しかし，実際に必要とする2，3次元空間におけるその解は，FREDHOLMによって解の型は示されているが，具体的にそれを求めようとするときほとんど不可能になる場合が多く，工学の分野では，あまり実用的ではなかった。しかし数学の分野ではFREDHOLM, HIRBERT, SCHMIDT等により研究が進められ，さらに，電磁界境界値問題に必要な特異核をもつ積分方程式に対して T. CARLEMANN, HIRBIRT, POINCARÉ MUSKHELISHVILI, MIKHLIN等により解の存在性，収束性などについて詳しく研究されている。しかし，彼等は，さらに具体的な解の求め方について，何ら示していないから，実際に解を求めようとする場合，FREDHOLM

が解を求めた最初の方法にもどらねばならない。即ち，逐次近似法による解法，あるいは連立方程式（代数方程式）による解法である。前者は，ちょうど線状アンテナの電流分布をもとめたHALLENの方法と同一の考えで，これはくり返し積分の困難があるが，W.HARRISON等はこれを数値計算してもとめる方法を示している[12]。しかし多次元座標系については数値計算が極度に困難となり，一般的であるとはいえない。一方，後者は，いわゆるマトリックス法としてHARRINGTON[14]，MEI[15]等が電磁界の散乱問題に使っているが，その基本的諸問題については何らふれていない。またこれとは別に，安満，板倉氏等はREACTIONの概念を用いて完備汎動関数系からなる近似方法を示し[15]，岡本らは，これにDIPOLE SOURCEを適用してマトリックス解法を示している[16]。これらのような数値計算法も従来の方程式論のどの部分にくり込むかにより，それぞれの立場が異り各々に問題点を含む。

従来の方程式論をほとんど含まない，いわゆる差分方程式からマトリックス化して数値計算する方法は今世紀初期からPERRON，FROBENIUS等により研究され，これは最も一般的な数値解法であるが，そのマトリックス要素が非常に簡単なものに対して，有効である[17]。しかし，積分方程式をマトリックス化したような複雑な要素をもつものに対しては適用されないし又解けない場合が多い。そこで，ここでは特に電磁界境界値問題に最も広く適用されうる，連立方程式の解法について（ここでは特に2次元問題についてのみ）積分方程式の立場から固有値，固有解について取り扱い，その誤差を評価している。

## §1 スカラー波のグリーン関数表示

われわれが波動方程式から、既に境界条件の入った解をもめる場合，グリーン関数を用いて

$$\varphi(A)=\int_V f(B)G(A,B)dB+\oint_\Gamma G(A,\theta)\frac{\partial}{\partial n_\theta}\varphi(\theta)-\frac{\partial}{\partial n_\theta}G(A,\theta)\,\varphi(\theta)\,d\sigma_\theta$$

と表わすことができる。ここで$f(B)$は領域内での波源であるが，今，問題とする量を$\varphi(\theta)$とすると上式の右辺第2項は境界面上の波源であると考えられる。そこで境界条件のない，いわゆる自由空間における波を$\varphi^i(A)$とすると

$$0=\int_V f(B)G(A,B)dB-\oint_\Gamma G(A,\theta)\frac{\partial}{\partial n_\theta}\varphi^i(\theta)-\frac{\partial}{\partial n_\theta}G(A,\theta)\,\varphi^i(\theta)\,d\sigma_\theta\ ,$$

とかけ，波源の項が等価的に境界面上での波源に置き換えることができる。したがって以下で取り扱う波動は全て境界面上に等価波源があるとして

$$\varphi(A)=\oint_\Gamma G(A,\theta)\frac{\partial}{\partial n_\theta}\varphi(\theta)\,d\sigma_\theta-\oint_\Gamma\frac{\partial}{\partial n_\theta}G(A,\theta)\,\varphi(\theta)\,d\sigma_\theta \qquad (1\text{-}1)$$

で表される波動についてのみ調べることにする。上式で与えられる関数$\varphi(A)$は境界面上で内部と外部のものに対して不連続となり，その差が波源となる。そこで，一般にこれらの量を面素一重層，二重層と称して，この量を用いることより内部，外部の表示式を共に(1-1)で表わすことができる。ここでグリーン関数はスカラー波源をもつ波動であるが，一般にベクトル波源をもつ波動を用いて(1-1)をさらに一般的に記述することができる。[16]

## §2 波動積分方程式のマトリックス化

(1-1)で与えられる方程式を，A点を境界上に近づけることより境界面上の界について積分方程式を作ることができる。このとき(1-1)の右辺第1項の核関数はWEAK-SINGULAR，第2項はSTRONGLY-SINGULARであるが，境界面が滑らかな，いわゆるLIAPUNOV条件[4]を満足する場合には第2項の核関数を$\frac{1}{2}\delta$-関数とWEAK-SINGULAR関数に分けることができ，結局，全ての核関数がWEAK-SINGULARになる。WEAK-SINGULAR核をもつ有限境界領域の積分方程式はCARLEMANN，MIKHLIN等によりFREDHOLMの理論に従うことがわかっている。[4,5] したがって与えられた積分方程式が積分のらA点を境界上のP点に近づける操作を必要とするにかかわらずA点を先にP点に近づけたのち積分を遂行しても全く変りがない。したがってA点をP点に近づけて積分を有限区分に分け，連立方程式に近似して求めるマトリックス法が可能になり，区分数Nを無限にすればもとの積分方程式になり，またその近似解は真の解に近づく。

FREDHOLM第2種型マトリックス方程式は

$$(\mathbf{I}-\mathbf{L})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{F} \qquad (2\text{-}1)$$

で与えられる。特に$(\mathbf{I}-\mathbf{L})$の逆マトリックスをRESOLVENT KERNEL $\mathbf{R}$で表すと$\mathbf{L}$のノルム$\|\mathbf{L}\|$が1より小さい場合にはITERATIVE METHODSを利用して[9,10]

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}+\mathbf{L}^2+\mathbf{L}^3+\cdots\cdots$$

と表わされる。しかし一般の電磁界の積分核はこれをみたす場合が少なく，上の方法ではRESOLVENT-KERNELを求められない。そこでFREDHOLMが行ったようにマトリックスを直接変形して

$$D_n = \det(\mathbb{I}-\mathbb{L}) = 1-\sum_{p=1}^{n} L_{pp} + \frac{1}{2!}\sum_{p_1,p_2=1}^{n}\begin{vmatrix} L_{p_1p_1}, L_{p_1p_2} \\ L_{p_2p_1}, L_{p_2p_2}\end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{p_1\cdots p_n=1}^{n}\begin{vmatrix} L_{p_1p_1} & L_{p_1p_2} & \cdots & L_{p_1p_n} \\ L_{p_2p_1} & \cdots & & L_{p_2p_n} \\ \cdots & & & \\ L_{p_np_1} & \cdots & & L_{p_np_n}\end{vmatrix} \tag{2-2}$$

$$\mathbb{D}_n = D_n\cdot\mathbb{R} = (d_{ij})$$

$$d_{ij} = L_{ij} - \sum_{p_1=1}^{n}\begin{vmatrix} L_{ij} & L_{ip} \\ L_{pj} & L_{pp}\end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{p_1\cdots p_n=1}^{n}\begin{vmatrix} L_{ij} & L_{ip_1} & \cdots & L_{ip_n} \\ \cdots & & & \\ L_{p_nj} & \cdots & & L_{p_np_n}\end{vmatrix} \tag{2-3}$$

但し WEAK-SINGULAR核のときは $L_{pp}$ $(p=1\sim n)$ は0とおく

と表わされ $L_{ij}$ を形成するもとの関数 $L(x,y)$ が L2 空間で積分可能のとき（実際，電磁界方程式の核関数はこれが可能である）(2-2)(2-3)は $n$ を極限にすれば収束する。実際，(2-3)はFREDHOLMが与えた $D(x,y)\Delta y$ に $a$ とし，$D(x,y)$ はWEAK-SINGULARを構成する。[5]（(2-3)の $m/(m-\alpha)$ 以下の項数では特異性を示す。ただし $m$ は積分の次数，$\alpha$ は核の特異性の次数）しかし $\Delta y$ の要素を積した値をもつ $d_{ij}$ は発散しない。以上からFREDHOLM第2種型WEAK-SINGULAR核をもつマトリックス方程式(2-1)を解く場合，$(\mathbb{I}-\mathbb{L})$ のオペレーターが0でないとき，即ち $D_n \neq 0$ であるとき $(\mathbb{I}-\mathbb{L})$ の逆マトリックスを如何なる方法で求めても，その要素は発散しない。したがって $n$ が十分大きい値のときでも，逆マトリックスを先に求めてから，それに $\mathbb{F}$ を積して解 $\Phi$ を求める方法が可能である。また $n$ が大きいほど誤差が少ないことがいえる。

他方．(2-2)で表される$D_n$が0となる場合，固有値問題に帰着する。上で述べたように(2-1)のマトリックス方程式のRESOLVENT KERNELが(2-2)(2-3)で表わされ，与えられたもとの関数系がL2空間で積分可能ならば全てFREDHOLMのまえた解に帰着する。したがって境界境界値問題を(1)からマトリックス方程式に直して解く場合，そのマトリックス方程式に関する諸定理はFREDHOLMの理論と共通になる。したがってマトリックス方程式(2-1)がもとの積分方程式に対して十分良い近似式であるならば(2-1)の$(I-L)$のオペレーターが0点をもつ．即ち$D_n=0$のときは(2-1)が固有解をもち，また，もとの方程式も固有解をもつ。またその逆もいえる。

一般にもとの方程式の固有値は(2-2)の極限関数

$$D_\infty(k)=1+\frac{1}{2!}\iint_\Gamma \begin{vmatrix} 0 & L(x,y) \\ L(y,x) & 0 \end{vmatrix} dxdy-\frac{1}{3!}\iiint_\Gamma \begin{vmatrix} 0 & L(x,y) & L(x,z) \\ L(y,x) & 0 & L(y,z) \\ L(z,x) & L(z,y) & 0 \end{vmatrix} dxdydz+\cdots \tag{2-4}$$

但し．$L(x,y)=\pm 2\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)$ or $\pm 2\frac{\partial}{\partial n_x}G(x,y)$

の値が0となる波数$k_j$のときである。(p.5)この関数$L(x,y)$を波数$k$で正規化すると波数$k$によらない関数となり境界が

$$(L(x,y)/k)\,k\,dy=L(x,y)dy \qquad kdy=dY$$

あたかもk倍したものになり．したがってk倍された境界をN区分して(2-4)の積分を和で近似したものが(2-2)となっている。このことからNを一定値に固定すれば，k倍された境界面積が小さければ小さいほど，即ち．kが小さいほど良い近似となり，(2-2)から求められる固有値$\{k_j\}$のうち$|k_j|$が大きいものは不正確である。

今，$(I-L)$オペレーターが$k_j$で0点をもつとする。即ち

$D_n(k_j)$が0となる。このとき $g$ 回微分 $D_n^{(g)}(k_j)$ が0でないとすれば マトリックス $(I-L)$ の階数は $n-g$ となり、$g$ 個の行、列ベクトルが従属になる。ここで話を簡単にするため、その従属ベクトルが $1\sim g$ 行、列であるとするとオペレーターは

$$I-L=\begin{bmatrix} \alpha\cdot(I-L)_{n-g}\cdot\beta, & \alpha\cdot(I-L)_{n-g} \\ (I-L)_{n-g}\cdot\beta, & (I-L)_{n-g} \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

とかける。$\Phi$ および $F$ を

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_g\\ \Phi_{n-g}\end{bmatrix},\qquad F=\begin{bmatrix}F_g\\ F_{n-g}\end{bmatrix}$$

と分離して (2-1) に代入すれば

$$\Phi_{n-g}=-\beta\cdot\Phi_g+(I-L)_{n-g}\cdot F_{n-g} \tag{2-6}$$

を え、かつ

$$F_g=\alpha\cdot F_{n-g} \tag{2-7}$$

の条件を満足しなければならない。一方 $g$ 個の自由度をもつ (2-1) の斉次解は

$$\Phi_0=\begin{bmatrix}I\\ -\beta\end{bmatrix}\cdot\Phi_g$$

であることが示され、また (2-1) の随伴斉次方程式の解が

$$\Psi_0=\begin{bmatrix}I\\ -\alpha^*\end{bmatrix}\cdot\Psi_g \qquad (*:\text{TRANSPOSED CONJUGATE})$$

であることから (2-1) の解が解けるための必要十分条件

は (2-7) より

$$\mathbf{I}_0^* \cdot \mathbf{F} = 0 \tag{2-8}$$

である。したがって与えられた (2-1) が固有値をもつとき波源項 F は (2-8) を満足しなければならない。このとき解は

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \mathbf{F} + \frac{1}{D_{n-g}} \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} \tag{2-9}$$

$$D_{n-g} = \det (\mathbf{I} - \mathbf{L})_{n-g}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} D_{n-g} , & 0 \\ 0 , & D_{n-g} (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}_{n-g} - \mathbf{I} D_{n-g} \end{bmatrix}$$

と表される。ここで $\mathbf{I}_0$ は斉次解でその大きさは任意である。一方 M をさらに，行列式の演算より変形して

$$M = (m_{ij})$$

$$m_{ij} = (-1)^{g+1} \begin{vmatrix} -L_{11}, -L_{12}, \cdots\cdots\cdots -L_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -L_{g1} -L_{g2}, \cdots\cdots -L_{gn} \\ -L_{g+1,1}, -L_{g+1,2}, \cdots 1-L_{g+1,g+1}, \cdots -L_{g+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -L_{j-1,1} -L_{j-1,2}, \cdots\cdots 1-L_{j-1,j-1}, -L_{j-1,n} \\ -L_{i1} -L_{i2}, \cdots\cdots, -L_{ii}, \cdots -L_{in} \\ -L_{j+1,1}, -L_{j+1,2}, \cdots\cdots 1-L_{j+1,j+1} \cdots -L_{j+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ -L_{n,1} -L_{n,2} \cdots\cdots\cdots 1-L_{nn} \end{vmatrix} \tag{2-10}$$

で表され，さらに展開公式を用いて

$$m_{ij} = L\begin{pmatrix} i, 1, 2, \cdots g \\ j, 1, 2, \cdots g \end{pmatrix} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-g-1}}{(n-g-1)!} \sum_{m_1, m_2 \cdots m_{n-g-1} = 1}^{n} L\begin{pmatrix} i, 1, \cdots g, m_1 \cdots m_{n-g-1} \\ j, 1, \cdots g, m_1 \cdots m_{n-g-1} \end{pmatrix} \tag{2-11}$$

値1.

$$L\begin{pmatrix} p_1 p_2 \cdots p_n \\ q_1 q_2 \cdots q_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_{p_1 q_1} L_{p_1 q_2} \cdots L_{p_1 q_n} \\ \cdots\cdots \\ L_{p_n q_1} L_{p_n q_2} \cdots L_{p_n q_n} \end{pmatrix}$$

とかける。また(2-11)のnを極限とした関数はFREDHOLMの与えた$D_{gx}\begin{pmatrix} x, x_1 \cdots x_n \\ y, y_1 \cdots y_n \end{pmatrix}$に一致する。したがって固有値をもつ(2-1)の特別解もnをふやすことにより，与えられた方程式の特別解に一致する。以上から与えられた積分方程式の近似として有限n次マトリックス方程式(2-1)の解は如何なる方法で解かれようともnが十分大きければもとの方程式の解の良い近似解となっている。しかし，一般にn次オペレーター$(I-L)$の固有値は複素数となり，みつけることが困難である。そこで真の固有値に近い実数の近似固有値で表現する必要がある。

今，n次マトリックスオペレーターの固有値を$k_1$として真の固有値($D_\infty(k)=0$からえられる固有値)を実数$k_2$とすれば(2-2)が収束することよりnの増加につれ

$$k_1 \to k_2 \quad (n \to \infty)$$

となる。また$L(x,y)/k$はkに無関係で境界面がk倍された大きさをもつことから，それぞれのマトリックス要素はkに関して正則である。したがって$k_1$に近い実数$k_1'$について

$$\left.\begin{aligned} |\beta(k_1') - \beta(k_2)| &< C_\beta |k_1' - k_2|^\alpha \quad (\alpha \geq 1) \\ |M(k_1') - M(k_2)| &< C_M |k_1' - k_2|^\alpha \quad (\alpha \geq 1) \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}12)$$

であるから斉次方程式の固有ベクトル重$_0$は

$$|\text{重}_0(k_1') - \text{重}_0(k_2)| < \begin{bmatrix} 0 \\ C_\beta \end{bmatrix} |\text{重}_0| |k_1' - k_2|^\alpha \quad (2\text{-}13)$$

となり $k_1' \to k_2$ で一致する。即ち $n$ が十分大きければ (2-1) の有次方程式の固有ベクトル $\vec{u}_0(k_2)$ は固有値が複素数であるにもかかわらず，あたかも実数の如く，真の固有値に近い $k_1'$ (実数) を用いて，(I-L) オペレーターと近似的に従属ベクトルが存在するとして取り扱った解 $\vec{u}_0(k_1')$ に $|k_1-k_2|^\alpha$ の値の誤差で ひとしいことが結論される。同様に特別解についても

$$|\vec{u}(k_1')-\vec{u}(k_2)| < \left|\frac{M(k_1')}{D_{n-g}(k_1')}\cdot F(k_1) - \frac{M(k_2)}{D_{n-g}(k_2)}\cdot F(k_2)\right|$$

$$< \frac{C_H|F(k_1')|}{|D_{n-g}(k_1')|}|k_1'-k_2|^\alpha + |M(k_2)|\left|\frac{F(k_1')}{D_{n-g}(k_1')} - \frac{F(k_2)}{D_{n-g}(k_2)}\right| \quad (2\text{-}14)$$

同様に $|k_1'-k_2|^\alpha$ の誤差で正しい。一方，先に述べたような真の解 $\vec{u}_\infty(k_1)$ と $n$ 次マトリックス方程式 (2-1) の解 $\vec{u}(k_2)$ とは

$$|\vec{u}_\infty(k_1)-\vec{u}(k_2)| < \varepsilon(n) \quad (n\to\infty\ \varepsilon\to 0) \quad (2\text{-}15)$$

であるから

$$|\vec{u}_\infty(k_1)-\vec{u}(k_1')| < |\vec{u}_\infty(k_1)-\vec{u}(k_2)| + |\vec{u}(k_2)-\vec{u}(k_1')|$$

に (2-15) と (2-13) あるいは (2-14) を代入すれば真の固有値に近い実数値 $k_1'$ を用いて $n$ 次マトリックス方程式 (2-1) を解けば $k_1'$ が $k_1$ に近いほど良い近似であることがいえる。

次節では，(2-1) から $k_1'$ を求める方法について述べる。

## §3　固有値の決定及びその誤差

前節で示したように，与えられたもとの積分方程式の近似式(2-1)から固有値を求めると複素数となる。しかし真の固有値は実数であるから，複素数の実部をとって近似固有値とする方法も考えられるが，実際，これを行うと比較的誤差をふくみ，むしろ，行列式 $D_n(k)$ を $k$ について実軸上を動かしたとき，絶対値が最小値となるときの $k$ をもって固有値とする方が精度も良く，容易に求められる利点をもつ。そこで，ここでは，この方法について誤差の評価をする。そして，この値をもって固有値と固有ベクトル，及び特別解を求めば，前節より近似解であるといえる。　まずnの極限関数 $D_\infty(k)$ が0となる真の固有値を $\{k_j^{(\infty)}\}$ とすれば

$$|D_n(k_j^{(\infty)})| \leq \varepsilon(n) \qquad (n\to\infty \text{ で } \varepsilon\to 0) \quad (3\text{-}1)$$

である。一方 $D_\infty(k)$ は $k$ に対して正則であるから微分可能である。したがって

$$D_\infty(k_j^{(n)}) = D_\infty(k_j^{(\infty)}) - D_\infty'(k_j^{(\infty)}+\theta(k_j^{(\infty)}-k_j^{(n)}))(k_j^{(\infty)}-k_j^{(n)}) \qquad (3\text{-}2)$$
$$|\theta|\leq 1$$

と表され右辺第1項は仮定より0である。ただし，ここで固有値は単根であると仮定している。よって $D_\infty'(k_j^{(\infty)})$ は0ではない，また $k_j^{(\infty)}$ と $k_j^{(n)}$ がごく近傍にあるとすれば，やはり $D_\infty'(k_j^{(\infty)}+\theta(k_j^{(\infty)}-k_j^{(n)}))$ も0ではない。一般に $p$ 重根のときは　$k$ が $\{k_j^{(\infty)}\}$ の近傍にあるとき

$$D_n(k) = \tilde{\varepsilon}_n(k) + D_\infty^{(p)}(k_j^{(\infty)}+\theta(k_j^{(\infty)}-k))(k-k_j^{(\infty)})^p \qquad (3\text{-}3)$$

$$\tilde{\varepsilon}_n(k) = D_n(k) - D_\infty(k), \quad |\tilde{\varepsilon}_n(k)| < \varepsilon(n)$$

である。そこでηを十分大きくとれば $\tilde{\varepsilon}_n(k)$ は微小量となり，また $|D_\infty^{(p)}(k_j^{(\infty)})|$ が比較的大きな値であるとすれば $D_n(k)$ は，$k$ が $k_j^{(\infty)}$ からはずれた所では (3-3) の第2項が大きく効く。一方，$k$ が $k_j^{(\infty)}$ の近傍 $\Delta k_j^{(n)}$ の近くになると (3-3) の第1項と第2項が同程度になり，$\varepsilon_n(k)$ の項も効き，$|D_n(k)|$ の最小値のとき，$k$ が $k_j^{(\infty)}$ であるとはいえなくなる。即ち，最小値から求めた固有値 $k_j^{(n)}$ は $\Delta k_j^{(n)}$ の誤差を含む。したがって $\Delta k_j^{(n)}$ は (3-3) の第1.2項が α と1 いとして

$$\Delta k_j^{(n)} \simeq \left( \frac{|\tilde{\varepsilon}_n(k_j^{(n)})|}{|D_\infty^{(p)}(k_j^{(\infty)} + \theta(k_j^{(\infty)} - k_j^{(n)}))|} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \frac{\varepsilon^{(n)}}{|D_\infty^{(p)}(k_j^{(\infty)} + \theta(k_j^{(\infty)} - k_j^{(n)}))|} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3-4}$$

とあらわされる。これより固有値 $k_j^{(n)}$ は $\varepsilon(n)$ が小さく，$|D_\infty^{(p)}(k_j^{(\infty)})|$ が大きく，$p$ が小さいほど，より正確である。

$D_\infty(k)$ は $k$ に関して超越整関数となり WEIERSTRASS の定理から

$$D_n(k) = f_n(k) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_m^{(n)}}\right)$$

と表現されるから，$k$ が $k_{j-1}^{(n)}$ と $k_{j+1}^{(n)}$ の間にあり，それらに近くないならば $D_n^{(p)}(k)$ は $k$ に関してほぼ一定値であると考えられる。したがって (3-3) より $k$ が $k_j^{(n)} \pm \Delta k_j^{(n)}$ より大きいか，小さい所では

$$D_n(k) \simeq D_\infty^{(p)}(k_j^{(\infty)} + \theta(k_j^{(\infty)} - k))(k - k_j^{(\infty)})^p$$

となるから $|D_n(k)|$ の $(k - k_j^{(\infty)})^p$ に関する傾きと求めれば $|D_\infty^{(p)}|$ の大よその値を知ることができ，$\varepsilon(n)$ は最小値から求められ，結局，$|D_n(k)|$ の $k$ に関するグラフから (3-4) で与えられる $\Delta k_j^{(n)}$ を算出できる。

## §4 TE波固有値とTM波固有値の判別

われわれがLIAPUNOV条件をみたす境界面上で電磁界境界値問題を解くために，積分方程式を与えた場合，その方程式に固有値を含まないときは解が一意的に定められ，要求する解となっている。しかし固有値を含むときは，必ずその斉次方程式に対して固有解が存在するがその固有解が共振モードのうち．TEモードあるいはTMモードのどちらになっているかを知る必要がある。そこで，この節では，与えられた積分方程式の積分オペレーターの性質について述べる。§2よりnが十分大きければ，マトリックスオペレーターの性質にも共通となり，したがって，マトリックスオペレーターの固有値からTE；TM波の固有値，固有モードを判断できる。

まず，グリーン関数を外部領域で外向き放射条件をみたす

$$G(A,B)=\frac{1}{4j}H_0^{(2)}(kr_{AB}) \qquad (4-1)$$

とる。これを用いて内(+符号)外(−符号)部領域における任意の点Aの界は

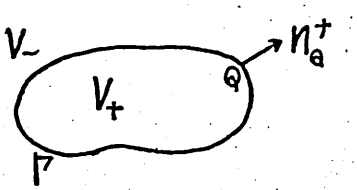


図 4−1

$$\varphi^{\pm}(A)=\mp\oint_\Gamma \varphi^{\pm}(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q^{\pm}}G(A,Q)\,d\sigma_Q+\oint_\Gamma \frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial n_Q^{\pm}}G(A,Q)\,d\sigma_Q \qquad (4-2)$$

と表され，さらに境界Γ上で電気一重層，二重層 $\underline{\underline{\Psi}}(Q)$，$\underline{\underline{\Phi}}(Q)$ を用いて全領域(Γ上のぞく)で界は

$$\varphi(A)=-\oint_\Gamma \underline{\underline{\Phi}}(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q^{+}}G(A,Q)\,d\sigma_Q+\oint_\Gamma \underline{\underline{\Psi}}(Q)\,G(A,Q)\,d\sigma_Q \qquad (4-3)$$

$$\Phi(Q)=\varphi^{+}(Q)-\varphi^{-}(Q),\quad \Psi(Q)=\frac{\partial\varphi^{+}}{\partial n_Q^{+}}+\frac{\partial\varphi^{-}}{\partial n_Q^{-}}$$

で表される。(4-2)及び(4-3)において$A$点と境界上の任意の点$P$に、内部から、あるいは外部から近づけると

$$\frac{1}{2}\varphi^{\pm}(P)=\mp\oint_{\Gamma}\varphi^{\pm}(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q^{\pm}}G(P,Q)d\sigma_Q+\oint_{\Gamma}\frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial n_Q^{\pm}}G(P,Q)d\sigma_Q \qquad (4-4)$$

$$\frac{1}{2}\psi^{\pm}(P)=\pm\oint_{\Gamma}\psi^{\pm}(Q)\frac{\partial}{\partial n_P^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q-\oint_{\Gamma}\varphi^{\pm}(Q)\frac{\partial^2}{\partial n_P^{+}\partial n_Q^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q \qquad (4-5)$$

$$\varphi^{+}(P)=\frac{1}{2}\Phi(P)-\oint_{\Gamma}\Phi(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q+\oint_{\Gamma}\Psi(Q)G(P,Q)d\sigma_Q \qquad (4-6)$$

$$\psi^{+}(P)=\frac{1}{2}\Psi(P)+\oint_{\Gamma}\Psi(P)\frac{\partial}{\partial n_P^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q-\oint_{\Gamma}\Phi(Q)\frac{\partial^2}{\partial n_P^{+}\partial n_Q^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q \qquad (4-7)$$

$$\psi^{\pm}(Q)=\frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial n_Q^{\pm}}$$

となる。

そこで，それぞれの積分オペレーター

$$\mathbb{A}^{E}u=u(P)-2\oint_{\Gamma}u(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q,\quad \mathbb{A}^{H}u=u(P)+2\oint_{\Gamma}u(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q$$

$$\mathbb{B}^{E}u=u(P)-2\oint_{\Gamma}u(Q)\frac{\partial}{\partial n_P^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q,\quad \mathbb{B}^{H}u=u(P)+2\oint_{\Gamma}u(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q$$

$$\mathbb{C}^{E}u=\oint_{\Gamma}u(Q)G(P,Q)d\sigma_Q,\quad \mathbb{D}^{H}u=\oint_{\Gamma}u(Q)\frac{\partial^2}{\partial n_P^{+}\partial n_Q^{+}}G(P,Q)d\sigma_Q \qquad (4-8)$$

を用いて(4-4)～(4-7)をそれぞれ

$$\mathbb{A}^{H}\varphi^{+}=2\,\mathbb{C}^{E}\psi^{+},\quad \mathbb{A}^{E}\varphi^{-}=2\,\mathbb{C}^{E}\psi^{-} \qquad (4-4)'$$

$$\mathbb{B}^{E}\psi^{+}=-2\,\mathbb{D}^{H}\varphi^{+},\quad \mathbb{B}^{H}\psi^{-}=-2\,\mathbb{D}^{H}\varphi^{-} \qquad (4-5)'$$

$$\varphi^{+} = \frac{1}{2}\mathbb{A}^{E}\Phi + \mathbb{C}^{E}\Psi \qquad (4\text{-}6)'$$

$$\psi^{+} = \frac{1}{2}\mathbb{B}^{H}\Psi - \mathbb{D}^{H}\Phi \qquad (4\text{-}7)'$$

とかける。 $\mathbb{A}^{E}$, $\mathbb{A}^{H}$はそれぞれTM, TE波の固有値, $\{k_j^E\}$, $\{k_j^H\}$をもち(, )$\mathbb{A}^{E}$, $\mathbb{A}^{H}$の随伴オペレーター$\mathbb{B}^{E}$, $\mathbb{B}^{H}$も同一の固有値をもつ。他方, $\mathbb{C}^{E}$, $\mathbb{D}^{H}$も. それぞれTM, TE波の固有値をもち(但. 以上のことはグリーン関数を(4-1)にえらんだときに限る)それ以外の固有値をもたない。即ち上で示されるEの添字のつくオペレーターはTM波の. Hのつくオペレーターは TE波の内部共振固有周波数のみをもち. それ以外はもたない。(付録参照) したがってTE,(TM)モードの内部固有周波数(導波管のCUT-OFF FREQ.)はH(E)の添字のつくオペレーターをマトリックス化して, その行列式の絶対値の最小となるときのkの値でもってもとめることができる。 一方§2より$\mathbb{A}$及び$\mathbb{B}$オペレーターはFREDHOLM第2種型であるから, その行列式の値は$n$とともに一定値に収束するが$\mathbb{C}$オペレーターはHADAMARDの定理より

$$|\det \mathbb{C}^{E}|^2 \leq \prod_{i}^{n}\sum_{j}|C_{ij}|^2 \leq \left(\frac{\sum_i\sum_j|C_{ij}|^2}{n}\right)^n = \left(\frac{\|\mathbb{C}^{E}\|^2}{n}\right)^n \qquad (4\text{-}9)$$

をえる。また$\mathbb{C}$のノルムはグリーン関数G(P.Q)がL2空間で積分可能であることから有界である。したがって, $|\det \mathbb{C}^{E}|$は$n$の値に対して収束せず, $n$の増加とともに, 小さな値となる。他方(4-4)'(4-5)'からオペレーター間の関係

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{B}^{E}_{H} &= -4\,\mathbb{D}^{H}\cdot\mathbb{A}^{-1\,H}_{\;\;E}\cdot\mathbb{C}^{E} \\ \mathbb{A}^{E}_{H} &= -4\,\mathbb{C}^{E}\cdot\mathbb{B}^{-1\,H}_{\;\;E}\cdot\mathbb{D}^{H} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}10)$$

から

$$|\det \mathbb{D}^H| = \frac{1}{4}|\det \mathbb{A}^{E}_{H}|\cdot|\det \mathbb{B}^{H}_{E}|\cdot|\det \mathbb{C}^{E}|^{-1}$$

となり右辺第1, 2項は共にひとしく，収束するから$|\det \mathbb{D}^H|$の値は$n$の値とともに大きな値となるから，実際これらを求めようとする場合，たとえば対角要素で正規化等をして計算機のメモリーをOVER-FLOWあるいはUNDER-FLOWしないように注意する必要がある。

一方，グリーン関数として(4-1)のように外向方射条件をみたす以外のもの，たとえばNEUMAN関数を使ったとき，外部領域に定在波ができ，外部領域でも共振がおこる。したがって$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$オペレーターに，これらの共振固有値を含みHARRINGTONの示すように，まぎらわしい固有値がでてくる。(13)

以上のように外部領域では物理的に共振がないにもかかわらず境界上の積分方程式(4-4~7)は内部の共振モードの固有値を含み，たとえば$\varphi^-$を与えて$\psi^-$を求める（$E_z$を与えて$J_z$を求める）とき波数$k$が$\{k_j^E\}$のとき(4-4)′第2式では，内部のTM波の固有モードが混入する。そこで，このようなとき(4-5)′の第2式から求めればよいことがわかる。しかし$k_j^E$と$k_j^H$が縮体しているときは不可能である。境界面がLIAPUNOV条件をみたす，滑らかなとき，$\mathbb{A}$及び$\mathbb{B}$のオペレーターから固有値を求める方が，$\mathbb{C}$及び$\mathbb{D}$よりも精度がよいが，EDGEをもつ境界面では$\det \mathbb{A}, \det \mathbb{B}$は発散し，精度が落ち，むしろ$\mathbb{C}$及び$\mathbb{D}$から求める方がよい。このことについては後の機会にまわし，ここでは深く立入らないことにする。

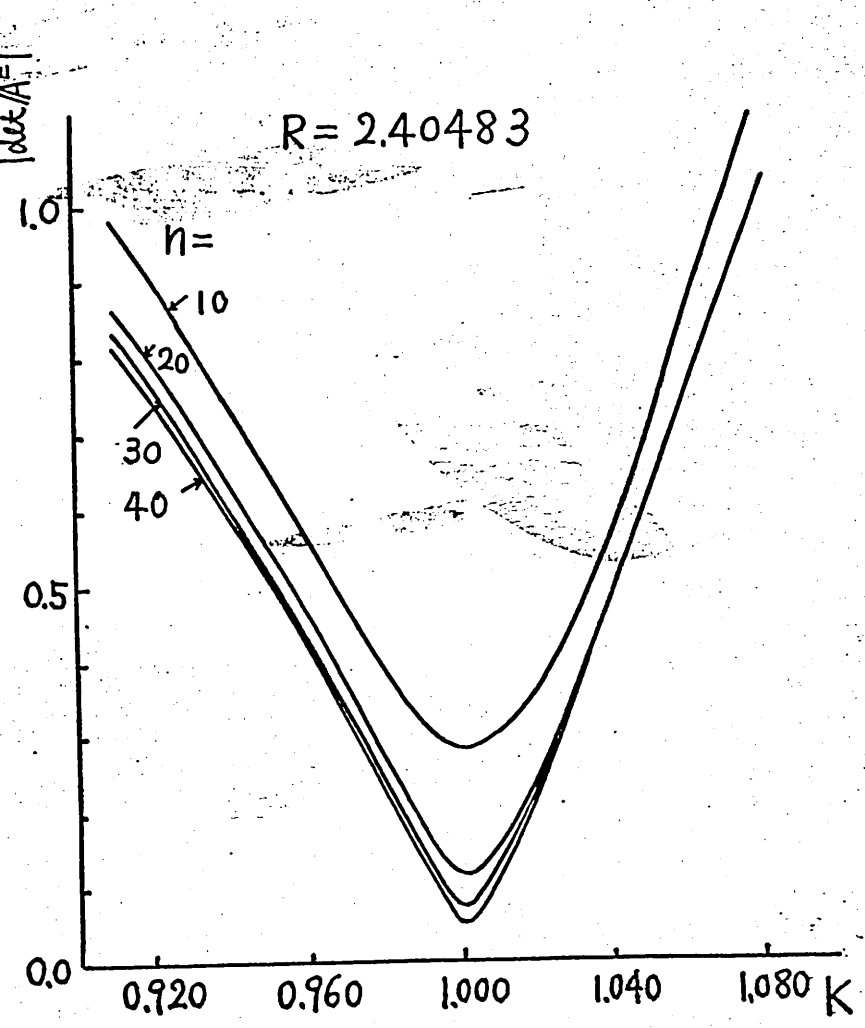



図 5-1

円筒境界面の $|\det A^E|$ の値. K=1.000 が理論値

$K_j^{10} = 1.0036$ , $K_j^{20} = 1.0018$ , $K_j^{60} = 1.0006$

$\Delta K_j^{10} = 0.024$ , $\Delta K_j^{20} \fallingdotseq 0.010$ , $\Delta K_j^{60} = 0.003$

## §5 計算機を用いた実験結果

前節までの理論を実際に計算機を使って求めるに当り，誤差の精度を知る都合上，理論的に既知の円筒境界面の固有周波数(導波管の CUT-OFF FREQ.)をもめた。

それぞれのオペレーターからマトリックス要素を求める場合. 核関数を積分して

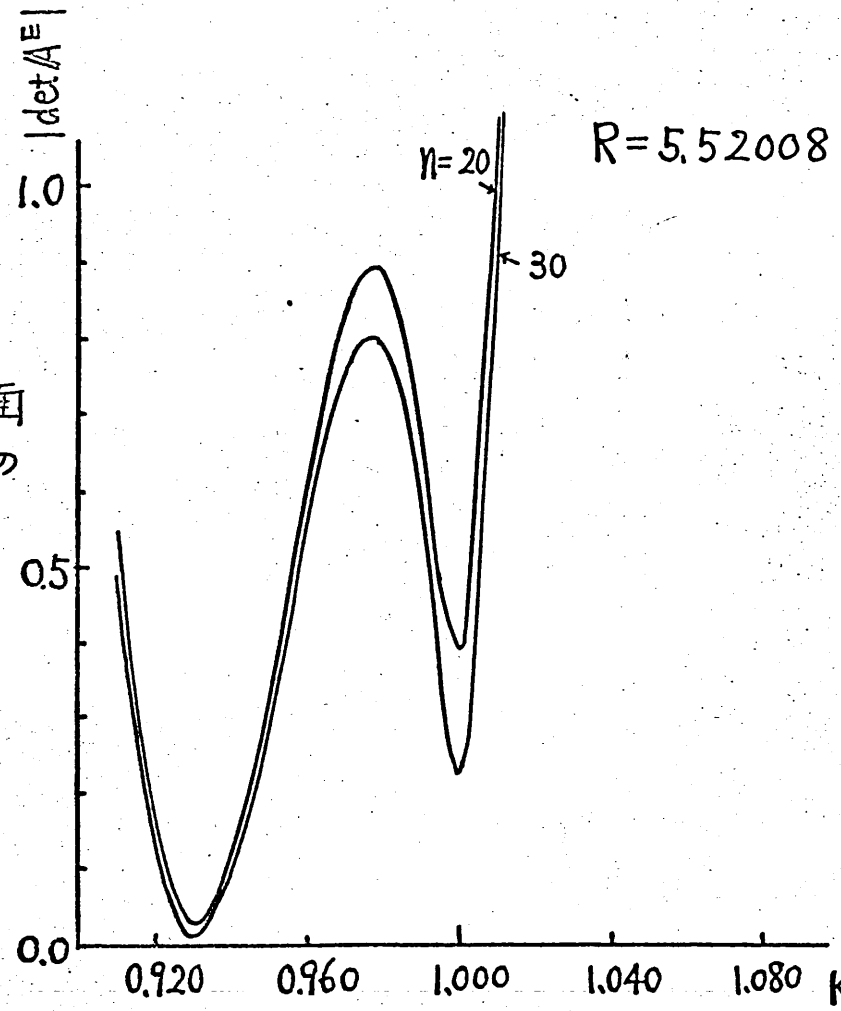



図5-2

円筒境界面の|detΔE|の値。
$K_1=0.9304$
$K_2=1.0000$
が理論値

$K_1^{20}=0.931$, $K_1^{30}=0.931$, $\Delta K_1^{20}=0.005$, $\Delta K_1^{30}=0.002$
$K_2^{20}=1.000$, $K_2^{30}=1.000$, $\Delta K_2^{20}=0.005$, $\Delta K_2^{30}=0.003$

$$L_{ij}=\int_{\Delta\Gamma_j} L(x_i,y)\,dy \qquad (5\text{-}1)$$

求める方法と，単に面積要素$\Delta\Gamma_j$を積してあわる

$$L_{ij}=L(x_i,y_j)\Delta\Gamma_j \qquad (5\text{-}2)$$

方法があるが，前者の方が精度の点ではるかに優れているが，後者は比較的容易であり，実験結果より，この方法で十分の精度がえられることがわかった。但し，C及

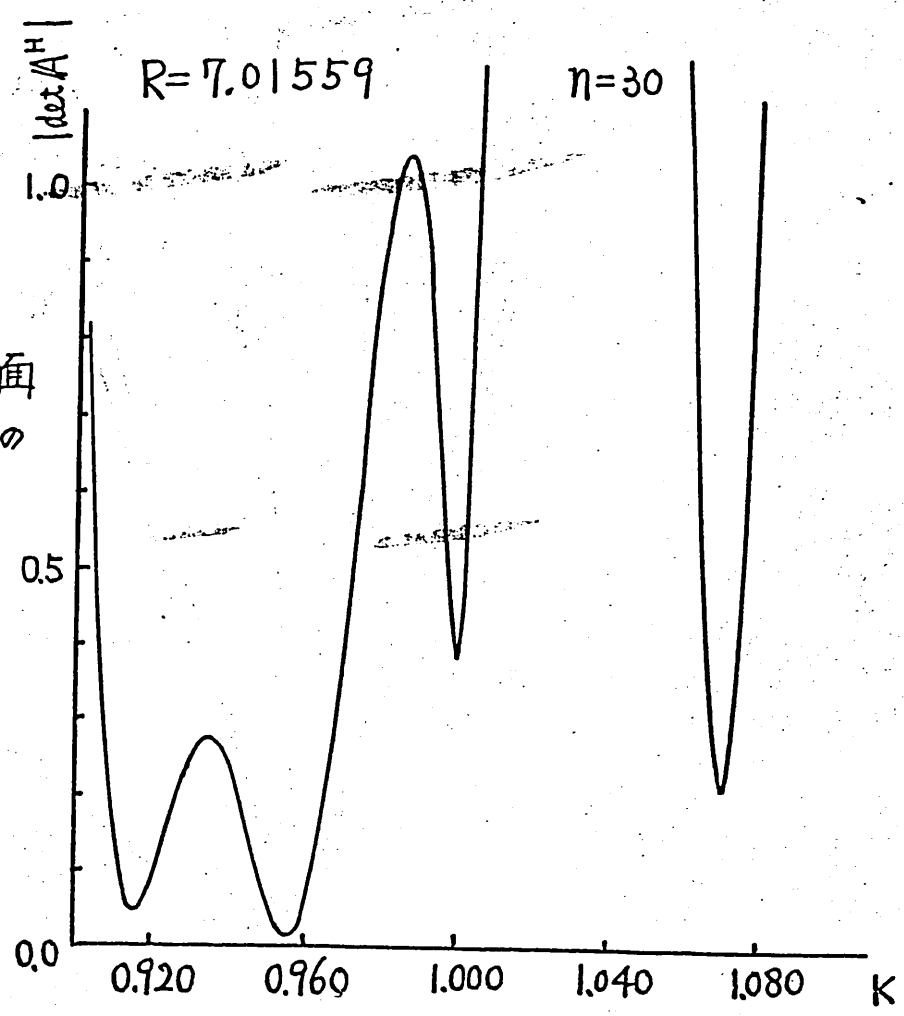



図5-3

円筒境界面の$|\det A^H|$の値.

$K_1 = 0.915$
$K_2 = 0.956$
$K_3 = 1.000$
$K_4 = 1.069$
が理論値

ゞIDオペレーターはWEAK-SINGULAR核であるから，マトリックス要素の対角部は積分によってもとめなければならない。(5-2)の方法でAのオペレーターではKR=10 (R; 円筒半径), n=30 でさえ1%程度の精度があるがCオペレーターでは図5-4のように精度は落ちる。1か1破線で示すように(5-1)の方法でもとめると精度は良くなる。また$|\det A|$の最小値は(5-2)の方法では

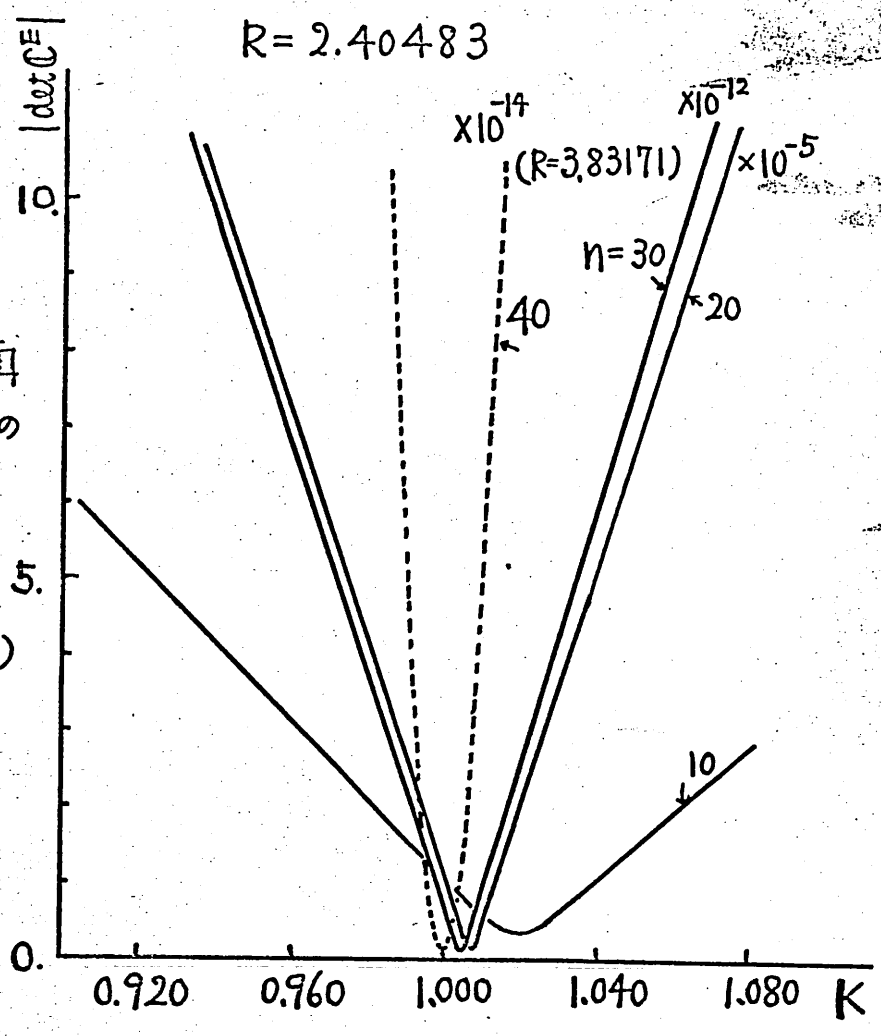



図 5-4

円筒境界面の $|\det \mathbb{C}^E|$ の値.
$K=1.000$ が理論値
破線は (5-1) の方法による。

$K_j^{10}=1.020,\ K_j^{20}=1.008,\ K_j^{30}=1.006,\ K_j^{40}=1.000$

$$|\det A|_{min} < \frac{c}{n} \qquad (5\text{-}3)$$

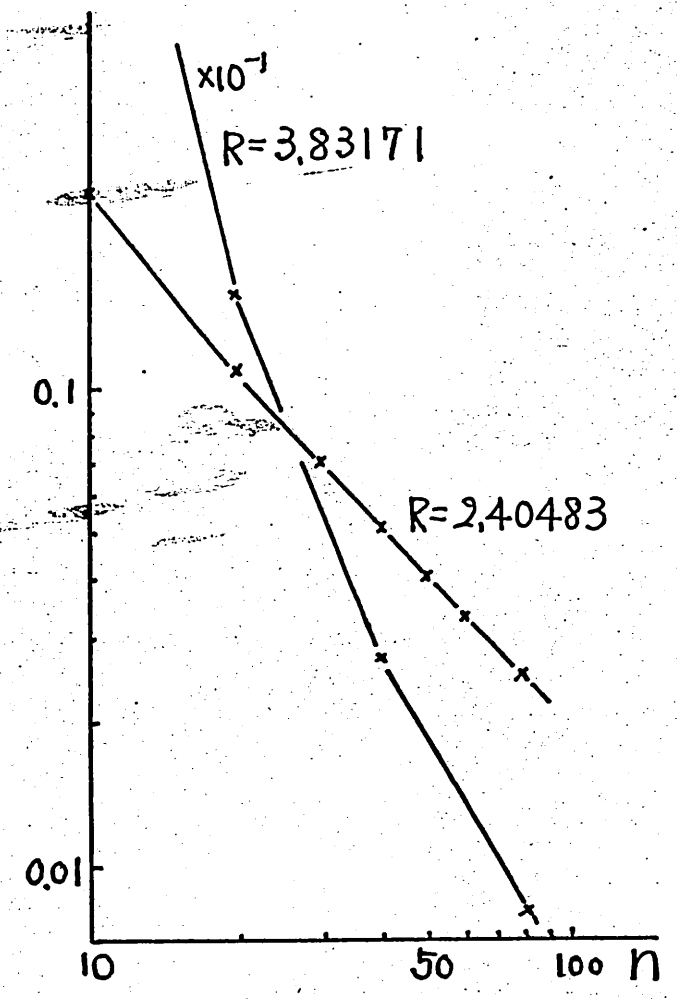
また (5-1) の積分する方法では

$$|\det A|_{min} < \frac{c}{n^2} \qquad (5\text{-}4)$$

となる。但し境界面は滑らかで境界を表す曲線関数は微分可能であるとする。(次回発表予定) したがって図5-5から (5-3) の成立していることが示される。

図 5－5

円筒境界面の $|\det A^E|$ の最小値と $n$ の関係




また，(3－4) から，えられる $\Delta k_j^n$ を図5－1～図5－3の曲線に適用すると，ほぼ誤差の評価をすることができる。図5－6ではAオペレーターの要素が近似的に従属であるとして，GAUSS-JORDAN 法にもとづき，マトリックスを順次対角要素のみにして，その結果，対角要素が，0.5 以下になったとき，その列は従属ベクトルとして捨せば最終的に，その列が固有ベクトルになる。これを示したものが図5－6の実線部で，一方破線は特別解で，やはり上の方法でもとめたものである。

なお，図5－7は (5－2) の方法で正三角形導波管に対

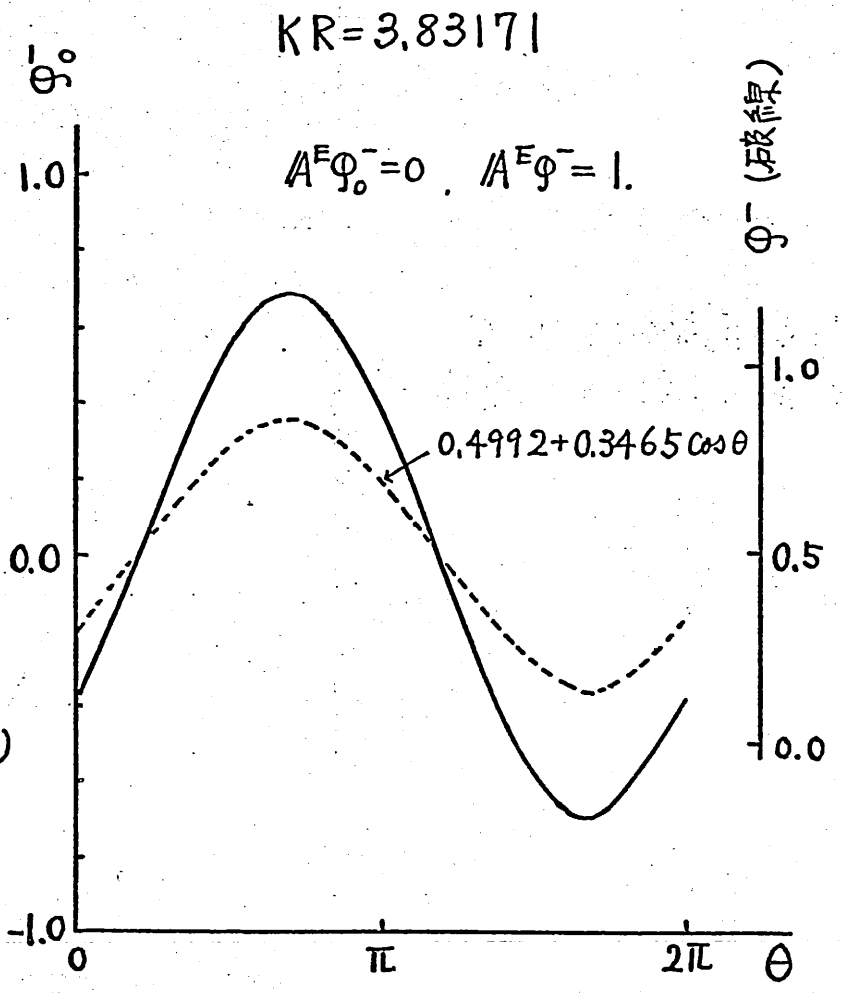



図 5－6

円筒境界面の固有モードと特別解(破線)

$\varphi_0^- = a\cos(\theta+\phi)$

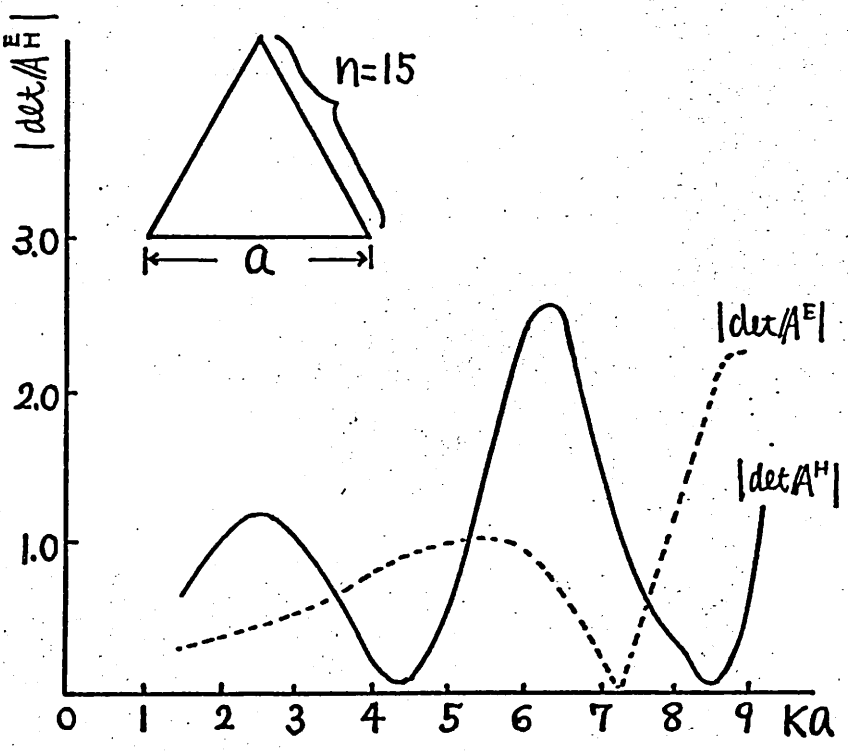
$\varphi^- = 0.4999 + a\cos(\theta+\phi)$

が理論値

する $|\det A^E|$ および $|\det A^H|$ の値を示す。

図5-7

正三角形境界面をもつ$|\det A^E|$と$|\det A^H|$の値



((付録))

$A^E$, $A^H$ と $B^E$, $B^H$ はそれぞれ随伴オペレーターであるから同一固有値をもつ。今そこで $A^E$, $A^H$ がそれぞれ $\{k_j^E\}$, $\{k_j^H\}$ の固有値をもつとし，まず $k_j^E$ と $k_j^H$ はひとしくないとする。今

$$k=\{k_j^H\} \qquad (A\text{-}1)$$

とする。このとき (4-4) あるいは (4-4)′ において

$$\psi^+(Q)=\frac{\partial\varphi^+}{\partial n_\sigma}\equiv 0 \qquad (A\text{-}2)$$

とおくと

$$\oint_\Gamma \overline{\Psi}^+(Q)\cdot\varphi^+(Q)\,d\sigma_Q=\int_{V_+}|\nabla\varphi^+|^2-k^2|\varphi^+|^2\,dA=0 \qquad (A\text{-}3)$$

となる内部共振モードが存在することを物理的立場から知っている。したがって

$$A^H\cdot\varphi_j^+=0 \qquad (A\text{-}4)$$

となる $\varphi_j^+(Q)$ が存在する。よって (A-2) のとき (A-4) を満足する解が存在する。次に，この逆を示そう。(A-1) のとき (A-4) を満す解 $\varphi_j^+(Q)$ は必ず存在する。内部領域において境界上で，この $\varphi_j^+(Q)$ をもつ任意の振動は (4-3) を用いて，外部領域の $\varphi^-(Q)$ を適当にえらび

$$\Psi(Q)=\frac{\partial\varphi_j^+}{\partial n_{Q^+}}+\frac{\partial\varphi^-}{\partial n_Q}=0 \qquad (A\text{-}5)$$

とすることより

$$\varphi_j^+(A)=-\oint_\Gamma(\varphi_j^+(Q)-\varphi^-(Q))\frac{\partial}{\partial n_{Q^+}}G(A,Q)\,d\sigma_Q \quad A\in V_+ \qquad (A\text{-}6)$$

と表わすことができて(15の*) $\varphi^-(Q)$ は (A-5) をみたす限り

任意に与えられる。しかし $\varphi_j^+(A)$ が境界上で $\varphi_j^+(P)$ にひとしくなければならないから (A-6) の A 点を内部から境界上の点 P に近づけ，かつ (A-4) の条件を考慮すると

$$A^E \varphi^- = A^H \varphi_j^+ = 0 \qquad (A-7)$$

であるから $A^E$ は k が $\{k_j^H\}$ のとき仮定より固有値をもたない。したがって $\varphi^-(\theta)$ は 0 でなければならない。これを (A-6) に代入し (4-2) を組み合せると

$$\oint_\Gamma \frac{\partial \varphi_i^+(Q)}{\partial n_Q} G(A,Q)\, d\Gamma_Q = 0 \qquad A \in V^+ \qquad (A-8)$$

となる。A が境界内部の任意の点であるから

$$\frac{\partial \varphi_i^+(\theta)}{\partial n_\theta^+} \equiv \varphi_j^+(\theta) = 0 \qquad (A-9)$$

でなければならない。(*) したがって (A-1) のとき (A-4) の固有解は (A-9) を満足する。即ち (A-9) を満足する共振モードは $\{k_j^H\}$ のときで，逆に $\{k_j^H\}$ のとき共振モードは (A-9) を満足する。他方 (4-5)′ にこれを代入すると

$$B^H \varphi_j^+ = 0 = -D^H \varphi_j^+ \qquad (A-10)$$

で $\varphi_j^+$ は 0 でないから $D^H$ は $\{k_j^H\}$ のとき固有値をもち，0 となる。またその逆もいえる。(後述)

さて，次に k が

$$k = \{k_j^E\} \qquad (A-11)$$

とすると $A^E$, $B^E$ が 0 点をもつ。(4-6)′ で

$$\varphi^+(\theta) = 0 \qquad \frac{\partial \varphi^+}{\partial n_\theta} = -\frac{\partial \varphi^-}{\partial n_\theta}$$

となる 0 でない $\varphi^-(\theta)$ が存在することを物理的立場から知っている。したがって

$$A^E \varphi^- = 0$$

となる。あるいはまた，(4-5)′において

$$\varphi_j^+ \equiv 0 \quad B^E \psi_j^+ = 0 \tag{A-12}$$

となる $\psi_j^+(\theta)$ が存在することを知っている。次に (A-11) のとき

$$B^E \psi_j^+ = 0 \tag{A-13}$$

となる固有解 $\psi_j^+$ は必ず存在する。境界上で $\psi_j^+(\theta)$ をもつ内部の一般解は (4-3) から

$$\varphi_j^+(A) = \oint_\Gamma (\psi_j^+ + \psi^-) G(A,\theta)\, d\sigma_\theta \tag{A-14}$$

$$\varphi_j^+(\theta) = \varphi^-(\theta) \tag{A-15}$$

とかける。(*) もちろん外部量 $\varphi^-(\theta)$ を (A-15) を満足する限り任意にとることができる。(A-14) が境界上で

$$\psi_j^+(P) = \frac{1}{2}(\psi_j^+(P) + \psi^-(P)) + \oint_\Gamma (\psi_j^+(\theta) + \psi^-(\theta)) \frac{\partial}{\partial n_P^+} G(P,Q)\, d\sigma_Q$$

あるいは

$$0 = B^E \psi_j^+ = B^H \psi^- \tag{A-16}$$

であるから (A-11) より $\psi^-(\theta)$ は 0 である。ところが外部領域において

$$0 = \oint_\Gamma \overline{\varphi^-(\theta)} \cdot \varphi^-(\theta)\, d\sigma_\theta = \int_{V^-} |\nabla \varphi^-|^2 - k^2 |\varphi^-|^2\, dA$$

ポインティングパワーが 0 で，かつ外部界はグリーン関数と同じように外向き放射条件をみたしているから，外部界は恒等的に 0 である。したがって (A-15) から内部での解は

$$\varphi_j^+(\theta) \equiv 0 \qquad (A\text{-}17)$$

である。このことから (A-13) をみたす解は (A-17) である。即ち (A-17) の場合には k は $\{k_j^E\}$ で，逆に k が $\{k_j^E\}$ のときの解は (A-17) を満たしている。他方，(4-4)' から

$$0 = \mathcal{A}^H \varphi_j^+(\theta) = \mathbb{C}^E \psi_j^+ \qquad (A\text{-}18)$$

であるから $\mathbb{C}^E$ は $\{k_j^E\}$ のとき 0 点をもち逆もいえる。(後述)
以上では $\{k_j^E\}$ と $\{k_j^H\}$ がひとしくないとしたが，今それらのあるものがひとしい場合を考える。それを

$$k_i^E = k_i^H \qquad (A\text{-}19)$$

であるとする。そして k が $k_i^E$ のとき

$$\mathcal{A}^H \varphi_i^+ = 0 \qquad (A\text{-}20)$$

の固有解 $\varphi_i^+(\theta)$ をもつ内部の一般解は，やはり (A-6) で表される。一方 $\varphi^-(\theta)$ は

$$\mathcal{A}^E \varphi^-(\theta) = \mathcal{A}^H \varphi_i^+ = 0 \qquad (A\text{-}21)$$

を満足し，$\varphi^-(\theta)$ が 0 のときは先の理論通りであるが，0 でないときは固有解で $\varphi_i^-(\theta)$ である。したがって内部解は

$$\varphi_i^+(A) = -\oint_\Gamma \left(\varphi_i^+(\theta) - \varphi_i^-(\theta)\right) \frac{\partial}{\partial n_\theta} G(A,\theta)\, d\sigma_\theta \qquad (A\text{-}22)$$

で表される。(*) 即ち内部の一般解は 2 つの固有モードの和で表される。これより，内部解 $\varphi_i^+(A)$ は 2 つにわけられるから，$\varphi_i^+(\theta)$ から派生するとすれば (A-22) の $\varphi_i^-(\theta)$ を形式的に 0 とおくことから (A-8) となり，したがって (A-9) となり，先の理論通りになる。他方，$\varphi_i^+(\theta)$ を形式的に 0 とお

いた $\varphi_i^-(\Theta)$ による内部界を $\varphi_i'^+(A)$ とすると

$$\varphi_i'^+(A) = \int_P \varphi_i^-(\Theta) \frac{\partial}{\partial n_\Theta} G(A,\Theta) d\sigma_\Theta \qquad (A-23)$$

とかけ、そこで A を内部領域から境界上の点 P に近づけると

$$2\varphi_i'^+(P) = -A^E \varphi_i^- = 0 \qquad (A-24)$$

である。よって $A^E$ から派生する内部解は (A-24) をみたす。

以上から

$\{k_j^E\}$ で $A^E=0$ のとき、この固有解からえられる内部解は $\varphi^+(\Theta)=0$ である。

$\{k_j^H\}$ で $A^H=0$ のとき、この固有解からえられる内部解は $\frac{\partial \varphi^+}{\partial n_\Theta}=0$ である。

と結論される。また $B^E$, $B^H$ についても同様である。

$$D^H \varphi_j^+ = 0 \quad (C^E \psi_j^+ = 0) \qquad (A-25)$$

の場合、もし k が $\{k_j^H\}$ ($\{k_j^E\}$) のいづれでもないときは $\varphi_j^+$ ($\psi_j^+$) は0であるが、今、仮りにひとしいものがあったとして (A-25) の界に対応する $\psi_j^+(\Theta)$ ($\varphi_j^+(\Theta)$) が0でないとすると (4-4)(4-5) から

$$B^E \psi_j^+ = 0 \quad (A^H \varphi_j^+ = 0)$$

でなければならない。しかし上の理論から、これらに対応する $\varphi_j^+(\Theta)$ ($\psi_j^+(\Theta)$) は0である。しかしこれは最初の仮定 $\varphi_j^+$ ($\psi_j^+$) が存在することに反するから、仮定〝$\psi_j^+(\Theta)$, ($\varphi_j^+(\Theta)$) が0でない〟が誤まっている。即ち (A-25) のそれぞれに対応する $\psi_j^+(\Theta)$ ($\varphi_j^+(\Theta)$) は0である。このことから

$\{k_j^H\}$ で $\mathbb{D}^H=0$ から与えられる固有解は $\varphi^+(Q)=0$ となる $\varphi^+(Q)$ である。

$\{k_j^E\}$ で $\mathbb{C}^E=0$ から与えられる固有解は $\varphi^+(Q)=0$ となる $\varphi^+(Q)$ である。

と結論され，この逆は先に述べたように成立している。

以上より

$$\mathbb{A}^H\varphi_j^H=0,\ \mathbb{C}^E\varphi_j^E=0,\ \mathbb{B}^E\varphi_j^E=0,\ \mathbb{D}^H\varphi_j^H=0$$

となる固有解が内部の共振モードとなっていることがわかる。同様にして

$$\mathbb{A}^E\varphi_j'^E=0,\quad \mathbb{B}^H\varphi_j'^H=0$$

となる固有モードも存在する。これらに対応する $\varphi_j'^E, \varphi_j'^H$ は

$$\varphi_j'^E=\varphi_j^E,\quad \varphi_j'^H=\varphi_j^H$$

である。

もし内部問題として

$$\mathbb{A}^H\varphi=2\mathbb{C}^E\psi \tag{A-26}$$

を解く場合，まず $k$ が $\{k_j^E\}$ のとき $\varphi$ について容易に解けるが $\psi$ について解く場合，(2-8) より

$$\oint_\Gamma \psi_j^E\mathbb{A}^H\varphi\,d\sigma_Q=\oint_\Gamma\varphi\,\mathbb{B}^H\psi_j^E\,d\sigma_Q=0$$

でなければならない。さらにこれは

$$\mathbb{B}^H\psi_j^E=2\psi_j^E-\mathbb{B}^E\psi_j^E=2\psi_j^E \tag{A-27}$$

から

$$\oint_\Gamma \Phi \cdot \psi_j^E \, d\sigma_Q = 0 \qquad (A\text{-}28)$$

となる。即ち (A-26) を $\psi$ について解けるためには (A-28) が必要十分条件になる。次に $k$ が $\{k_j^H\}$ のとき $\psi$ について、そのまま解けるが、$\Phi$ について解けるためには

$$\mathbb{C}^E \psi_j'^H = \frac{1}{2}\mathbb{A}^E \Phi_j'^H = \Phi_j^H - \frac{1}{2}\mathbb{A}^H \Phi_j^H = \Phi_j^H$$

より、

$$\oint_\Gamma \psi_j'^H \mathbb{C}^E \psi \, d\sigma_Q = \oint_\Gamma \Phi_j^H \cdot \psi \, d\sigma_Q = 0 \qquad (A\text{-}29)$$

でなければならない。[15] 他方、外部領域の境界値問題として、

$$\mathbb{A}^E \Phi = 2\mathbb{C}^E \psi \qquad (A\text{-}30)$$

と解くとき、$\{k_j^H\}$ ならば問題はないが $k$ が $\{k_j^E\}$ のとき

$$\oint_\Gamma \psi_j^E \cdot \mathbb{A}^E \Phi \, d\sigma_Q = \oint_\Gamma \Phi \cdot \mathbb{B}^E \psi_j^E \, d\sigma_Q = 0$$

$$\oint_\Gamma \psi_j^E \cdot \mathbb{C}^E \psi \, d\sigma_Q = \oint_\Gamma \psi \cdot \mathbb{C}^E \psi_j^E \, d\sigma_Q = 0$$

がつねに成立するから (A-30) において $\Phi$ および $\psi$ について解くとき各々 $\psi$, $\Phi$ には何らの制限もなく解くことができる。同様に外部問題として

$$\mathbb{B}^H \psi = -2\mathbb{D}^H \Phi \qquad (A\text{-}31)$$

と解く場合も上と同様に何らの制限もなく解ける。また、内部問題として

$$\mathbb{B}^E \psi = -2\mathbb{D}^H \Phi$$

と $k$ が $\{k_j^E\}$ のとき $\psi$ について解けるには (A-28) と同じ制限が必要で、$k$ が $\{k_j^H\}$ のとき $\Phi$ について解くには $\psi$ に (A-29) の制限がいる。

これらのように外部問題を取り扱うときは，解は必ず存在するが，内部問題の場合，波源が，内部共振モードを励起する成分をもつと解が存在しない。即ち物理的にそのような現象がおこりえないことを示している。

---

＊

一般に、このように表現できるためには，内部の界と自由にかえる変数を外部の界に代表させるのであるから，これと結び付ける項が恒等的に0であってはならない。したがって

$$\Phi_1(A)=\oint_\Gamma f_1(Q)G(A,Q)\,d\sigma_Q \qquad A\in V_+ \qquad (B\text{-}1)$$

$$\Phi_2(A)=\oint_\Gamma f_2(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}G(A,Q)\,d\sigma_Q \qquad A\in V_+ \qquad (B\text{-}2)$$

が内部で恒等的に0となる $f_1, f_2$ が存在してはならない。もし仮りに $\Phi_1(A)$ および $\Phi_2(A)$ が内部で恒等的に0となると内部の界はないから，境界面上の内部による波源はない。したがって(B-1)(B-2)で表される $f_1(Q)$, $f_2(Q)$ は外部領域の波源である。(B-1)で表される内部解は0であるから，これに境界上で連続な外部解は(B-1)で表される。したがって

$$\Phi^-(Q)=0$$

となり、外向き射条件より外部領域における界は恒等的に0である。このことから $f_1(Q)$ は0である。他方(B-2)においても $f_2(Q)$ は外部量であるから $\frac{\partial}{\partial n}$ を考えると境界上で連続となり上と同様にして $f_2(Q)$ は0となる。以上のように外向き射条件をみたすグリーン関数を用いるかぎり(B-1)(B-2)が内部で恒等的に0となる $f_1, f_2$ は存在しない。しかし，仮りに $N_0(kr_{AB})$ を用いると外部の共振周波数（たとえば円筒波では $N_0(kR)=0$ あるいは $N_0'(kR)=0$ となる周波数）で上のことがいえなくなる。

参考文献


(1) 近藤次郎 "積分方程式とその応用"
(2) 竹内端三 "積分方程式論"
(3) 日高孝次 "積分方程式論"
(4) POGORZELSKI
"INTEGRAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS"
(5) MIKHLIN "LINEAR INTEGRAL EQUATIONS"
(6) MIKHLIN "MULTI DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL AND INTEGRAL EQUATIONS."
(7) T. CARLEMAN "SUR LES ÉQUATIONS INTEGRALES SINGULIÈRES A NOYAU RÉEL ET SYMÈTRIQUE."
(9) VARGA "MATRIX ITERATIVE ANALYSIS"
(10) FADDEEVA "COMPUTATIONAL METHODS OF LINEAR ALGEBRA"
(11) KK. MEI & J.GU. BLADEL
"SCATTERING BY PERFECTLY CONDUCTING RECTANGULAR CYLINDERS" IEEE TAP 1963
(12) W. HARRISON. D. TAYLOR. ETC
"ON DIGITAL COMPUTE SOLUTIONS OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST AND SECOND KIND OCCURRING IN ANTENNA THEORY" RADIO. SC. 1967. Vo 2
(13) HARRINGTON
"FIEDL COMPUTATION BY MOMENT METHODS"

(14) HARRINGTON "MATRIX METHODS FOR FIELD-PROBLEMS" IEEE VOL55 1967

(15) 安浦亀之助. 板倉徳也
"波動関数の近似法について(I)(II)(III)"
九大工学集報 第38 S.40.41,41

(16) 岡本尚直、藤沢和男
"相反定理を用いた電磁界境界値問題のマトリックス解法" 輻射研究会資料 1968.7月

輻射科学研究会資料

# 変形したファブリ・ペロー共振器

## (有孔鏡の場合と両鏡傾斜の場合)

吉田靖夫　小倉久直　池上淳一

(京都大学・　工学部)

1968年　9月27日

| | 誤 | 正 |
|---|---|---|
| P.5, (2·30) の右辺 | 印刷不鮮明 | $\left(\frac{w}{c}a\right)\frac{n'}{n}\frac{1-(-1)^n\cos\left(\chi\frac{L}{a}\right)}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2-\chi^2\right]\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2-\chi^2\right]}$ |
| P.5, 4～13行目の右 | 〃 | 4行目 近似計算が<br>5 〃 秋の範囲<br>6 〃 $L_{nn'}$, $M_{nn'}$<br>7 〃 代りに b を用い<br>9 〃 複素固波<br>10 〃 ごれを行う<br>12 〃 対角要素の<br>13 〃 基礎方程式 |
| P.5, (3·1) の左辺の右 | 〃 | $\begin{pmatrix} a_{n\ell} \\ -b_{n\ell} \end{pmatrix}$ |
| P.5, (3·2) 〃 | 〃 | $\begin{pmatrix} c_{n\ell} \\ -d_{n\ell} \end{pmatrix}$ |
| P.13, (5·13) の右辺 | $\left(\frac{wb}{c}\right)\frac{n'}{n}\frac{1-(-1)^n\cos\left(2\chi\frac{L}{b}\right)}{\left[\left(\frac{n\pi b}{L}\right)^2-\chi^2\right]\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2-\chi^2\right]}$ | $\frac{1}{2}\left(\frac{wb}{cc}\right)\frac{n'}{n}\frac{1-(-1)^n\cos\left(2\chi\frac{L}{b}\right)}{\left[\left(\frac{n\pi b}{L}\right)^2-\chi^2\right]\left[\left(\frac{n\pi b}{L}\right)^2-\chi^2\right]}$ |
| P.22 第2図および第3図 | ——— cos モード<br>– – – – sin モード | ——— sin モード<br>– – – – cos モード |

# 第1部 有孔鏡の場合

## 1 まえがき

レーザ共振器に用いられるファブリ・ペロー共振器においては透過鏡を通して出力をとり出すのが普通であるが、近年注目されている $CO_2$ レーザでは適当な透過鏡の製作が困難であることなどのために通常その出力を鏡の中心の小孔を通してとり出している。また受動的な共振器の励振方法としても鏡の小孔を通して波を入射させることが考えられる。ここでは鏡に孔を有する共振器の解析の第一歩として、時間とともに減衰する自由振動モードを求める。解析は以前我々が発表した孔のない鏡の場合[1]と同じ方法を用いるが、現在の場合は孔の部分は外部とつながっているのでこの部分について別に考慮しなければならない。なお、2枚の鏡の両方に孔のある場合と一方にのみ孔のある場合があるが、まず前者について詳述し後者については5節で簡単に述べる。また鏡の半径並びに孔の半径が無限に大きくなった極限の場合としての無限長矩形平行平板共振器について4節で述べる。

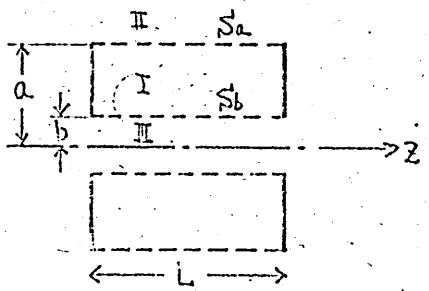
## 2. 基礎方程式

第1図の半径 $b$ の孔を有する2枚の平行平面鏡より構成される共振器を考える。ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \varphi(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varphi(x) = 0 \qquad (2.1)$$

2.

を満たすスカラー関数 $\varphi(x)$ の境界値問題として取扱う。($x$ は3次元座標を表わすものとする。) 完全反射の鏡の境界条件は



第1図

$$\varphi(x)=0\ ,\quad x;\text{鏡面上} \tag{2.2}$$

とする。(2.2)と外部無限遠方において輻射条件を満足する(2.1)の解を求めることが以下の問題である。

共振器の内,外部ともに真空であるが、共振器を含む領域を第1図のように共振器の開口面 $S_a$ および $S_b$ を境界として I, II, III の3つの領域に分ける。I, II, III の各領域で界は次のように表わせる。

$$\text{I}:\quad \varphi_{\text{I}}(x)=\int_{S_a}\left[G(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial G(x|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]dS$$
$$-\int_{S_b}\left[G(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial G(x|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]dS \tag{2.3}$$

$$\text{II}:\quad \varphi_{\text{II}}(x)=-\int_{S_a}\left[H(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial H(x|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]dS \tag{2.4}$$

$$\text{III}:\quad \varphi_{\text{III}}(x)=\int_{S_b}\left[H(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial H(x|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]dS \tag{2.5}$$

但し II と III の領域間の界の結合を無視し,鏡の裏面の $\partial\varphi/\partial z$ を無視した。ここで $G(x|x')$ は鏡面上で零なる境界条件

$$G(x|x')=0\ ,\qquad z,z'=0,L \tag{2.6}$$

を満たすグリーン関数で,$H(x|x')$ は自由空間のグリーン関数である。

I, II, III の領域の界を $S_a$, $S_b$ 上でなめらかに接続する。

すなわち界の値とその法線微係数を接続する。$r=a$ の $S_a$ 上においては

$$\varphi_I(a-0) = \varphi_{II}(a+0) \tag{2·7}$$

$$\frac{\partial\varphi_I(a-0)}{\partial r} = \frac{\partial\varphi_{II}(a+0)}{\partial r} \tag{2·8}$$

とし，また $r=b$ の $S_b$ 上においては次式のようにする。

$$\varphi_I(b+0) = \varphi_{II}(b-0) \tag{2·9}$$

$$\frac{\partial\varphi_I(b+0)}{\partial r} = \frac{\partial\varphi_{II}(b-0)}{\partial r} \tag{2·10}$$

ここで面 $S_a$ と $S_b$ 上で界とその法線微係数を次のように完全直交系で展開する。

$S_a$ 上での展開：

$$[\varphi]_{r=a} = \sum_{n,l,\pm} b_{nl}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos l\theta\\ \sin l\theta\end{Bmatrix} \tag{2·11}$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_{r=a} = \frac{1}{a}\sum_{n,l,\pm} a_{nl}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos l\theta\\ \sin l\theta\end{Bmatrix} \tag{2·12}$$

$S_b$ 上での展開：

$$[\varphi]_{r=b} = \sum_{n,l,\pm} d_{nl}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos l\theta\\ \sin l\theta\end{Bmatrix} \tag{2·13}$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_{r=b} = \frac{1}{b}\sum_{n,l,\pm} c_{nl}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos l\theta\\ \sin l\theta\end{Bmatrix} \tag{2·14}$$

但し $+,-$ はそれぞれ cos, sin に対応する。グリーン関数として円筒座標系の

$$G(x|x') = \frac{i}{2L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon_l J_l\left(\Lambda_n\frac{r}{a}\right)H_l^{(1)}\left(\Lambda_n\frac{r'}{a}\right)\cos l(\theta-\theta')$$

$$(r'>r,\quad 0\leqq z, z'\leqq L) \tag{2·15}$$

$$H(x|x') = \frac{i}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon_l\cos l(\theta-\theta')\int_0^{\infty}J_l\left(\sqrt{(\omega/c)^2-k^2}\cdot r\right)H_l^{(1)}\left(\sqrt{(\omega/c)^2-k^2}\cdot r'\right)\cos k(z-z')\,dk$$

$$(r'>r) \tag{2·16}$$

（$r'<r$ の場合は (2·15) と (2·16) で $r$ と $r'$ を入換える。）

を用いて，また (2·11) ～ (2·14) の展開を用いて (2·7) ～ (2·10) を次の連立方程式に書きかえる。

$$J_l(\Lambda_n)H_l(\Lambda_n)\,a_{nl} - \Lambda_n J_l(\Lambda_n)H_l'(\Lambda_n)\,b_{nl}$$
$$-J_l(\bar{\Lambda}_n)H_l(\Lambda_n)\,c_{nl} + \bar{\Lambda}_n J_l'(\Lambda_n)H_l(\Lambda_n)\,d_{nl}$$
$$+8N\sum_{n'}\left\{K_{nn'}\,a_{n'l} - L_{nn'}\,b_{n'l}\right\} = 0 \tag{2·17}$$

$$\Lambda_n J_\ell'(\Lambda_n) H_\ell(\Lambda_n) a_{n\ell} - \Lambda_n^2 J_\ell'(\Lambda_n) H_\ell'(\Lambda_n) b_{n\ell}$$
$$- \Lambda_n J_\ell(\bar{\Lambda}_n) H_\ell'(\Lambda_n) c_{n\ell} + \Lambda_n \bar{\Lambda}_n J_\ell'(\Lambda_n) H_\ell'(\Lambda_n) d_{n\ell}$$
$$+ 8N \sum_{n'} \{ M_{nn'} a_{n'\ell} - N_{nn'} b_{n'\ell} \} = 0 \qquad (2\cdot18)$$

$$- J_\ell(\bar{\Lambda}_n) H_\ell(\Lambda_n) a_{n\ell} + \Lambda_n J_\ell(\bar{\Lambda}_n) H_\ell'(\Lambda_n) b_{n\ell}$$
$$+ J_\ell(\bar{\Lambda}_n) H_\ell(\bar{\Lambda}_n) c_{n\ell} - \bar{\Lambda}_n J_\ell'(\bar{\Lambda}_n) H_\ell(\bar{\Lambda}_n) d_{n\ell}$$
$$+ 8\bar{N} \sum_{n'} \{ \bar{K}_{nn'} c_{n'\ell} - \bar{M}_{nn'} d_{n'\ell} \} = 0 \qquad (2\cdot19)$$

$$- \bar{\Lambda}_n J_\ell'(\bar{\Lambda}_n) H_\ell(\Lambda_n) a_{n\ell} + \Lambda_n \bar{\Lambda}_n J_\ell'(\bar{\Lambda}_n) H_\ell'(\Lambda_n) b_{n\ell}$$
$$+ \bar{\Lambda}_n J_\ell(\bar{\Lambda}_n) H_\ell'(\bar{\Lambda}_n) c_{n\ell} - \bar{\Lambda}_n^2 J_\ell'(\bar{\Lambda}_n) H_\ell'(\bar{\Lambda}_n) d_{n\ell}$$
$$+ 8\bar{N} \sum_{n'} \{ \bar{L}_{nn'} c_{n'\ell} - \bar{N}_{nn'} d_{n'\ell} \} = 0 \qquad (2\cdot20)$$

ここで $\cos\ell\theta$ と $\sin\ell\theta$ に関しては分離して同じ方程式が成立するので添字 $\ell$ を省略した。正式は $\ell$ についても分離している。$J_\ell(\Lambda_n)$ はベッセル関数であり，$H_\ell(\Lambda_n)$ は第1種ハンケル関数 $H_\ell^{(1)}(\Lambda_n)$ を略記したものである。$\Lambda_n$, $\bar{\Lambda}_n$ は

$$\Lambda_n^2 \equiv \left(\frac{\omega}{c} a\right)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \qquad (2\cdot21)$$

$$\bar{\Lambda}_n^2 \equiv \left(\frac{\omega}{c} b\right)^2 - \left(\frac{n\pi b}{L}\right)^2 = \Lambda_n^2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \qquad (2\cdot22)$$

で与えられ，$N$, $\bar{N}$ は鏡および孔のフレネル数で，$\lambda$ を波長として

$$N \equiv \frac{a^2}{L\lambda}, \qquad (2\cdot23)$$

$$\bar{N} \equiv \frac{b^2}{L\lambda} \qquad (2\cdot24)$$

である。$K_{nn'}$, $L_{nn'}$, $M_{nn'}$, $N_{nn'}$ は下記の積分で定義される。

$$K_{nn'} \equiv \int_0^\infty H_\ell(\Lambda) J_\ell(\Lambda) I_{nn'}(\chi)\, d\chi \qquad (2\cdot25)$$

$$L_{nn'} \equiv \int_0^\infty \Lambda H_\ell(\Lambda) J_\ell'(\Lambda) I_{nn'}(\chi)\, d\chi \qquad (2\cdot26)$$

$$M_{nn'} \equiv \int_0^\infty \Lambda H_\ell'(\Lambda) J_\ell(\Lambda) I_{nn'}(\chi)\, d\chi \qquad (2\cdot27)$$

$$N_{nn'} \equiv \int_0^\infty \Lambda^2 H_l'(\Lambda) J_l'(\Lambda) I_{nn'}(\chi)\, d\chi \qquad (2.28)$$

但し、 $$\Lambda^2 \equiv \left(\frac{\omega}{c}a\right)^2 - \chi^2 \qquad (2.29)$$

$$I_{nn'}(\chi) \equiv \left(\frac{\omega}{c}a\right)\cdot\frac{n'}{n}\cdot\frac{1-(-1)^n\cos\left(\chi\frac{L}{a}\right)}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2-\chi^2\right]\left[\left(\frac{n'\pi a}{L}\right)^2-\chi^2\right]} \qquad (2.30)$$

$\lambda \ll L$ と仮定すると (2.25)〜(2.28) の積分は近似計算ができて、$\Lambda_n$ とフレネル数の関数となる[1]。又この近似の範囲では円筒関数の次数 $l$ には依存しない。$\overline{K_{nn'}}$, $\overline{L_{nn'}}$, $\overline{M_{nn'}}$, $\overline{N_{nn'}}$ はそれぞれ (2.25)〜(2.28) で $a$ の代りに $b$ を用いたものである。

(2.17)〜(2.20) の連立斉次方程式を解いて特殊周波数 $\omega$ を求めるのが当面の問題である。次節でこれを行う。

## 3 近似解法

$K_{nn'}$ $(n \neq n')$ 等の非対角要素の値は $K_{nn}$ 等の対角要素の値に比して十分小さいから、(2.17)〜(2.20) の基礎方程式において $n' \neq n$ なる $n'$ を無視する。(2.17) と (2.18) は

$$\begin{pmatrix} J_l(\Lambda_n)H_l(\Lambda_n)+8NK_{nn} & \Lambda_n J_l(\Lambda_n)H_l'(\Lambda_n)+8NL_{nn} \\ \Lambda_n J_l'(\Lambda_n)H_l(\Lambda_n)+8NM_{nn} & \Lambda_n^2 J_l'(\Lambda_n)H_l'(\Lambda_n)+8NN_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{nl} \\ -d_{nl} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_l(\overline{\Lambda_n})H_l(\Lambda_n) & \overline{\Lambda_n} J_l'(\overline{\Lambda_n})H_l(\Lambda_n) \\ \Lambda_n J_l(\overline{\Lambda_n})H_l'(\Lambda_n) & \Lambda_n\overline{\Lambda_n} J_l'(\overline{\Lambda_n})H_l'(\Lambda_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{nl} \\ -d_{nl} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

となり、(2.17) と (2.20) は

$$\begin{pmatrix} J_l(\overline{\Lambda_n})H_l(\overline{\Lambda_n})+8\overline{N}\,\overline{K_{nn}} & \overline{\Lambda_n} J_l'(\overline{\Lambda_n})H_l(\overline{\Lambda_n})+8\overline{N}\,\overline{M_{nn}} \\ \overline{\Lambda_n} J_l(\overline{\Lambda_n})H_l'(\overline{\Lambda_n})+8\overline{N}\,\overline{L_{nn}} & \overline{\Lambda_n}^2 J_l'(\overline{\Lambda_n})H_l'(\overline{\Lambda_n})+8\overline{N}\,\overline{N_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{nl} \\ -d_{nl} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_l(\overline{\Lambda_n})H_l(\Lambda_n) & \Lambda_n J_l(\overline{\Lambda_n})H_l'(\Lambda_n) \\ \overline{\Lambda_n} J_l'(\overline{\Lambda_n})H_l(\Lambda_n) & -\Lambda_n\overline{\Lambda_n} J_l'(\overline{\Lambda_n})H_l'(\Lambda_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{nl} \\ -b_{nl} \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

となる。

(3·2) より $\begin{pmatrix} c_{n\ell} \\ -d_{n\ell} \end{pmatrix}$ を解いて (3·1) の右辺に入れると次の式を得る。

$$\begin{pmatrix} J_\ell(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n)+\delta N K_{nn} & \lambda_n J_\ell(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n)+\delta N L_{nn} \\ \lambda_n J_\ell'(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n)+\delta N M_{nn} & \lambda_n^2 J_\ell'(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n)+\delta N N_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n\ell} \\ -b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\Gamma}{\Delta}\begin{pmatrix} \{H_\ell(\lambda_n)\}^2 & \lambda_n H_\ell(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n) \\ \lambda_n H_\ell(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n) & \{\lambda_n H_\ell'(\lambda_n)\}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n\ell} \\ -b_{n\ell} \end{pmatrix} \qquad (3·3)$$

但し

$$\Gamma \equiv \delta N\left[\{J_\ell(\bar\lambda_n)\}^2 \bar N_{nn} - \bar\lambda_n J_\ell(\bar\lambda_n)J_\ell'(\bar\lambda_n)\{\bar L_{nn}+\bar M_{nn}\} + \{\bar\lambda_n J_\ell'(\bar\lambda_n)\}^2 \bar K_{nn}\right] \qquad (3·4)$$

$\Delta$ は (3·2) の左辺の行列の行列式で

$$\Delta = (\delta N)^2(K_{nn}N_{nn}-M_{nn}L_{nn}) + \delta N\left[J_\ell(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n)N_{nn} + \lambda_n J_\ell'(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n)L_{nn} - \lambda_n J_\ell(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n)M_{nn} + \lambda_n^2 J_\ell'(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n)K_{nn}\right] \qquad (3·5)$$

である。(3·3) を解くと

$$\frac{a_1}{\mu} = \frac{\Gamma}{\Delta} \qquad (3·6)$$

但し、

$$\mu \equiv \delta N\left[\{H_\ell(\lambda_n)\}^2 N_{nn} - \lambda_n H_\ell(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n)\{L_{nn}+M_{nn}\} + \{\lambda_n H_\ell'(\lambda_n)\}^2 K_{nn}\right] \qquad (3·7)$$

$\Delta$ は (3·3) の左辺の行列の行列式で

$$\Delta = (\delta N)^2(K_{nn}N_{nn}-M_{nn}L_{nn}) + \delta N\left[J_\ell(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n)N_{nn} - \lambda_n J_\ell'(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n)L_{nn} - \lambda_n J_\ell(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n)M_{nn} + \lambda_n^2 J_\ell'(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n)K_{nn}\right] \qquad (3·8)$$

である。(3·6) は $N, \bar N \gg 1$ 程度 のとき

$$\frac{\Delta}{\mu} \cong \left[J_\ell(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n) + (1-\lambda)\varepsilon_n\right]\cdot\frac{1}{\{H_\ell(\lambda_n)\}^2} \qquad (3·9)$$

$$\frac{\Gamma}{\bar\mu} \cong \left[J_\ell(\bar\lambda_n)H_\ell(\bar\lambda_n) + (1-\lambda)\bar\varepsilon_n\right]\cdot\frac{1}{\{J_\ell(\bar\lambda_n)\}^2} \qquad (3·10)$$

となることを用いて次式となる。

$$J_\ell(\bar{\Lambda}_n) H_\ell(\Lambda_n)\left[J_\ell(\Lambda_n) H_\ell(\bar{\Lambda}_n) - J_\ell(\bar{\Lambda}_n) H_\ell(\Lambda_n)\right]$$
$$+ (1-i)\varepsilon\left[\bar{\alpha} J_\ell(\Lambda_n) H_\ell(\Lambda_n) + \alpha J_\ell(\Lambda_n) H_\ell(\bar{\Lambda}_n)\right] = 0 \qquad (3\cdot11)$$

但し
$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi}\right) \cong 0.367 \qquad (3\cdot12)$$

$$\alpha^2 \equiv \frac{1}{4\pi N} \qquad (3\cdot13)$$

$$\bar{\alpha}^2 \equiv \frac{1}{4\pi \bar{N}} = \alpha^2\left(\frac{a}{b}\right)^2 \qquad (3\cdot14)$$

(3·11) の第2項は 第1項に比し $\alpha$ に関して 1次 higher order である。(3·11) の 第1項 $=0$ は 同軸線のモードである。簡単化のため $\Lambda_n$ の添字 $n$ を省略して，第1項$=0$ を解いた解を $\Lambda_0$ と記す。すなわち

$$J_\ell(\Lambda_0) H_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda_0\right) - J_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda_0\right) H_\ell(\Lambda_0) = 0 \qquad (3\cdot15)$$

(3·11) の第2項を 摂正項とみなして そこでは $\Lambda$ の代りに $\Lambda_0$ を用いると (3·11) は 次の形となる。

$$\left[J_\ell(\Lambda) H_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda\right) - J_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda\right) H_\ell(\Lambda)\right]$$
$$+ (1-i)\varepsilon\alpha\left[\frac{a}{b}\frac{J_\ell(\Lambda_0)}{J_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda_0\right)} + \frac{J_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda_0\right)}{J_\ell(\Lambda_0)}\right] = 0 \qquad (3\cdot16)$$

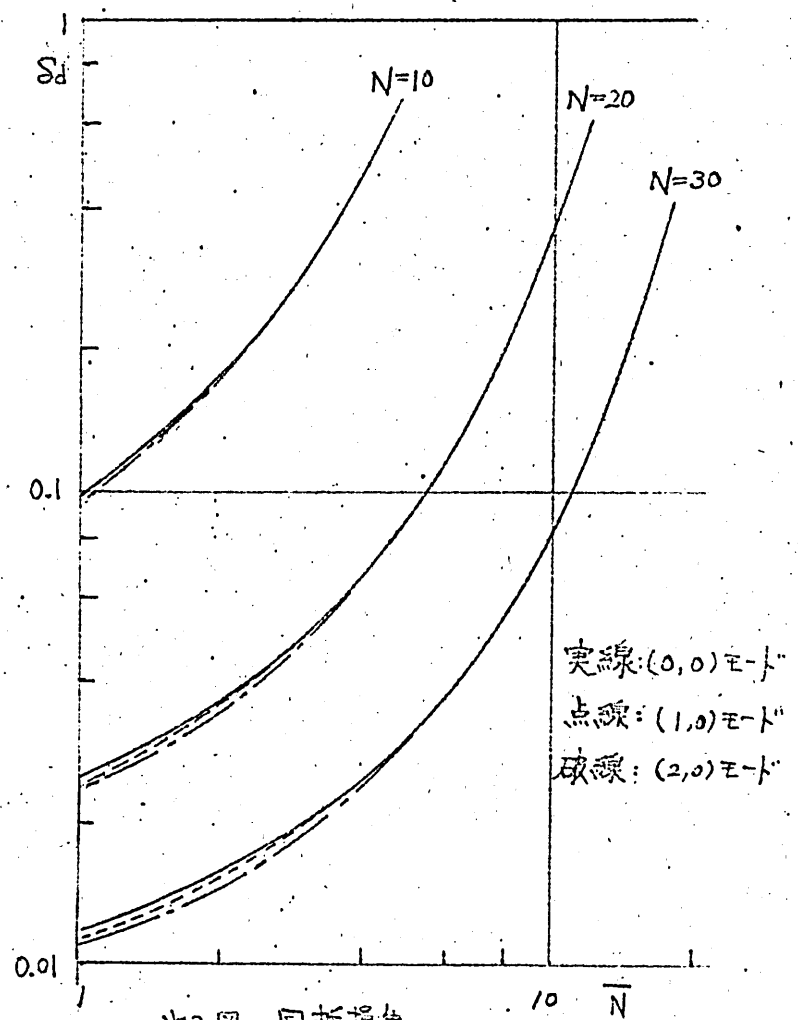
ここで
$$\frac{d}{d\Lambda}\left[J_\ell(\Lambda) H_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda\right) - J_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda\right) H_\ell(\Lambda)\right]_{\Lambda=\Lambda_0} = \frac{2i}{\pi\Lambda_0}\left(R - \frac{1}{R}\right), \qquad (3\cdot17)$$

但し
$$R \equiv \frac{J_\ell(\Lambda_0)}{J_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda_0\right)} \qquad (3\cdot18)$$

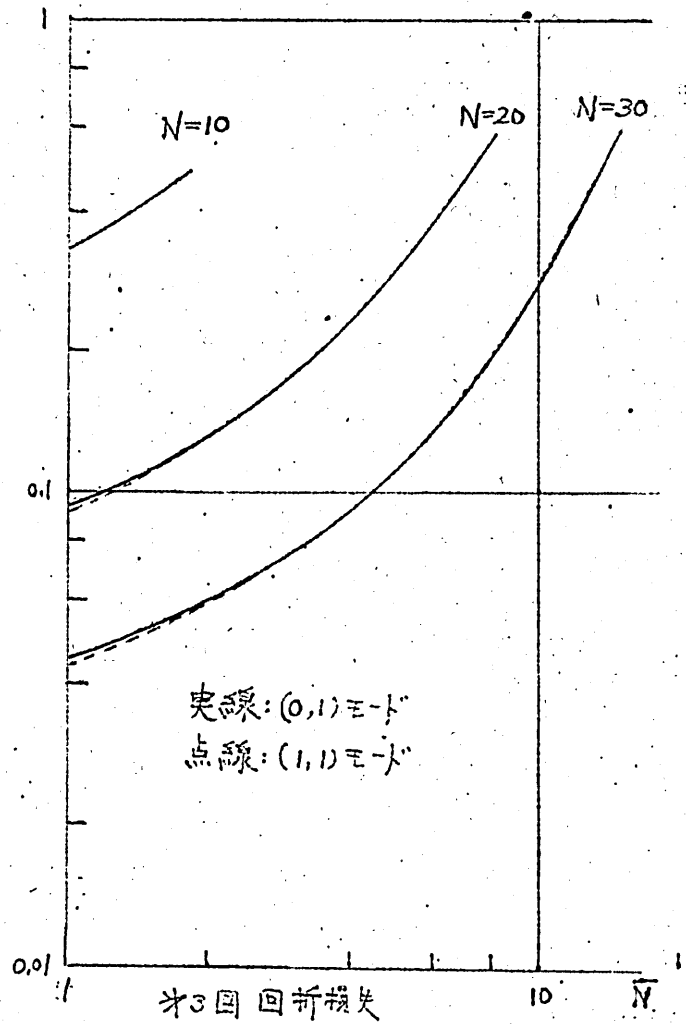
であることを用いると，求める解は

$$\Lambda \cong \Lambda_0\left[1 - \frac{(1+i)\varepsilon\pi\alpha}{2}\cdot\frac{1+\frac{a}{b}R^2}{1-R^2}\right] \qquad (3\cdot19)$$

で与えられる。(2·19) より $w$ が求まり，その虚数部より transit の回折損失が求まる。鏡のフレネル数をパラメータとして，孔の




第2図 回折損失




第3図 回折損失

フレネル数の変化に対する transit loss の変化の例を第2,3図に示す。この図より、モード番号 $(\ell, m)$ の $m$ の同じモードは殆んど損失が同じになっているのが判る。鏡の中心の振巾が零でない $\ell=0$ のモードの損失が孔のない鏡に比べて著しく増加してこのような結果になっている。

次に共振器内部の界分布を求める。(2·3)に(2·11)～(2·19)を用いて、($\ell$, $\pm$に関しては分離している。)

$$\varphi(x) = \frac{\lambda\pi}{2} \sum_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \begin{Bmatrix} \cos\ell\theta \\ \sin\ell\theta \end{Bmatrix} \times \left[ J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right)\left\{H_\ell(\Lambda_n)\, a_{n\ell} - \Lambda_n H_\ell'(\Lambda_n)\, b_{n\ell}\right\} - H_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right)\left\{J_\ell(\bar{\Lambda}_n)\, c_{n\ell} - \bar{\Lambda}_n J_\ell'(\bar{\Lambda}_n)\, d_{n\ell}\right\}\right] \tag{3·20}$$

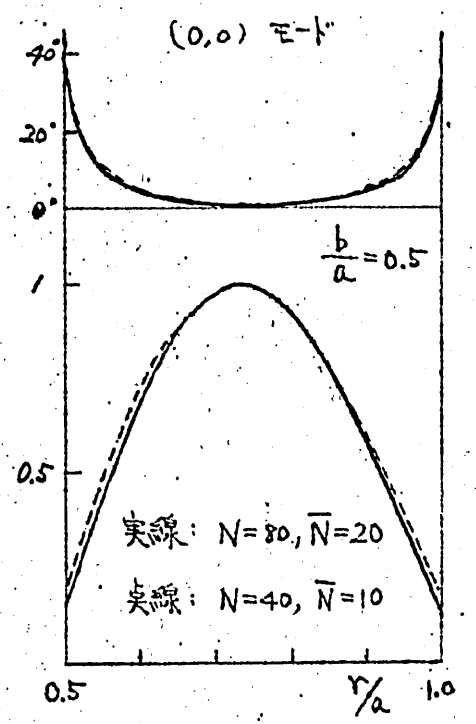
となる。(3·1), (3·2)で行なったように $n$ を一項のみで近似する。(3·2)により $c_{n\ell}$, $d_{n\ell}$ を消去すると(3·20)の[ ]内の第2項は

$$\left\{J_\ell(\bar{\Lambda}_n)\, c_{n\ell} - \bar{\Lambda}_n J_\ell'(\bar{\Lambda}_n)\, d_{n\ell}\right\} = \frac{\bar{\mu}}{\Delta}\left\{H_\ell(\Lambda_n)\, a_{n\ell} - \Lambda_n H_\ell'(\Lambda_n)\, b_{n\ell}\right\} \tag{3·21}$$

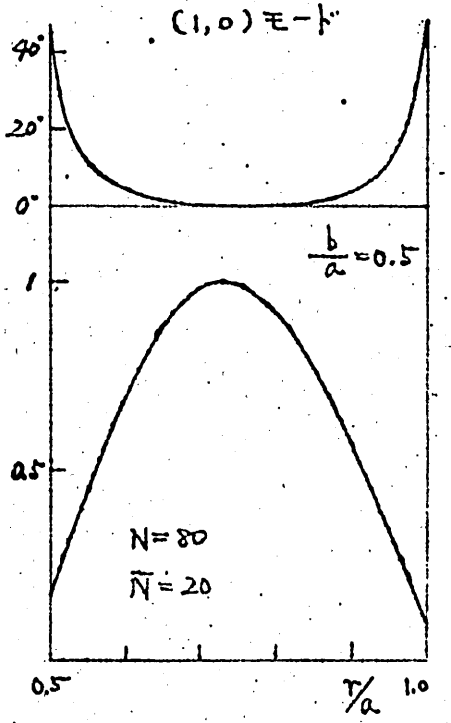
となるから(3·20)の $r$ 方向の界分布は

$$\varphi(x) \propto J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) - \frac{\bar{\mu}}{\Delta} H_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \propto \left[H_\ell(\bar{\Lambda}_n) + \frac{(1-\lambda)\,\varepsilon\,\bar{\alpha}}{J_\ell(\bar{\Lambda}_n)}\right] J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) - J_\ell(\bar{\Lambda}_n)\, H_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \tag{3·22}$$

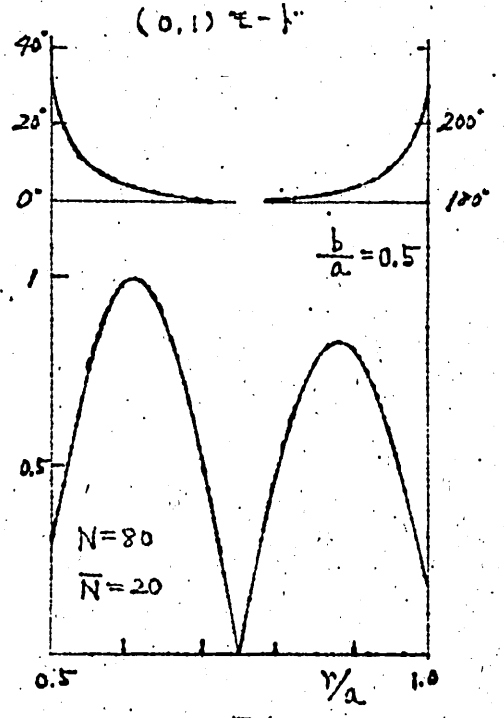
界分布の例を第4,5,6図に示す。$(\ell, m)$ モードの振巾の極大値は $(m+1)$ 個ある。$r$ 方向には $(0,0)$ モードと $(1,0)$ モードの界分布の差は殆んどない。$n$ を一項のみで計算したので界分布にリップルが生じていない。フレネル数が増すほど鏡の端の界分布は零に近ずく。




第4図 界分布




第5図 界分布




第6図 界分布

## 4 無限長矩形平行平板共振器

鏡の半径 $a$ と孔の半径 $b$ の差を一定に保ったまま $a,b\to\infty$ とすると strip 型の鏡となる。このときの $\Lambda_n$ を求めるために (3·16) を解く。円筒関数は漸近形を使う。(3·16) の第1項 $=0$ を解くと

$$\Lambda_0=\frac{a m\pi}{a-b} \tag{4·1}$$

となる。この解は $l$ に依存しない。(3·18) の $R$ は

$$R\equiv\frac{J_l(\Lambda_0)}{J_l(\frac{b}{a}\Lambda_0)}=\frac{H_l(\Lambda_0)}{H_l(\frac{b}{a}\Lambda_0)}=(-1)^m \tag{4·2}$$

となるから (3·19) は

$$\Lambda=\frac{a m\pi}{a-b}\left[1-(1+i)\varepsilon\pi\cdot\frac{a\alpha}{a-b}\right] \tag{4·3}$$

と explicit に書ける。

損失の小さい時 one transit loss $\delta_d$ は

$$\delta_d\cong-\frac{2L}{c}\,\mathrm{Im}(\omega) \tag{4·4}$$

であるから (2·21) より

$$\delta_d\cong 45.7\,m^2(4\pi^2N)^{-3/2} \tag{4·5}$$

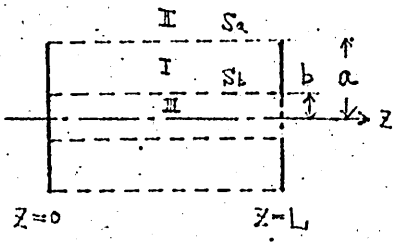
となり フレネル数の大きい場合の Vainshtein[2] の結果と 1/100 程度の差で一致している。但しこのときのフレネル数は

$$N\equiv\frac{(a-b)^2}{L\lambda} \tag{4·6}$$

で定義されるものである。

## 5 一方の鏡にのみ孔のある場合

$z=0$ の位置にある鏡には孔がなく，$z=L$ の鏡には半径 $b$ の孔があるものとする。2節に比し I, II の領域は同じであるが II の領域が



$z=0$ の鏡に遮られているところが異なる。したがって I, II の領域の界は 2節と同じ式 (2·3) と (2·4) を用いるが，III の領域の界は 孔のない鏡上で零となる境界条件

$$K(x|x')=0 \quad ; \quad z, z'=0 \qquad (5\cdot1)$$

を満たすグリーン関数 $K(x|x')$ を使って

$$\varphi_{III}(x)=\int_{S_b}\left[K(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial K(x|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]dS \qquad (5\cdot2)$$

と表わす。以下 2節と同じように境界 $S_a$ と $S_b$ で界をなめらかに接続する。$K(x|x')$ を自由空間のグリーン関数 $H(x|x')$ を使って鏡像の方法により

$$K(r,\theta,z|r',\theta',z')=H(r,\theta,z|r',\theta',z')-H(r,\theta,z|r',\theta',-z') \qquad (5\cdot3)$$

と表わす。(2·11)〜(2·14) の展開を用いると，境界面上での なめらかな接続は 次の4式となる。

$$\begin{aligned}&J_\ell(\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)a_{n\ell}-\Lambda_n J_\ell(\Lambda_n)H_\ell'(\Lambda_n)b_{n\ell}\\&-J_\ell(\bar\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)c_{n\ell}+\bar\Lambda_n J_\ell'(\bar\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)d_{n\ell}\\&+8N\sum_{n'}'\left\{K_{nn'}(N)a_{n'\ell}-L_{nn'}(N)b_{n'\ell}\right\}=0\end{aligned} \qquad (5\cdot4)$$

$$\begin{aligned}&\Lambda_n J_\ell'(\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)a_{n\ell}-\Lambda_n^2 J_\ell'(\Lambda_n)H_\ell'(\Lambda_n)b_{n\ell}\\&-\Lambda_n J_\ell(\bar\Lambda_n)H_\ell'(\Lambda_n)c_{n\ell}-\Lambda_n\bar\Lambda_n J_\ell'(\bar\Lambda_n)H_\ell'(\Lambda_n)d_{n\ell}\\&+8N\sum_{n'}'\left\{M_{nn'}(N)a_{n'\ell}-N_{nn'}(N)b_{n'\ell}\right\}=0\end{aligned} \qquad (5\cdot5)$$

$$\begin{aligned}&-J_\ell(\bar\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)a_{n\ell}+\Lambda_n J_\ell(\bar\Lambda_n)H_\ell'(\Lambda_n)b_{n\ell}\\&+J_\ell(\bar\Lambda_n)H_\ell(\bar\Lambda_n)c_{n\ell}-\bar\Lambda_n J_\ell'(\bar\Lambda_n)H_\ell(\bar\Lambda_n)d_{n\ell}\\&+8\bar N\sum_{n'}'\left\{P_{nn'}(\bar N)c_{n'\ell}-Q_{nn'}(\bar N)d_{n'\ell}\right\}=0\end{aligned} \qquad (5\cdot6)$$

$$\begin{aligned}&-\bar\Lambda_n J_\ell'(\bar\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)a_{n\ell}+\Lambda_n\bar\Lambda_n J_\ell'(\bar\Lambda_n)H_\ell'(\Lambda_n)b_{n\ell}\\&+\bar\Lambda_n J_\ell(\bar\Lambda_n)H_\ell'(\bar\Lambda_n)c_{n\ell}-\bar\Lambda_n^2 J_\ell'(\bar\Lambda_n)H_\ell'(\bar\Lambda_n)d_{n\ell}\\&+8\bar N\sum_{n'}'\left\{R_{nn'}(\bar N)c_{n'\ell}-S_{nn'}(\bar N)d_{n'\ell}\right\}=0\end{aligned} \qquad (5\cdot7)$$

$K_{nn'}(N)$, $L_{nn'}(N)$, $M_{nn'}(N)$, $N_{nn'}(N)$ は (2·25)〜(2·28) で定義

された ものであるが，ここでは フレネル 数の 関数であることを 明示した．ここで $P_{nn'}(\bar{N})$, $Q_{nn'}(\bar{N})$, $R_{nn'}(\bar{N})$, $S_{nn'}(\bar{N})$ は次式で定義されるもので

$$P_{nn'}(\bar{N}) \equiv \int_0^\infty H_\ell(\bar{\lambda}) J_\ell(\bar{\lambda}) F_{nn'}(\chi)\, d\chi \qquad (5\cdot 8)$$

$$Q_{nn'}(\bar{N}) \equiv \int_0^\infty \bar{\lambda} H_\ell'(\bar{\lambda}) J_\ell(\bar{\lambda}) F_{nn'}(\chi)\, d\chi \qquad (5\cdot 9)$$

$$R_{nn'}(\bar{N}) \equiv \int_0^\infty \bar{\lambda} H_\ell(\bar{\lambda}) J_\ell'(\bar{\lambda}) F_{nn'}(\chi)\, d\chi \qquad (5\cdot 10)$$

$$S_{nn'}(\bar{N}) \equiv \int_0^\infty \bar{\lambda}^2 H_\ell'(\bar{\lambda}) J_\ell'(\bar{\lambda}) F_{nn'}(\chi)\, d\chi \qquad (5\cdot 11)$$

但し，
$$\bar{\lambda}_n^2 \equiv \left(\frac{wb}{c}\right)^2 - \chi^2 \qquad (5\cdot 12)$$

$$F_{nn'}(\chi) \equiv \left(\frac{wb}{c}\right) \frac{n'}{n} \frac{1-(-1)^n \cos\left(2\chi \frac{L}{b}\right)}{\left[\left(\frac{n\pi b}{L}\right)^2 - \chi^2\right]\left[\left(\frac{n'\pi a}{L}\right)^2 - \chi^2\right]} \qquad (5\cdot 13)$$

これらは $K_{nn'}(\bar{N})$ 等と次の関係がある．

$$P_{nn'}(\bar{N}) = \frac{1}{2} K_{nn'}\left(\frac{1}{2}\bar{N}\right) \qquad (5\cdot 14)$$

$$Q_{nn'}(\bar{N}) = \frac{1}{2} L_{nn'}\left(\frac{1}{2}\bar{N}\right) \qquad (5\cdot 15)$$

$$R_{nn'}(\bar{N}) = \frac{1}{2} M_{nn'}\left(\frac{1}{2}\bar{N}\right) \qquad (5\cdot 16)$$

$$S_{nn'}(\bar{N}) = \frac{1}{2} N_{nn'}\left(\frac{1}{2}\bar{N}\right) \qquad (5\cdot 17)$$

3節と同様 $n$ を一項のみで近似すると (5·4)～(5·7) を次の行列形で書き表せる．

$$\begin{pmatrix} J_\ell(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n) + 8N K_{nn}(N) & \lambda_n J_\ell(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n) + 8N L_{nn}(N) \\ \lambda_n J_\ell'(\lambda_n)H_\ell(\lambda_n) + 8N M_{nn}(N) & \lambda_n^2 J_\ell'(\lambda_n)H_\ell'(\lambda_n) + 8N N_{nn}(N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n\ell} \\ -b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_\ell(\bar{\lambda}_n)H_\ell(\lambda_n) & \bar{\lambda}_n J_\ell'(\bar{\lambda}_n)H_\ell(\lambda_n) \\ \lambda_n J_\ell(\bar{\lambda}_n)H_\ell'(\lambda_n) & \lambda_n \bar{\lambda}_n J_\ell'(\bar{\lambda}_n)H_\ell(\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n\ell} \\ -d_{n\ell} \end{pmatrix} \qquad (5\cdot 18)$$

$$\begin{pmatrix} J_\ell(\bar{\Lambda}_m)H_\ell(\bar{\Lambda}_m)+4\bar{N}K_{mn}(\frac{1}{2}\bar{N}) & \bar{\Lambda}_n J_\ell'(\bar{\Lambda}_m)H_\ell(\bar{\Lambda}_m)+4\bar{N}M_{mn}(\frac{1}{2}\bar{N}) \\ \bar{\Lambda}_m J_\ell(\bar{\Lambda}_m)H_\ell'(\bar{\Lambda}_m)+4\bar{N}L_{mn}(\frac{1}{2}\bar{N}) & \bar{\Lambda}_n\bar{\Lambda}_m J_\ell'(\bar{\Lambda}_m)H_\ell'(\bar{\Lambda}_m)+4\bar{N}N_{mn}(\frac{1}{2}\bar{N}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{n\ell} \\ -d_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} J_\ell(\bar{\Lambda}_n)H_\ell(\Lambda_n) & \Lambda_n J_\ell(\bar{\Lambda}_n)H_\ell'(\Lambda_n) \\ \bar{\Lambda}_n J_\ell'(\bar{\Lambda}_n)H_\ell(\Lambda_n) & \Lambda_n\bar{\Lambda}_n J_\ell'(\bar{\Lambda}_n)H_\ell'(\Lambda_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n\ell} \\ -b_{n\ell} \end{pmatrix} \qquad (5\cdot19)$$

両鏡に孔のある場合に比べて 上式は 孔の半径 $b$ が変化しないで 孔のフレネル数 $\bar{N}$ の値が $\frac{1}{2}$ になっている。つまり一方の鏡に孔がないため III の領域では鏡間距離が実質的に2倍になっていることを意味している。(5·18) と (5·19) を3節と同様に解くと (3·19) に対応する結果は次式で与えられる。

$$\Lambda \cong \Lambda_0\left[1-\frac{(1+\lambda)\varepsilon^2\alpha}{2}\cdot\frac{1+\frac{\sqrt{2}a}{b}R}{1-R^2}\right] \qquad (5\cdot20)$$

但し、$\Lambda_0$ は

$$J_\ell(\Lambda_0)H_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda_0\right)-J_\ell\left(\frac{b}{a}\Lambda_0\right)H_\ell(\Lambda_0)=0 \qquad (5\cdot21)$$

を満たすものである。(5·20) は 両有孔鏡をもつ共振器の (3·19) と比べると $\Lambda_0$ の値は等しいが (5·20) の [ ] 内の $\frac{a}{b}R$ が $\sqrt{2}$ 倍されているだけ損失が増えることになる。

## 文献


1) H. Ogura et. al ; J. Phys. Soc. Japan 22 (1967) 1434
池上他；輻研資料 1966.5

2) L. A. Vainshtein : Soviet-Physics - JETP 17 (1963) 709.

# 第2部 両鏡傾斜の場合

## 1 まえがき

以前に我々はファブリ・ペロー共振器の片方の鏡が傾斜変形した場合に回折損失が傾斜変形に対してどのように増加するかを解析した。[1] 今回はそれを発展させて両方の鏡が異なる軸の周りに傾斜変形したより一般的な場合について報告する。

第1部同様共振器内外部の界をなめらかにつないで境界面で直交関数系で展開して連立方程式を得る。変形のため角量子数 $\ell$ の異なるモード間に結合が生じる。また cos モードと sin モード間にも一般に結合が生じる。片鏡傾斜の場合はモード軸と鏡の最大傾斜線の方向を一致させることによって cos モードと sin モードを分離できたが，今回の両鏡傾斜においては cos モードと sin モードが分離するためにはモード軸を両鏡の最大傾斜線の方向および傾斜角に対して適当に選ばなければならない。cos モードと sin モードを分離すれば以前の解析と同様にして回折損失を求めることができる。傾斜変形が十分小さい場合片鏡傾斜の回折損失において傾斜パラメータを両鏡傾斜に対して適当に定義された傾斜パラメータにおきかえたものとなる。

## 2 基礎方程式

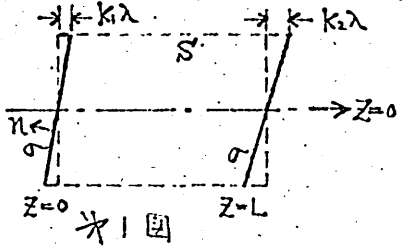
$z=0$ の位置にあった鏡が傾斜して

$$z(r,\theta) = k_1 \frac{\lambda}{a} r \cos(\theta - \varphi_1) \tag{2.1}$$

だけ変形し，$z=L$ の鏡は傾斜して

$$z(r,\theta) = L + k_2 \frac{\lambda}{a} r \cos(\theta - \varphi_2) \tag{2.2}$$

だけ変形したものとする．$K_1$, $K_2$ は鏡の最大変形距離の波長 $\lambda$ に対する比で，これらを傾斜パラメータと呼ぶことにする．$\varphi_1$, $\varphi_2$ は鏡の最大傾斜線の方向を示す．



第1図

第1図には $\varphi_1=\varphi_2=0$ のときの x-z 断面の共振器を示す．

共振器外部の界は第1部と同様自由空間のグリーン関数 $H(x|x')$ を用いて

$$\varphi(x)=-\int_S\left[H(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial H(x|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]ds \qquad (2\cdot3)$$

と表わす．変形した鏡面 σ 上で界が境界条件

$$\varphi(x)=0 \quad , \quad x:\sigma\text{上} \qquad (2\cdot4)$$

を満たすことから，第1部の $z=0, L$ で零となるグリーン関数 $G(x|x')$ を用いて，内部の界は次式で与えられる．

$$\varphi(x)=\int_\sigma G(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial n}d\sigma+\int_S\left[G(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial G(x|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]ds \qquad (2\cdot5)$$

境界面 S 上で (2·4), (2·5) の界とその法線微係数を等置して，S 上での次の展開

$$\left[\varphi(x)\right]_{r=a}=\sum_{n,l,\pm}b_{nl}^{\pm}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos l\theta\\ \sin l\theta\end{Bmatrix} \qquad (2\cdot6)$$

$$\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial r}\right]_{r=a}=\frac{1}{a}\sum_{n,l,\pm}a_{nl}^{\pm}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos l\theta\\ \sin l\theta\end{Bmatrix} \qquad (2\cdot7)$$

を用いると（+, − はそれぞれ $\cos l\theta$, $\sin l\theta$ に対応させる．）

$$2\varepsilon_l N H_l(\Lambda_n)\psi_{nl}^{\pm}+J_l(\Lambda_n)H_l(\Lambda_n)a_{nl}^{\pm}-\Lambda_n J_l(\Lambda_n)H_l'(\Lambda_n)b_{nl}^{\pm}$$
$$+8N\sum_{n'}\left\{K_{nn'}a_{n'l}^{\pm}-L_{nn'}b_{n'l}^{\pm}\right\}=0 \qquad (2\cdot8)$$

$$2\varepsilon_l N\Lambda_n H_l'(\Lambda_n)\psi_{nl}^{\pm}+\Lambda_n J_l'(\Lambda_n)H_l(\Lambda_n)a_{nl}^{\pm}-\Lambda_n^2 J_l'(\Lambda_n)H_l'(\Lambda_n)b_{nl}^{\pm}$$
$$+8N\sum_{n'}\left\{M_{nn'}a_{n'l}^{\pm}-N_{nn'}b_{n'l}^{\pm}\right\}=0 \qquad (2\cdot9)$$

(2·8), (2·9) は 第1部の (2·17), (2·18) に対応するもので 同じ記号を用いている。但し

$$\psi_{n\ell}^{\pm} \equiv \frac{1}{n\pi}\frac{L}{a^2}\int_\sigma u_{n\ell}^{\pm}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma d\sigma \qquad (2\cdot10)$$

$$u_{n\ell}^{\pm} \equiv J_\ell(\lambda_n \frac{r}{a})\ \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos\ell(\theta-\psi)\\ \sin\ell(\theta-\psi)\end{Bmatrix} \qquad (2\cdot11)$$

である。$\psi$ はモード軸と座標軸のなす角で後に適当に定める。

(2·5) の $X$ を $\sigma$ 上にとると

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma = \int_\sigma \frac{\partial G(\sigma|X')}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right]_\sigma d\sigma + \frac{i\pi}{2}\sum_{n,\ell,\pm}\left\{H_\ell(\lambda_n)a_{n\ell}^{\pm} - \lambda_n H_\ell'(\lambda_n)b_{n\ell}^{\pm}\right\}\left[\frac{\partial u_{n\ell}^{\pm}}{\partial n}\right]_\sigma \qquad (2\cdot12)$$

となる。(2·8), (2·9), (2·12) より $[\partial\varphi/\partial n]_\sigma$, $\{a_{n\ell}^{\pm}\}$, $\{b_{n\ell}^{\pm}\}$ を求めればよい。

変形は波長に比して十分小さいとして逐次近似法で解く。アルキメデス数は適当に大きいとして $n$ は一項のみ考える。今考えているモードの角変数に対するモード番号を $k$ として、一般のモードのそれを $\ell$ とする。$a_{n\ell}^{\pm}, b_{n\ell}^{\pm}$ は変形の 0 次の微小量、$a_{nk}^{\pm}, b_{nk}^{\pm}$ は 1 次の微小量と考えられる。(2·12) で 第1項は一次の微小量、第2項は 0 次+1 次であるから、第1項の $[\partial\varphi/\partial n]_\sigma$ に第2項における 0 次の項 ($a_{nk}^{\pm}, b_{nk}^{\pm}$) を代入して (2·12) の右辺を $a_{nk}^{\pm}, b_{nk}^{\pm}$ で表わすと

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma = \frac{i\pi}{2}\sum_{\pm}\left\{H_k(\lambda)a_k^{\pm} - \lambda H_k'(\lambda)b_k^{\pm}\right\}\left[\frac{\partial u_k^{\pm}}{\partial n}\right]_\sigma + \frac{i\pi}{2}\sum_{\ell\neq k,\pm}\left\{H_k(\lambda)a_k^{\pm} - \lambda H_k'(\lambda)b_k^{\pm}\right\}\left[\frac{\partial u_k^{\pm}}{\partial n}\right]_\sigma + \frac{i\pi}{2}\sum_{\pm}\left\{H_\ell(\lambda)a_\ell^{\pm} - \lambda H_\ell'(\lambda)b_\ell^{\pm}\right\}\int_\sigma \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n}\left[\frac{\partial u_\ell^{\pm}}{\partial n'}\right]_\sigma d\sigma \qquad (2\cdot13)$$

ここで $a_{n\ell}^{\pm}, b_{n\ell}^{\pm}, \Lambda_n$ の添字れを省略した。

最大傾斜線と座標系の関係を $\varphi_1 = -\varphi_2 \equiv \varphi$ となるように選ぶ。(2·13) を (2·10) に代入して、変形パラメータ $K_1, K_2$ について2次までをとりあげると $k = l \pm 1$ を考慮すればよく次式となる。

$$\psi_l^{\pm} = \frac{L}{n\pi}\cdot\frac{1}{a^2}\int_\sigma u_l^{\pm}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma d\sigma$$

$$= -i\pi^2\sum_{k=l\pm1}\Big[\big(K_1 D_{1lk}^{\pm+} - K_2 D_{2lk}^{\pm+}\big)\{H_k(\Lambda)a_k^{+} - \Lambda H_k'(\Lambda)b_k^{+}\}$$
$$+\big(K_1 D_{1lk}^{\pm-} - K_2 D_{2lk}^{\pm-}\big)\{H_k(\Lambda)a_k^{-} - \Lambda H_k'(\Lambda)b_k^{-}\}\Big]$$
$$-2\pi^4 N\Big[\{K_1^2\Delta_{11ll}^{\pm+} - K_1K_2(\Delta_{12ll}^{\pm+}+\Delta_{21ll}^{\pm+}) + K_2^2\Delta_{22ll}^{\pm+}\}\{H_l(N)a_l^{+} - \Lambda H_l'(N)b_l^{+}\}$$
$$+\{K_1^2\Delta_{11ll}^{\pm-} - K_1K_2(\Delta_{12ll}^{\pm-}+\Delta_{21ll}^{\pm-}) + K_2^2\Delta_{22ll}^{\pm-}\}\{H_l(N)a_l^{-} - \Lambda H_l'(N)b_l^{-}\}\Big] \quad (2\cdot14)$$

$$\psi_k^{\pm} = \frac{L}{n\pi}\cdot\frac{1}{a^2}\int_\sigma u_k^{\pm}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma d\sigma$$

$$= -i\pi^2\Big[\big(K_1 D_{1kl}^{\pm+} - K_2 D_{2kl}^{\pm+}\big)\{H_l(\Lambda)a_l^{+} - \Lambda H_l'(\Lambda)b_l^{+}\}$$
$$+\big(K_1 D_{1kl}^{\pm-} - K_2 D_{2kl}^{\pm-}\big)\{H_l(\Lambda)a_l^{-} - \Lambda H_l'(\Lambda)b_l^{-}\}\Big], \quad k = l\pm1, \quad (2\cdot15)$$

ここで

$$\int_{\sigma_i} u_k^{\pm}\frac{\partial u_{k'}^{\pm}}{\partial n}d\sigma \sim \int_{\sigma_i}\frac{\partial u_k^{\pm}}{\partial n}u_{k'}^{\pm}d\sigma \sim -\frac{2n\pi^2 k a^2}{L}D_{ikk'}^{\pm\pm} \quad (2\cdot16)$$

$$\int_{\sigma_i} u_k^{\pm}(\sigma)\int_{\sigma_j}\frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n}\frac{\partial u_{k'}^{\pm}(\sigma')}{\partial n'}d\sigma' d\sigma \sim i\,\frac{2\pi^2 k^2 a^4}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\Delta_{ijkk'}^{\pm\pm} \quad (2\cdot17)$$

を以前の計算[1]にならって求めたのを用いた。$i,j = 1,2$ で $\sigma_1, \sigma_2$ はそれぞれの鏡に対応する。ここで $D_{ikk'}^{\pm\pm}$, $\Delta_{ijkk'}^{\pm\pm}$ は

$$D_{ikk'}^{\pm\pm} \equiv \theta_{kk'}^{\pm\pm}(\varphi_i)\,I_{kk'}(\Lambda) \quad (2\cdot18)$$

$$\Delta_{ijkk'}^{\pm\pm} \equiv \sum_{k''}\varepsilon_{k''}\Big[\theta_{kk''}^{\pm+}(\varphi_i)\theta_{k''k'}^{+\pm}(\varphi_j) + \theta_{kk''}^{\pm-}(\varphi_i)\theta_{k''k'}^{-\pm}(\varphi_j)\Big]I_{kk''k'}(\Lambda) \quad (2\cdot19)$$

但し、

$$I_{kk'}(\Lambda) \equiv \int_0^1 J_k(\Lambda x)J_{k'}(\Lambda x)x^2dx \quad (2\cdot20)$$

$$I_{kk''k'}(\Lambda) \equiv \int_0^1\int_0^1 J_k(\Lambda x)\begin{Bmatrix}J_{k''}(\Lambda x)H_{k''}(\Lambda x')\\ H_{k''}(\Lambda x)J_{k''}(\Lambda x')\end{Bmatrix}_{x'>x}^{x<x'} J_{k'}(\Lambda x')x^2dx\,x'^2dx' \quad (2\cdot21)$$

$$\Theta^{\pm\pm}_{kk'}(\varphi)=\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\cos k(\theta-\psi)\\ \sin k(\theta-\psi)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos k'(\theta-\psi)\\ \sin k'(\theta-\psi)\end{Bmatrix}\cos(\theta-\varphi)\,d\theta \qquad (2\cdot22)$$

(2·8), (2·9) に (2·14), (2·15) を代入して異なるnの結合を無視すると

$$\begin{pmatrix}A_l & B_l & 0 & 0\\ C_l & D_l & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_l & B_l\\ 0 & 0 & C_l & D_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_l^+\\ -b_l^+\\ a_l^-\\ -b_l^-\end{pmatrix}=\sum_{k=l,l\pm1}\begin{pmatrix}E^{++}_{lk} & F^{++}_{lk} & E^{+-}_{lk} & F^{+-}_{lk}\\ G^{++}_{lk} & H^{++}_{lk} & G^{+-}_{lk} & H^{+-}_{lk}\\ E^{-+}_{lk} & F^{-+}_{lk} & E^{--}_{lk} & F^{--}_{lk}\\ G^{-+}_{lk} & H^{-+}_{lk} & G^{--}_{lk} & H^{--}_{lk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_k^+\\ -b_k^+\\ a_k^-\\ -b_k^-\end{pmatrix} \qquad (2\cdot23)$$

$$\begin{pmatrix}A_k & B_k & 0 & 0\\ C_k & D_k & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_k & B_k\\ 0 & 0 & C_k & D_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_k^+\\ -b_k^+\\ a_k^-\\ -b_k^-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E^{++}_{kl} & F^{++}_{kl} & E^{+-}_{kl} & F^{+-}_{kl}\\ G^{++}_{kl} & H^{++}_{kl} & G^{+-}_{kl} & H^{+-}_{kl}\\ E^{-+}_{kl} & F^{-+}_{kl} & E^{--}_{kl} & F^{--}_{kl}\\ G^{-+}_{kl} & H^{-+}_{kl} & G^{--}_{kl} & H^{--}_{kl}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_l^+\\ -b_l^+\\ a_l^-\\ -b_l^-\end{pmatrix},\quad k=l\pm1 \qquad (2\cdot24)$$

なる行列形に書ける。但し

$$\begin{pmatrix}A_k & B_k\\ C_k & D_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_k(N)H_k(N)+8N\cdot K_{mn} & \Lambda J_k(N)H'_k(N)+8N\cdot L_{mn}\\ \Lambda J'_k(N)H_k(N)+8N\cdot M_{mn} & \Lambda^2 J'_k(N)H'_k(N)+8N\cdot N_{mn}\end{pmatrix}$$
$$k=l,\ l\pm1, \qquad (2\cdot25)$$

$$\begin{pmatrix}E^{\pm\pm}_{ll} & F^{\pm\pm}_{ll}\\ G^{\pm\pm}_{ll} & H^{\pm\pm}_{ll}\end{pmatrix}=4\pi^4N^2\varepsilon_l\left\{K_1^2\Delta_{11}{}^{\pm\pm}_{ll}-K_1K_2(\Delta_{12}{}^{\pm\pm}_{ll}+\Delta_{21}{}^{\pm\pm}_{ll})+K_2^2\Delta_{22}{}^{\pm\pm}_{ll}\right\}$$
$$\times\begin{pmatrix}\{H_l(\Lambda)\}^2 & \Lambda H_l(\Lambda)H'_l(\Lambda)\\ \Lambda H_l(\Lambda)H'_l(\Lambda) & \{\Lambda H'_l(\Lambda)\}^2\end{pmatrix} \qquad (2\cdot26)$$

$$\begin{pmatrix}E^{\pm\pm}_{lk} & F^{\pm\pm}_{lk}\\ G^{\pm\pm}_{lk} & H^{\pm\pm}_{lk}\end{pmatrix}=i2\pi^2N\varepsilon_l\left(K_1D_{1}{}^{\pm\pm}_{lk}-K_2D_{2}{}^{\pm\pm}_{lk}\right)$$
$$\times\begin{pmatrix}H_l(\Lambda)H_k(\Lambda) & \Lambda H_l(\Lambda)H'_k(\Lambda)\\ \Lambda H'_l(\Lambda)H_k(\Lambda) & \Lambda^2H'_l(\Lambda)H'_k(\Lambda)\end{pmatrix},\quad k=l\pm1 \qquad (2\cdot27)$$

$\begin{pmatrix}E^{\pm\pm}_{kl} & F^{\pm\pm}_{kl}\\ G^{\pm\pm}_{kl} & H^{\pm\pm}_{kl}\end{pmatrix}$, $k=l\pm1$ は上式で $\pm_k$ と $\pm_l$ を入換えたもの

である。これらの詳しい形は付録2に示す。

(2·23), (2·24) は cos モードと sin モードを分離できれば 2×2

行列形に簡単化される。このためには +,− の両符号を有する行列要素 $E_{22}^{+-}, E_{\ell\ell}^{+-}$ etc が消えればよい。付録2によってこれらの要素は $K_1\sin(\varphi-\psi)+K_2\sin(\varphi+\psi)$ または $K_1^2\sin 2(\varphi-\psi)+2K_1K_2\sin 2\psi-K_2^2\sin 2(\varphi+\psi)$ の因子を有する。この両式を同時に零とするような、モード軸と座標軸のなす角 $\psi$ を決定できればよい。ところで前1式を零とする $\psi$ は

$$\tan\psi=\frac{K_1+K_2}{K_1-K_2}\times\tan\varphi \tag{2·28}$$

で与えられるがこれが上の第2式を零にすることは容易に確められる。

$$K^2\equiv K_1^2-2K_1K_2\cos 2\varphi+K_2^2 \tag{2·29}$$

を定義して，(2·28) の $\psi$ を用いると付録2の残りの要素に含まれている因子は

$$K_1^2\cos 2(\varphi-\psi)-2K_1K_2\cos 2\psi+K_2^2\cos 2(\varphi+\psi)=K^2 \tag{2·30}$$

$$K_1\cos(\varphi-\psi)-K_2\cos(\varphi+\psi)=K \tag{2·31}$$

と書き換えられて変形パラメータ $K_1, K_2$ はすべて新しい変形パラメータ $K$ のなかに含まれて単独では表われない。

(2·28) のように $\psi$ を選ぶと (2·23), (2·24) は cosモードと sinモードが分離して ((2·23), (2·24) の右辺がその左辺のように非対角要素が消えて)

$$\begin{pmatrix}A_\ell & B_\ell\\ C_\ell & D_\ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_\ell\\ -b_\ell\end{pmatrix}=\sum_{k=\ell,\ell\pm1}\begin{pmatrix}E_{\ell k} & F_{\ell k}\\ G_{\ell k} & H_{\ell k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_k\\ -b_k\end{pmatrix} \tag{2·32}$$

$$\begin{pmatrix}A_k & B_k\\ C_k & D_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_k\\ -b_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{k\ell} & F_{k\ell}\\ G_{k\ell} & H_{k\ell}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_\ell\\ -b_\ell\end{pmatrix},\quad k=\ell\pm1 \tag{2·33}$$

となる。上式は cosモードと sinモードに対して形式的に同じ式が成立するので $E_{\ell k}^{++}$, $a_k^+$ etc. の添字 +,− を省略した。ここで $E_{\ell k}^{++}$ etc と $E_{\ell k}^{--}$ etc の値が $\ell=0,1$ に対しては異なることに注意すべきである。$\ell=0$ に対して sinモードは存在しないが $\ell=1$ に対しては cos, sin 両モードが存在して上の理由のため両モードで損失が異なる。

以下 (2·33) を (2·32) に代入して，$a_\ell, -b_\ell$ の係数のつくる行列式を零とおいて $\Lambda$ したがって周波数 $\omega$ を求めるのであるが，この計算は文献1の一方の鏡のみ傾斜した場合とまったく同様に行えるので結果のみを示す。異なるのは

ただ変形パラメータが (2.29) で定義された K に変っていることである。最終結果の 1 transit 当りの回折損失は

$$\delta_d = A_{\ell m} N^{-\frac{3}{2}} + B_{\ell m} K^2 N^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.34)$$

の形になる。第2項が傾斜による付加損失である。$A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$ の低次モードの値を下表に示す。$\ell = 1$ では cos モードの方が sin モードより損失が大きい。

最後に (2.29) で定義される K が 2つの傾斜鏡の一方を基準にしたときの他方の傾斜パラメータであること および (2.28) で与えられる $\psi$ が 2つの傾斜鏡間の最大傾斜線の方向を与えるものであることを付け加えておく。

第2,3図に傾斜パラメータに対する損失の例を示す。

文献

1) H. Ogura et al; J. Phys. Soc. Japan 22 (1967) 1434
池上他; 輸研資料 1966,5

$A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$ の数値

| m \ ℓ | | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $A_{\ell m}$ | 0.301 | 0.764 | 1.37 | 2.12 |
| | $B_{\ell m}$ | 4.16 | 3.17, 5.99 | 7.39 | 9.88 |
| 1 | $A_{\ell m}$ | 1.59 | 2.56 | 3.67 | 4.76 |
| | $B_{\ell m}$ | 0.830 | 0.956, 1.79 | 2.70 | 4.15 |
| 2 | $A_{\ell m}$ | 3.70 | 5.27 | 7.02 | 8.86 |
| | $B_{\ell m}$ | 0.351 | 0.478, 0.861 | 1.41 | 2.31 |

$\ell = 1$ のモードの $B_{\ell m}$ は 左が sin モード, 右が cos モードである。

1
N=10
δd
cos モード
sin モード
10⁻¹
(1,1)
(0,1)
(1,0)
(0,0)モード
10⁻²
10⁻²
10⁻¹
K

第2図


10⁻¹
N=30
δd
cos モード
sin モード
(1,1)
10⁻²
(0,1)
(1,0)
(0,0) モード
10⁻³
10⁻³
10⁻²
K

第3図

付録 1.

$$\theta^{++}_{RR'}(\varphi) = \frac{\pi}{2}\cos(\varphi-\psi)\left\{\delta_{R-R',1}+\delta_{R-R',-1}+\delta_{R+R',1}\right\}$$

$$\theta^{--}_{RR'}(\varphi) = \frac{\pi}{2}\cos(\varphi-\psi)\left\{\delta_{R-R',1}+\delta_{R-R',-1}-\delta_{R+R',1}\right\}$$

$$\theta^{-+}_{RR'}(\varphi) = \frac{\pi}{2}\sin(\varphi-\psi)\left\{\delta_{R-R',1}-\delta_{R-R',-1}+\delta_{R+R',1}\right\}$$

$$\theta^{+-}_{RR'}(\varphi) = \frac{\pi}{2}\sin(\varphi-\psi)\left\{-\delta_{R-R',1}+\delta_{R-R',-1}+\delta_{R+R',1}\right\}$$

$\delta_{R,R'}$ は クロネッカーの記号である。

付録 2.

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}^{++}_{ll} = \pi^6 N^2 \varepsilon_l \Big\{ \varepsilon_{l-1} I_{l,l-1,l}(\Lambda)\Big[(1+\delta_{l1})K^2 + 2\delta_{l1}\left\{k_1^2\cos 2(\varphi-\psi) - 2k_1k_2\cos 2\psi + k_2^2\cos 2(\varphi+\psi)\right\}\Big] + \varepsilon_{l+1} I_{l,l+1,l}(\Lambda)\cdot(1+\delta_{l0})^2K^2\Big\} \times \begin{pmatrix} \{H_l(\Lambda)\}^2 & \Lambda H_l(\Lambda)H_l'(\Lambda) \\ \Lambda H_l(\Lambda)H_l'(\Lambda) & \{\Lambda H_l'(\Lambda)\}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}^{--}_{ll} = \pi^6 N^2 \varepsilon_l \Big\{ \varepsilon_{l-1} I_{l,l-1,l}(\Lambda)\Big[(1+\delta_{l1})K^2 - 2\delta_{l1}\left\{k_1^2\cos 2(\varphi-\psi) - 2k_1k_2\cos 2\psi + k_2^2\cos 2(\varphi+\psi)\right\}\Big] + \varepsilon_{l+1} I_{l,l+1,l}(\Lambda)\cdot(1-\delta_{l0})K^2\Big\} \times \begin{pmatrix} \{H_l(\Lambda)\}^2 & \Lambda H_l(\Lambda)H_l'(\Lambda) \\ \Lambda H_l(\Lambda)H_l'(\Lambda) & \{\Lambda H_l'(\Lambda)\}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}^{+-}_{ll} = 2\pi^6 N^2 \varepsilon_l \varepsilon_{l-1} I_{l,l-1,l}(\Lambda)\,\delta_{l1}\left[k_1^2\sin 2(\varphi-\psi) + 2k_1k_2\sin 2\psi - k_2^2\sin 2(\varphi+\psi)\right] \times \begin{pmatrix} \{H_l(\Lambda)\}^2 & \Lambda H_l(\Lambda)H_l'(\Lambda) \\ \Lambda H_l(\Lambda)H_l'(\Lambda) & \{\Lambda H_l'(\Lambda)\}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}^{-+}_{ll} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}^{+-}_{ll}$$

ここで以下の簡単化のため次の行列を定義しておく。

$$[A] \equiv \begin{pmatrix} H_\ell(N) H_k(N) & N H_\ell(N) H_k'(N) \\ N H_\ell'(N) H_k(N) & N^2 H_\ell'(N) H_k'(N) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{++}_{\ell\,\ell-1} = i\pi^3 N \varepsilon_\ell (1+\delta_{\ell 1}) \left\{ K_1 \cos(\varphi-\psi) - K_2 \cos(\varphi+\psi) \right\} \cdot I_{\ell,\ell-1}(N)\,[A]$$

$$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{++}_{\ell.\ell+1} = i\pi^3 N \varepsilon_\ell (1+\delta_{\ell 0}) \left\{ K_1 \cos(\varphi-\psi) - K_2 \cos(\varphi+\psi) \right\} I_{\ell,\ell+1}(N)\,[A]$$

$$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{--}_{\ell\,\ell-1} = i\pi^3 N \varepsilon_\ell (1-\delta_{\ell 1}) \left\{ K_1 \cos(\varphi-\psi) - K_2 \cos(\varphi+\psi) \right\} I_{\ell\,\ell-1}(N)\,[A]$$

$$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{--}_{\ell\,\ell+1} = i\pi^3 N \varepsilon_\ell (1-\delta_{\ell 0}) \left\{ K_1 \cos(\varphi-\psi) - K_2 \cos(\varphi+\psi) \right\} I_{\ell\,\ell+1}(N)\,[A]$$

$$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{+-}_{\ell\,\ell-1} = i\pi^3 N \varepsilon_\ell (-1+\delta_{\ell 1}) \left\{ K_1 \sin(\varphi-\psi) + K_2 \sin(\varphi+\psi) \right\} I_{\ell\,\ell-1}(N)\,[A]$$

$$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{+-}_{\ell\,\ell+1} = i\pi^3 N \varepsilon_\ell (1+\delta_{\ell 0}) \left\{ K_1 \sin(\varphi-\psi) + K_2 \sin(\varphi+\psi) \right\} I_{\ell\,\ell+1}(N)\,[A]$$

$$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{-+}_{\ell\,\ell-1} = i\pi^3 N \varepsilon_\ell (1+\delta_{\ell 1}) \left\{ K_1 \sin(\varphi-\psi) + K_2 \sin(\varphi+\psi) \right\} I_{\ell\,\ell-1}(N)\,[A]$$

$$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{-+}_{\ell\,\ell+1} = i\pi^3 N \varepsilon_\ell (-1+\delta_{\ell 0}) \left\{ K_1 \sin(\varphi-\psi) + K_2 \sin(\varphi+\psi) \right\} I_{\ell\,\ell+1}(N)\,[A]$$

$\begin{pmatrix} EF \\ GH \end{pmatrix}^{\pm\pm}_{k\,\ell}$ は上式で $\pm_k$ と $\pm_\ell$ を入換えたものに等しい。

なおこの付録之の（ ）の外側の添字は本来行列要素に付くべき添字を略記したものである。

輻射科学研究会資料

# 振子法によるレーダ側方散乱断面積の測定

松尾　優　　弓場芳治
山根国義　　重藤武昭

（京都工芸繊維大学　工芸学部）

1968年9月27日

# あ ら ま し

送信機と受信機を分離したbistatic radarの研究に欠くことのできない目標物の側方散乱断面積の一測定法を提案した。本測定法は被測定目標物を糸で吊して振子運動させ，散乱波を位相変調することによって受信検出した変調信号成分が目標物の側方散乱断面積に比例することを利用したものである。この測定法は背景反射波の多い室内ででも行なうことができる特長がある。測定の原理および振動振幅の許容範囲や周囲反射波の影響等について論じ，測定法の信頼度を確かめるために，理論計算の可能な金属球について実験を行ない，ほぼ満足すべき結果を得た。

## 1. ま え が き

送，受信機を同一場所に配置した通常のmonostatic radarやこれに関連する目標物の後方散乱断面積については数多くの理論的，実験的研究がなされている[1]。送，受信機を充分な距離を距てて配置したbistatic radarについては，monostatic radarの場合と当然探知可能範囲も異なり，又目標物についても，その側方散乱断面積（bistatic RCS）を知る必要がある。目標物の側方散乱断面積は，後方散乱断面積と同様に，限られた形状，材質の目標物を除いては，一般に理論的にその断面積を計算することは困難で，多くは近似計算，又は実測によって求めなければならない。殊に側方散乱断面積に関する測定例は極めて少なく，その測定法も未だ確立されていない。

従来の研究から[2,3]，波長に較べて寸法の大きい表面の滑らかな目標物の側

方散乱断面積は散乱角（到来送信波と散乱受信波とのなす角）が１８０°に近ずくにつれて急激に増大することが知られている(図８～11参照)。散乱角が180°のときの散乱断面積を前方散乱断面積*（forward RCS）といい，これに関する理論的実験的研究は比較的活発に行なわれている。

本報告で提案する側方散乱断面積の測定法は，被測定目標物を振子運動させ，送信機から目標物を経て受信機に至る間の電波の通路長に時間的変化を与えることにより散乱波を位相変調し，この受信々号強度がその目標物の側方散乱断面積に比例することを利用したものである。また受信波の中から目標物の運動による変調信号成分のみを分離検出することができるので，背景雑反射波の多い室内でも測定が可能であるという特長がある。

本測定法の精度を確かめるために，数種の大きさの金属球について実験を行ない，理論計算値と比較しかなり満足すべき結果を得た。

## 2. 測 定 原 理

### 2－1　目標物の振子運動と散乱受信波

送信機から目標物を経て受信機に至る電波の通路長に時間的変化を与えるためには，目標物を連続運動させればよい。ここでは最も簡単な場合として，目標物が図１に示すように，散乱角$\theta$の２等分線上を，振動振巾$\delta$，振動角周波数pなる正弦波単振動（$x=\delta \sin pt$）をするものとする。なお送，受信機は目標物の振動の中心から等距離$R_0$に置くものとする。

---

* 波長に比べて寸法が充分大きい目標物の前方散乱断面積$\sigma_f$は，その目標物の投影面積をAとすれば $\sigma_f=\frac{4\pi A^2}{\lambda^2}$ で与えられる。一方ka（k：波長定数，a：球の半径）の充分大きな金属球の後方散乱断面積$\sigma_m$はその球の幾何学的断面積$\pi a^2$に等しいから，金属球の場合の$\sigma_f$と$\sigma_m$との比は $\frac{\sigma_f}{\sigma_m}=\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2$ となる。

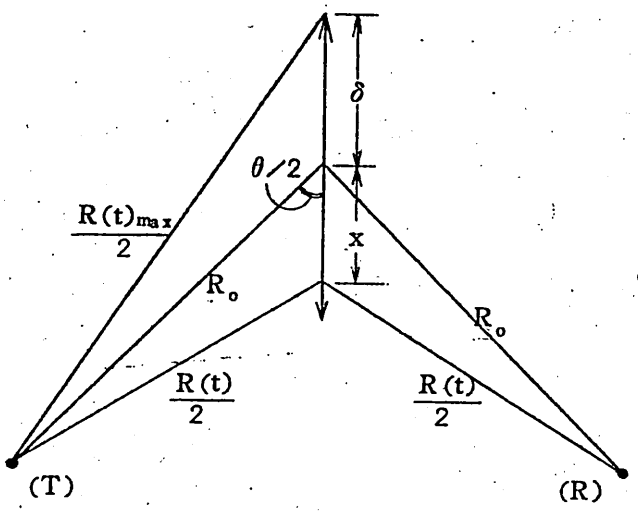



図 1.　目標物の振子運動と電波の通路長

送信機から目標物を経て受信機に至る電波の通路長を時間の関数 R (t) で表わせば

$$R(t)=2\left[R_0^2+(\delta \sin pt)^2-2R_0\,\delta \sin pt\cdot\cos(\theta/2)\right]^{1/2} \quad (1)$$

となる。ここで $\delta$ , $R_0$ を

$$\delta/2R_0 \ll \cos(\theta/2)\ ,\ R_0 \gg 2\delta\cos(\theta/2) \quad (2)$$

が成立するように選べば , R(t) は近似的に

$$R(t)=2R_0-2\delta\cos(\theta/2)\cdot\sin pt \quad (3)$$

で与えられる。

このような運動をしている目標物に角周波数 $\omega_0$ の送信電波を照射した

とき，散乱された受信波 $v_s$ は

$$v_s = V_S \cos\{\omega_0 t - kR(t)\} \quad (k=\frac{2\pi}{\lambda}：波長定数)$$

$$= V_S \cos\{\omega_0 t + 2k\delta \cos(\theta/2)\cdot \sin pt - 2kR_0\}$$

$$\equiv V_S \cos\{\omega_0 t + \beta \cdot \sin pt - \phi\} \qquad (4)$$

となる。ここに

$$\beta = 2k\delta \cos(\theta/2) \qquad (5)$$

$$\phi = 2kR_0 \qquad (6)$$

である。すなわち，散乱受信電圧 $v_s$ は最大位相偏移 $\beta$ をもつ位相変調波となる。

2－2　受信電圧と目標物の側方散乱断面積

次式で示すように，bistatic radar 方程式[3] から，受信電力 $W_R$ は目標物の側方散乱断面積 $\sigma_b(\theta)$ に比例し，また受信電圧 $V_S$ の2乗にも比例する。

$$W_R = \frac{W_T G_T G_R \lambda^2 \sigma_b(\theta)}{(4\pi)^3 R_T^2 R_R^2} = K V_s^2 \qquad (7)$$

ここに $W_T$： 送信電力，$G_T$，$G_R$： 送，受信アンテナ電力利得，$R_T$，$R_R$： 送，受信機から目標物までの距離，K：比例定数。

したがって，上式から目標物の散乱断面積 $\sigma_b(\theta)$ は

$$\sigma_b(\theta) = \frac{(4\pi)^3 R_T^2 R_R^2 K}{W_T G_T \cdot G_R \cdot \lambda^2} V_s^2 \qquad (8)$$

で与えられるが，一般に上式の右辺 $V_s^2$ の係数の値をすべて正確に求めることができない場合が多く，$\sigma_b(\theta)$の相対値しか求められない。そこで，側方散乱断面積の値の既知の目標物（$\sigma_0(\theta)$）について同様の実験から $V_s$（$=V_{s0}$ とする）を求めると

$$\sigma_b(\theta) = \sigma_0(\theta) \frac{V_s^2}{V_{s0}^2} \tag{9}$$

から $\sigma_b(\theta)$の絶対値を求めることができる。

2－3　受信波の検波

図2のように，受信機Rで受信された電波は，位相変調を受けた目標物による散乱波 $v_s$（振巾 $V_S$）の他に，送信機より直接受信機に入る直接波 $v_D$（振巾 $V_D$）および実験室内の壁，その他からのいわゆる背景雑反射波 $v_B$（振巾 $V_B$）がある。あとの2成分は，いずれも変調を受けていないから，両者を一括して合成振巾 $V_{BD}$ なる無変調波と考え，これを不要波と名付け

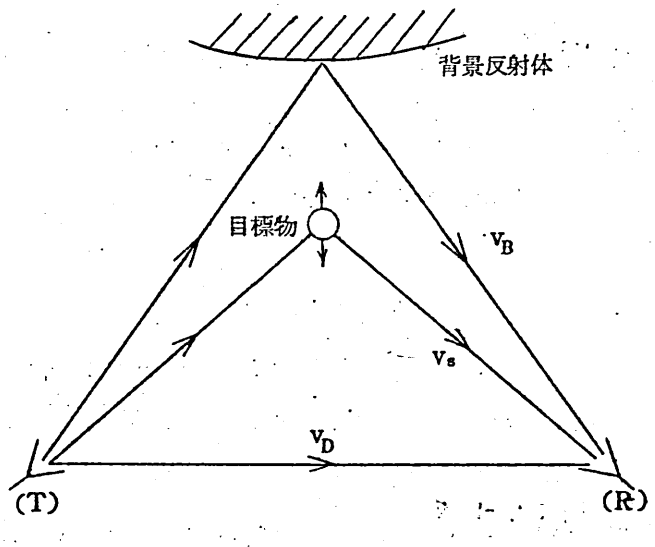



図2.　受信される散乱波と不要波

る。すなわち，受信波 $v_s'$ は

$$v_s' = v_s + v_B + v_D$$
$$= V_S \cos(\omega_0 t + \beta \sin pt + \phi_1) + V_{BD} \cos(\omega_0 t + \phi_2) \quad (10)$$

となる。

この合成受信波を包絡線検波した出力電圧 $V_{out}$ は

$$V_{out} = \left[ V_{BD}^2 + V_S^2 + 2 V_{BD} V_S \cos(\beta \sin pt + \phi) \right]^{1/2}$$
$$= \sqrt{V_{BD}^2 + V_S^2} + \frac{V_S \cos(\beta \sin pt + \phi)}{\sqrt{1 + \frac{V_S^2}{V_{BD}^2}}} + \cdots\cdots \quad (11)$$

となる。ただし $\phi = \phi_1 - \phi_2$ である。

ここで　　$V_{BD} \gg V_S$ 　　(12)

という条件が成立つとき，式（11）は

$$V_{out} \fallingdotseq \sqrt{V_{BD}^2 + V_S^2} + V_S \cos(\beta \sin pt + \phi) \quad (13)$$

で近似できる。右辺第1項は直流成分で，第2項が所要の信号成分である。従ってこの波形の最大変化分から散乱波電圧 $V_S$ を知ることができる。

## 2－4　振動振幅と測定可能な散乱角の範囲

ここで，目標物の振子運動の振巾をどのくらいにすればよいかを考える。検出された信号成分 $V_S \cos(\beta \sin pt + \phi)$ から所要の $V_S$ の値を求めるためには，散乱波と不要波の位相差 $\phi$ の値のいかんにかかわらず，~~$\cos(\beta \sin pt + \phi)$ の値が1周期の間に+1～-1の値をとるので~~ ~~$\cos(\beta \sin pt + \phi) \neq -1$~~ でなければならない。そのためには最大位相偏移 $\beta$ の値に当然下限が存在する。図3には $\phi$ の全角（0～$2\pi$）に対

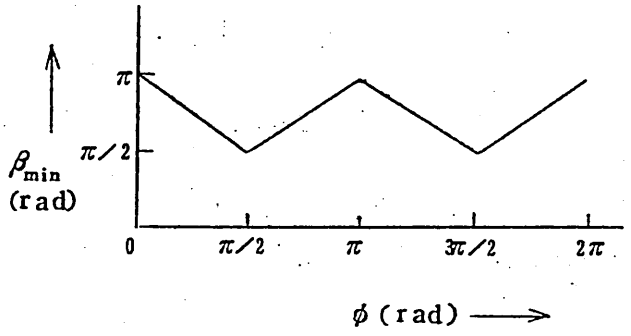



図3. 検出信号成分を $V_S$～$-V_S$まで変化させるに必要な$\beta$の下限

する$\beta$の下限値$\beta_{min}$を示した。一般に$\phi$は未知であるので，それがいかなる値であっても満足するためには，図3から

$$\beta \geq \pi \qquad (14)$$

でなければならない。したがって目標物を単振動させた場合の最小の振幅$\delta_{min}$は式（5）から

$$\delta_{min} = \frac{\lambda}{4} \sec(\theta/2) \qquad (15)$$

となる。

一方，目標物の振動振幅の上限は，式（2）に示したように，目標物と送，受信機との距離に比べて充分小さくしなければならないという条件から制限をうけるが，実験にあたっては次の事項も考慮する必要がある。この場合の受信波のように一般に位相変調を受けた波は次式のように無限個の周波数スペクトラムをもつ成分からなっている。

$$V_S \cos(\beta \sin pt + \phi) = V_S \left[ \cos\phi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}(\beta) \cdot \cos 2npt \right\} - \sin\phi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) \cos(2n+1)pt \right\} \right] \quad (16)$$

ここに $J_n(\beta)$ は n 次の第１種 Bessel 関数である。

振動振幅，すなわち $\beta$ を増すにつれ，受信波のスペクトラム分布も拡がるので，検出出力信号波形を忠実に観測するためには，これに用いる観測機器および記録装置は充分周波数特性の広いものでなければならない。

この振子法による測定法は次のような原理的に避けることのできない難点を含んでいる。それは，目標物を振動させることにより，(i)その振れに応じて散乱角が逐次変化するため，どの散乱角での断面積を測定しているか断定できない。ところが，このことは振れの最大時における散乱角の変動分 $\pm\triangle\theta$ をどの程度まで許容できるかの問題に置きかえて考えられる。(ii)振れの範囲内の電界分布が一様でないときは各点での散乱波強度が異なり，観測出力波形が複雑になりその結果断面積の測定精度が悪くなる。しかし，これらの影響はいずれも所要の振動振幅に制限し，測定装置の設定に考慮をはらえば，実際上無視しうる程度に減らすことができる。

以上の考察による振動振幅の許容範囲を図示すると，図４になる。同図には波長 8.6 mm, $R_0 = 2$ m の条件の下で散乱角 $\theta$ に対して，(i) $\beta = \pi$ となるに必要な最小振幅 $\delta_{min}$，(ii) 式（２）を満足する $\delta_{max}$（但し，式（２）における不等号の差を１０倍とした），(iii) 散乱角の許容変動角 $\triangle\theta$ を $\pm 1^\circ$ 以内に抑えるに必要な振幅 $\delta$ を示した。これらの曲線で囲まれた斜線部分内が振動振幅のとるべき範囲となる。

したがってこの場合，測定可能な散乱角の範囲は同図から大体

$$0^\circ \leq \theta < 173^\circ \quad (17)$$

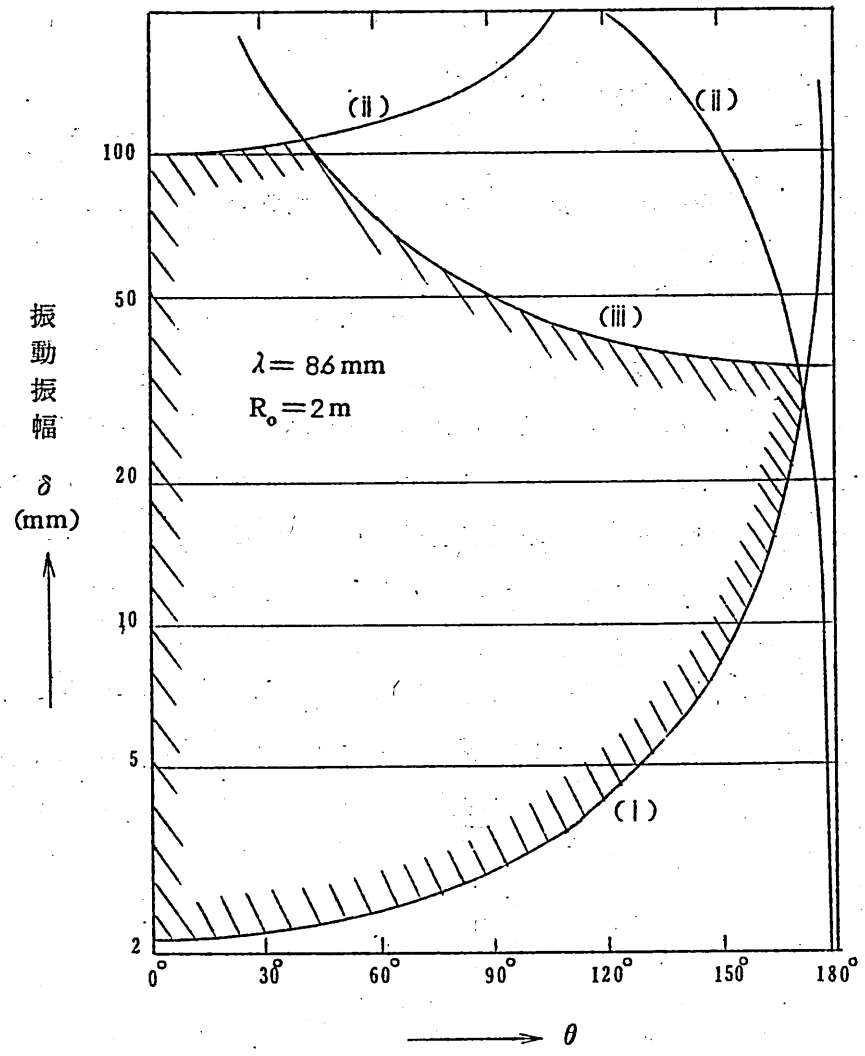



図4. 許容される振動振幅の範囲

ということが結論される。この測定範囲の上限を増すためには，目標物と送，受信機間の距離 $R_0$ を測定に必要な振動振巾 $\delta_{min}$ に比較して，さらに大きくするとよいが，どうしても１８０°にすることはできない。

## 3. 測定方法および測定結果

本測定法の精度を確かめるため，理論計算可能な完全導体球について実験した。その概要を述べる。

### 3－1　測定装置と予備実験の大要

測定装置系を図5に示した。被測定金属球（鋼球）をナイロン糸で吊し，2－4で論じた振巾の単振子運動をさせた。振子の長さは190cm，振動周期は2.77秒であった。波形観測装置としては上限周波数40 $H_Z$（110次の高調波まで追従できる）のペン書きレコーダを用いたので波形歪は無視できる。送，受信機から目標物までの距離は何れも2mとし，送，受両アンテナには標準ホーンを用い，散乱角を構成する面とホーンのEまたはH面のいずれでも一致させることができる。装置の都合で受

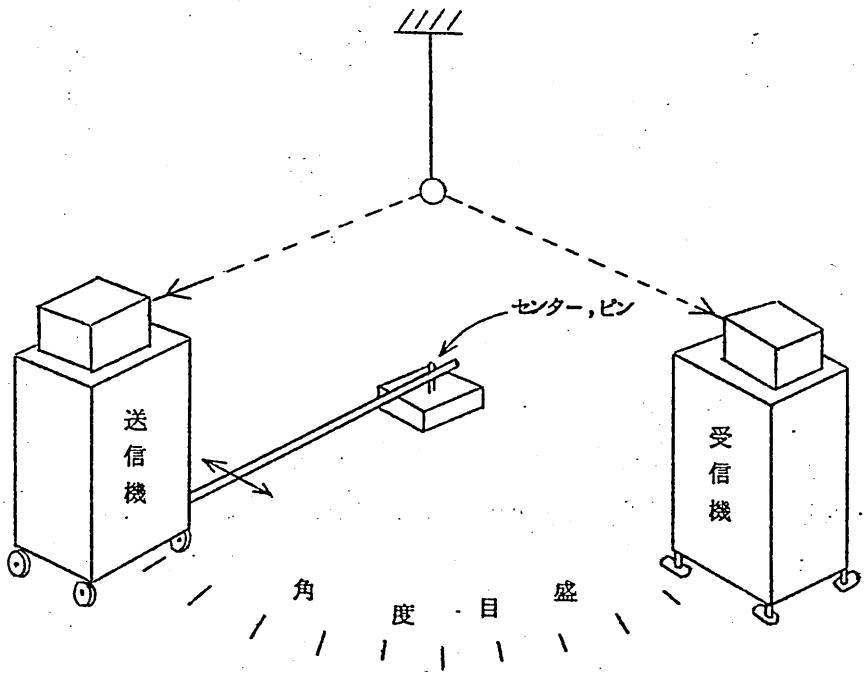



図5. 測定装置の構成図

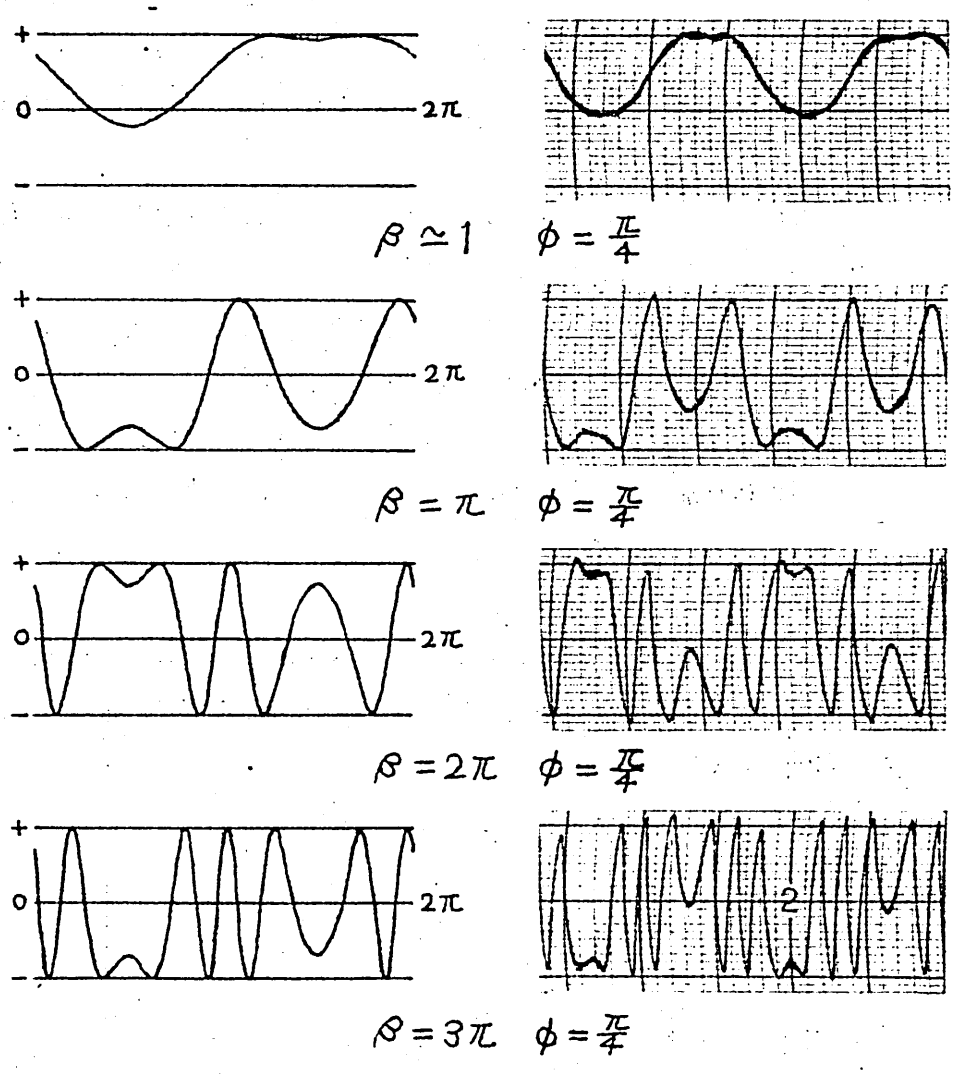



図 6　位相変調波の理論波形と観測波形

信機を固定し，送信機を移動して散乱角を変えた。実験は３５$GH_Z$ 帯で行なった。

予備実験として，目標物の振動振幅すなわち$\beta$を変化したときの出力波形を観測し，これを理論計算した波形と比較した。この結果は図６に示すようによく一致し，$\beta$が$\pi$以上になると振巾の最大値が一定になることが分る。

次に，目標物が存在しない場合の送信直接波と背景雑反射波との合成受信レベルを散乱角を変化して測定したが，図７のようにレベル変動が著しい。このため，式（１２）の条件$V_{BD} \gg V_S$がこのままでは満足されない。したがって本測定においては，この条件を満足させるように，金属反射板を測定に影響しない位置に設置し，散乱角に応じて新たな背景反射波を付加した。新たに付加する背景反射波の量は，受信機の検波器出力の直線性の保たれる範囲にその都度調整した。

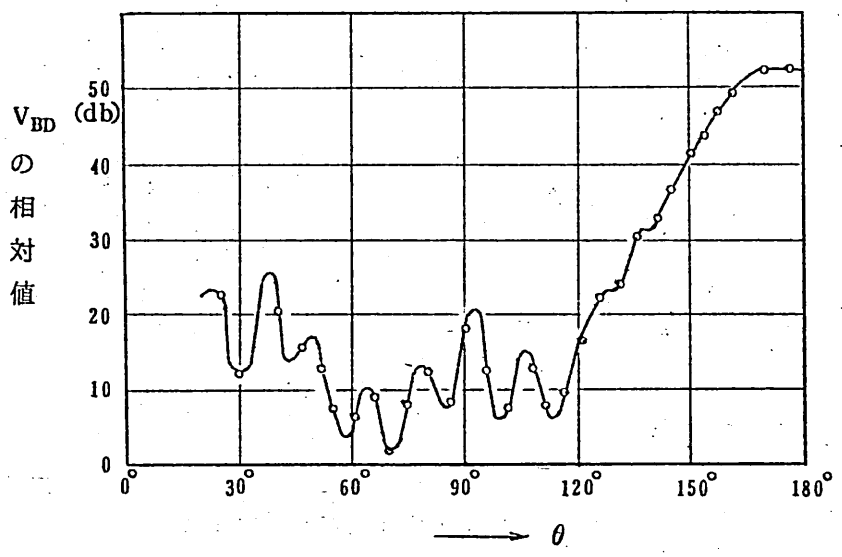



図７　直接波ならびに周囲雑反射波の合成レベル

3－2　金属球の側方散乱断面積

測定試料として4種類の大きさの鋼球を用いた。表1にはこれらの寸法，後方散乱断面積 $\sigma_m$，光学領域にあるとした場合の前方散乱断面積 $\sigma_f = 4\pi a^2/\lambda^2$ の値，および両断面積の比 $\sigma_f/\sigma_m$ の値を示した。測定結果を図8～11* に示した。

同図において・印が測定値で，実線は理論計算値** である。これらの図から明らかなように測定値は理論値とよく一致しており，この測定法が十分信頼できることを示している。

表1.　測　定　試　料

| | 直径(mm) | ka | $\sigma_m$ ($m^2$) | $\sigma_f$ ($m^2$) | $\sigma_f/\sigma_m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63.50 | 23.2 | $3.16\times10^{-3}$ | 1.70 | 513 |
| 2 | 44.45 | 16.2 | $1.40\times10^{-3}$ | $4.08\times10^{-1}$ | 291 |
| 3 | 31.48 | 11.6 | $7.78\times10^{-4}$ | $1.03\times10^{-1}$ | 132 |
| 4 | 25.40 | 9.28 | $5.07\times10^{-4}$ | $4.37\times10^{-2}$ | 77 |

なお，球の半径，したがってkaが小さくなるにつれて，散乱波電力が非常に小さくなり，受信S／N比が低下することによる誤差や記録紙に描かれた波形からの読取誤差が大きくなる。また，送，受信アンテナの最大指向方向と目標物との関係位置や散乱角可変機構など，測定装置の設定および機構上の不備が，誤差を招く原因となる。

---

＊H－面とは磁界ベクトルが散乱角をとる面に平行な場合
　E－面とは電界ベクトルが散乱角をとる面に平行な場合
＊＊理論式の大要は付録に示した。計算は本学電子計算機で行なった。

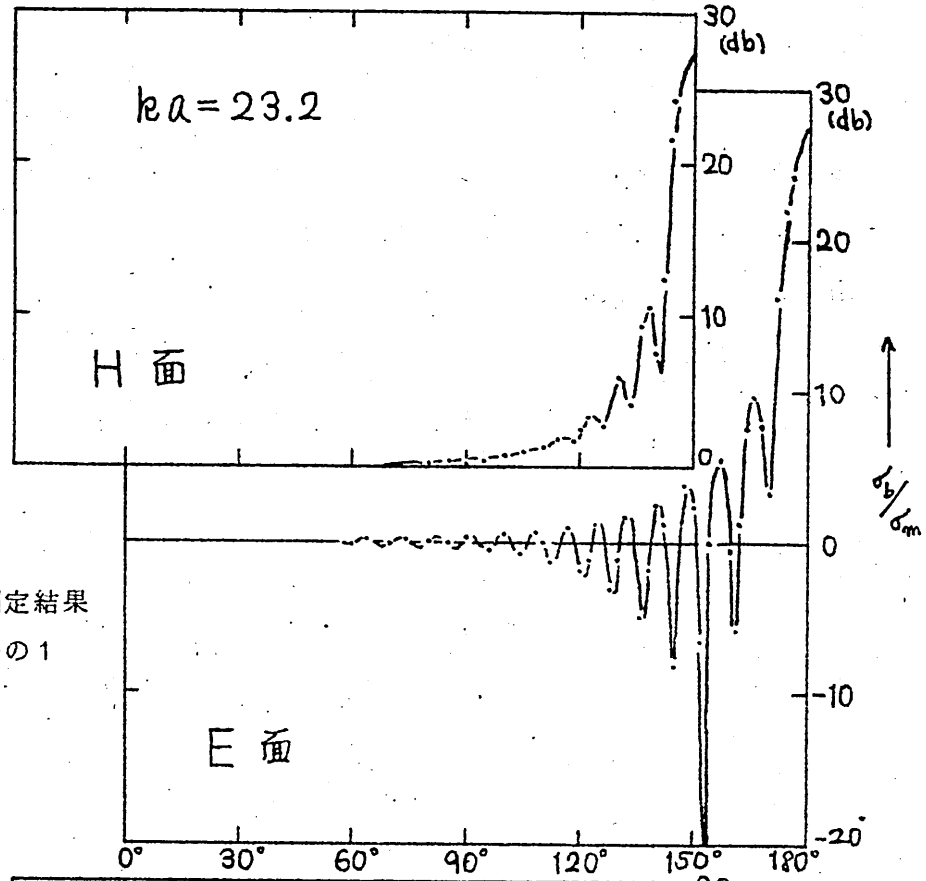



図 8. 測定結果
その 1

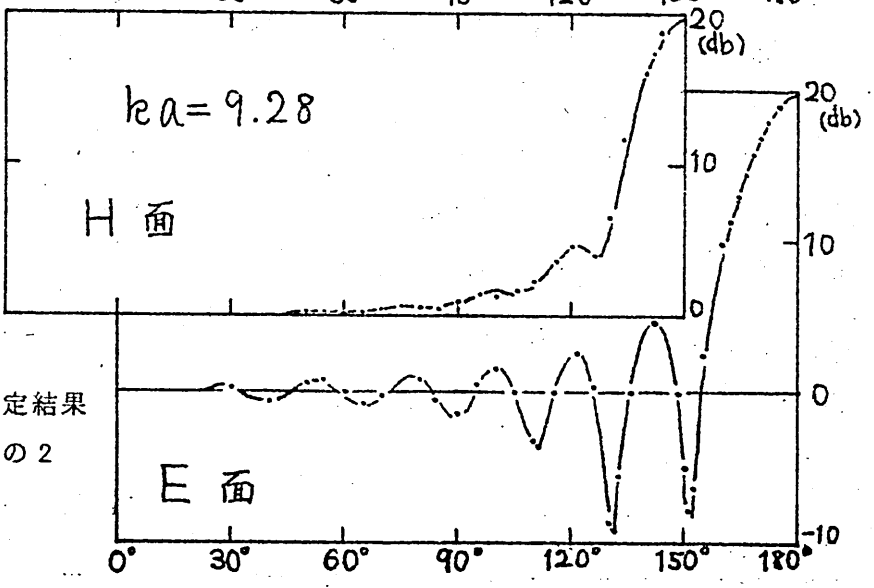



図 9. 測定結果
その 2

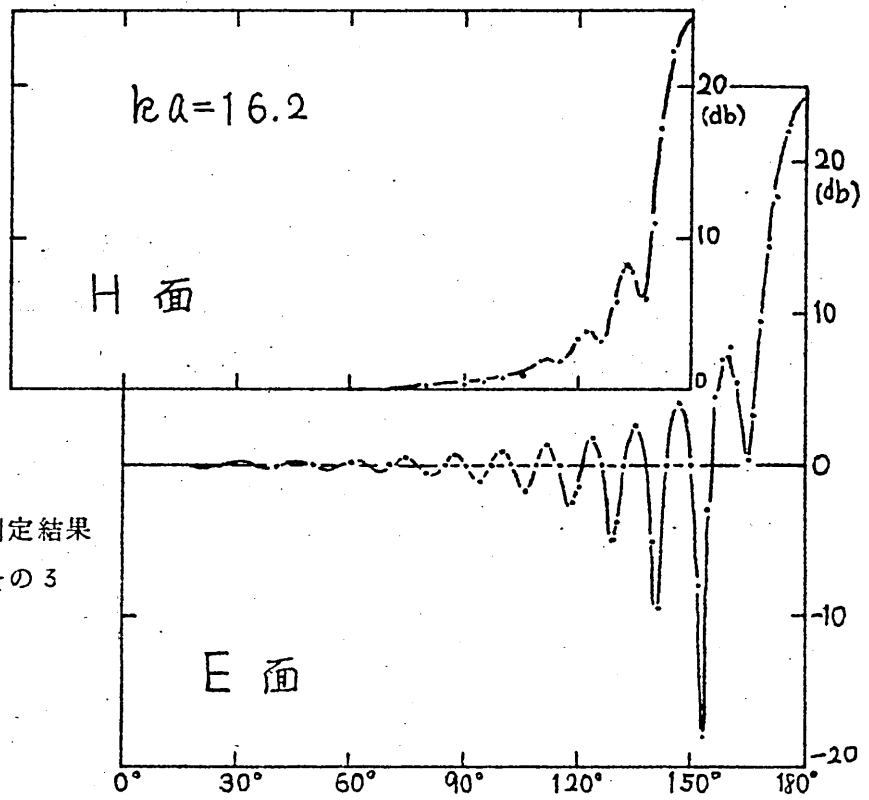



図１０.　測定結果
その３

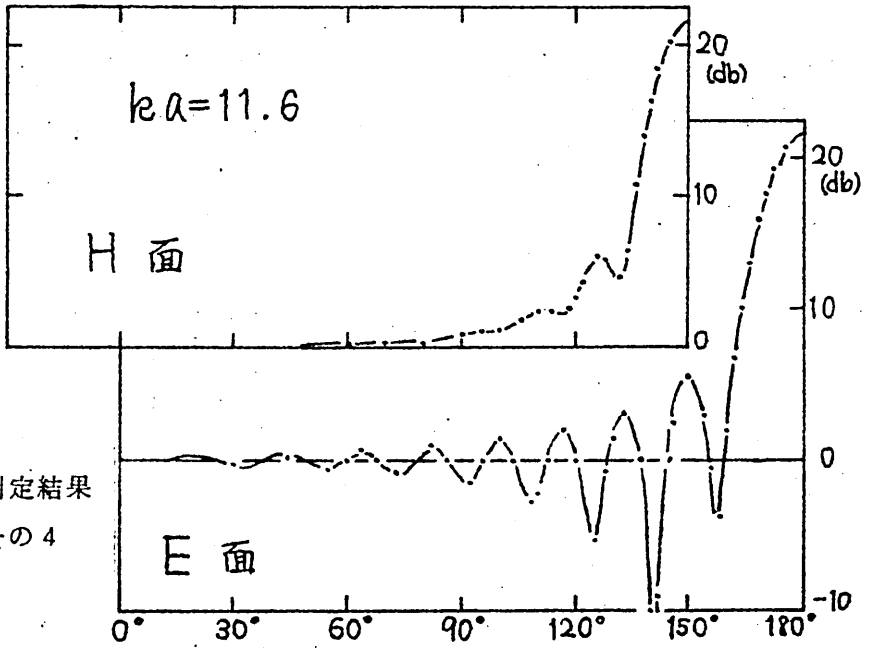



図１１.　測定結果
その４

## 4. むすび

以上，側方散乱断面積の測定法として振子法を提案し，測定原理および測定例を示した。本測定法の最も大きな特徴は，目標物を単に糸で吊し振子運動をさせるという極めて簡単な方法で雑反射波のある普通の実験室で測定が行なえることである。金属球による測定例から十分信頼できる測定法であると言える。今後，形状の複雑な目標物に対する後方および側方散乱断面積の測定に役立つものと思われる。

## 謝　辞

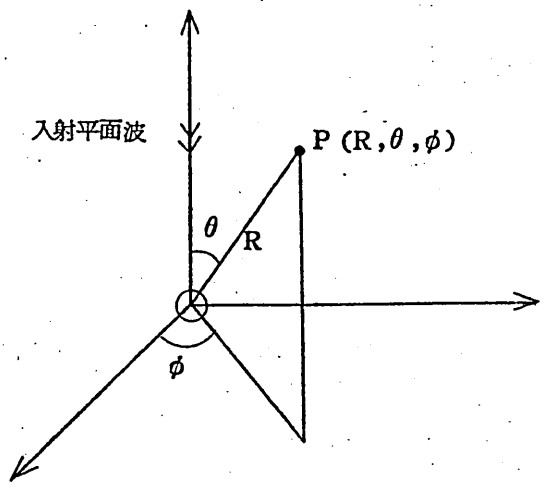
本研究に当り，終始熱心に討論，実験に協力された本学卒業生，竹村孝爾，寺岡心光君（いずれも現在東京芝浦電気勤務）に深謝します。

# 付録　完全導体球における散乱断面積の理論式[4]

座標系を図A－1のように定めたとき，散乱断面積 $\sigma_b$ は

$$\sigma_b = \lim_{R\to\infty} 4\pi R^2 \left\{ |E_\theta^S|^2 + |E_\phi^S|^2 \right\} / E_i^2 \qquad (A-1)$$

で定義される。式中の $E_\theta^S$ , $E_\phi^S$ はそれぞれ $\theta$ , $\phi$ 方向の散乱電界成分を表わしており，入射電界を $E_i$ とすると




図A－1　散乱体と標座系

$$E_\theta^S = E^i \cos\phi\, e^{-j\omega t} \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ a_n(\rho_a) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \zeta_n(\rho) + i\, b_n(\rho_a) \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\zeta_n(\rho)}{d\rho} \right] \quad (A-2)$$

$$E_\phi^S = -E^i \sin\phi \cdot e^{-j\omega t} \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ a_n(\rho_a) \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \zeta_n(\rho) + i b_n(\rho_a) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \cdot \frac{d\zeta_n(\rho)}{d\rho} \right] \quad (A-3)$$

で与えられる。ここに

$$\rho_a = ka \ , \ \rho = kR, \quad (A-4)$$

であり，完全導体球を考える場合 $a_n$，$b_n$ は

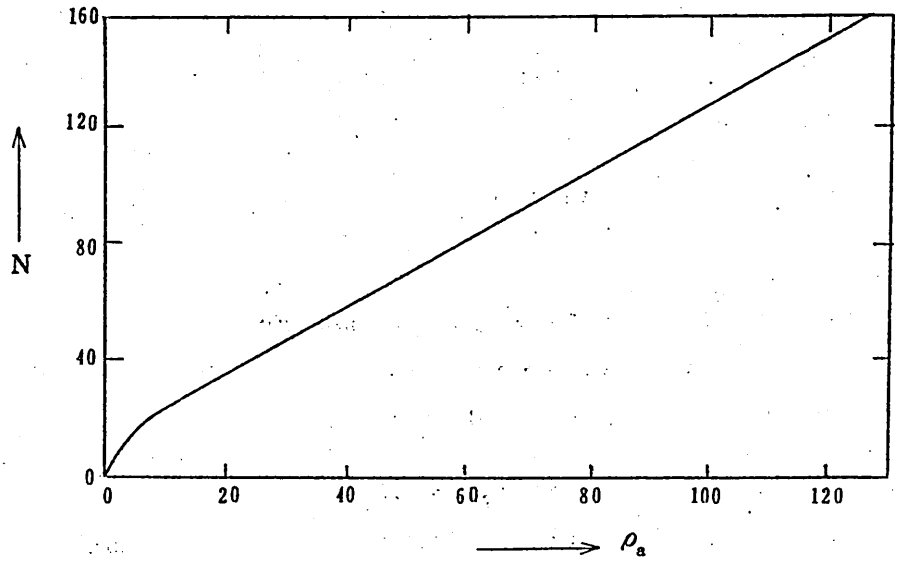
$$a_n = -\frac{\phi_n(\rho_a)}{\zeta_n(\rho_a)} \quad , \quad b_n = -\frac{\phi_n'(\rho_a)}{\zeta_n'(\rho_a)} \quad (A-5)$$

但し $\phi_n$，$\zeta_n$ は球ベッセルおよび球ハンケル関数である。

（A－2），（A－3）を演算するにあたってSummation の上限を有限の値としたい。そこで収斂の早さを考えて，n＝1～Nまで演算を行なうものとする。$\rho_a$ に対してNの大きさを図A－2で与えられる値に選ぶと $E_\theta^S$，$E_\phi^S$ は4％の精度で求まる。

またP. Debyeによれば $\rho \gg n^2$が成立つとも，球ハンケル関数は近似的に次のように置換えることができる。

$$\zeta(\rho) \simeq (-i)^{n+1} e^{i\rho} \quad (A-6)$$




図A－2　$\rho_a$ に対してとるべきNの値

上に述べた2つの事項より（A－2），（A－3）は次のようになる。

$$E_\theta^{S'} \simeq -\frac{i\cos\phi}{\rho} e^{-i(\omega t-\rho)} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ a_n(\rho_a) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} - b_n(\rho_a) \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \right] \quad (A-7)$$

$$E_\phi^{S'} \simeq \frac{i\sin\phi}{\rho} e^{-i(\omega t-\rho)} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ a_n(\rho_a) \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} - b_n(\rho_a) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \quad (A-8)$$

ただし $E_\theta^{S'}$，$E_\phi^{S'}$ は $E_\theta^{S}$，$E_\phi^{S}$ を $E^i$ で正規化した値である。

本論文の理論値は計算機を用いて（A－1），（A－7），（A－8）から求めた。

# 参考文献

(1) "Radar Reflectivity Issue" P. IEE, Vol.53,No.8, Aug. 1965

(2) K.M. Siegel "Bistatic Radars and Forward Scattering" Aero Electronics 1958 Nat. Conf. Reco. Dayton, Ohio, pp.286～290 1958

(3) M.I. Skolnik "An analysis of Bistatic Radar" M.I. Skolnik "Introduction to Radar Systems" pp. 585～594 Mc Graw Hill Co. 1962

(4) H. Weil, et al "Scattering of Electromagnetic Waves by Spheres" Univ. Michigan Radiation Lab. Studies in Radar Cross Section X.

輻射科学研究会
資料　第　　号

# FLAT CRTにおける電子軌道について

早川電機工業株式会社
中央研究所
上野勝嗣

昭和43年9月27日

# Flat CRTにおける電子軌道について

## 要　約

Flat CRTは、テレビジョンセットの奥行寸法縮少の要求に応えて開発を行ったもので、8吋tubeでは厚み56㎜を実現した。偏向方式は、垂直に単偏向板型偏向系と磁界による予備偏向を組合せ、水平には今までのテレビジョンと同じ磁界による偏向方式を採用した。このような偏向方式の組合わせにより、チューブの構造を簡易化し、実用性を高めた。




写真1　　FIAT CRT

## まえがき

Flat CRT に関する研究は、W,R,Aiken, D,Gabor,等の発表を契機として、各国で始められたが、いづれも構造が複雑すぎたり、製造コストが高すぎたりして実用化されるに至っていない。

今回試作したFlat CRT は、従来のブラウン管製造技術を使って、充分処理できるよう、構造を簡単にした事が、実用化の要因といえる。

一般にFlat CRT は、螢光面と電子銃の軸が平行になっているので、電子ビームを螢光面側へ折曲げて、ラスターを描かねばならない。その折曲げる方法には種々の方法があるが、大別して、単偏向板型と多偏向板型の二つがある。

多偏向板型は、偏向板の数だけ高電圧の制御回路を必要とし、チューブの構造も複雑となるので、非常なコストとスペースをとり実用的でない。しかし、フォーカスの改善には有利である。その点、単偏向板型は、回路、チューブの構造とも簡単になるが、フォーカスは多偏向板型に比べ若干劣る。

従って、本研究では、単偏向板型に於るフォーカスの改善が主目的であるが、今回は特に偏向方式について発表する。

## 1. 今までに発表された各偏向方式

### 1－1　ビーム反転型受像管（ＲＣＡ）[1]

偏向コイル磁界により偏向された電子ビームが、一度多孔性スクリーンを通過してから受像管前面の反射電極で反転作用を受けて、スクリーンに逆戻りし、その上の螢光膜を励起発光させる構造である。

この管の利点は、受像管の扁平化が実現される上に、偏向コイルと回路構成は、従来のものをそのまま利用出来、螢光膜前面にガラスが直接、接しないため局部的ハレーションが発生せず、コントラストが向上する。欠点として、多孔性螢光膜をたたくから、有効な電子ビームが減少すること、及び画面中央に明るい部分を作りやすいことである。

1－2　アイケン管[2]

電子銃は、スクリーンの上部の一隅に近接して、ビームがスクリーンの上辺と平行に走るように装置されている。偏向方式は、水平垂直共に数本の針金を利用した静電偏向方式で、針金に加える電圧を順次変えることによって、ビームを90°づつ2回折曲げて螢光面に当っている。

1－3　ゲイバー管[3]

「もなか」状のガラス管を、前後に中央で仕切り、後半部に電子銃を下向きに置く、水平偏向は静電偏向板により行い、ビームは底部の反射電極によって、前半部に折返すと共に偏向部を110°～120°まで開き、磁気コリメータにより、完全に垂直方向に直す。垂直偏向は、アイケン管と同様の原理で行なうが垂直偏向回路を要することなく、自動的に行なわせるところに特長がある。

1－4　シュレズインガー管（Motorola）[4]

「もなか」状のガラス管を前後に、中央で区切り、後半部に電子銃口を上向きにおく、水平偏向は、静電偏向により行ない、上部へ来たビームは磁界により方向を反転し、電界によって軌道を前へ曲げられ螢光面に当る。

1－5　G.E管[5]

弁当箱スタイルのBulbで、電子銃はBulbの斜隅にとりつけられ、水平偏向は、先ず磁界によって行ない、次にマグネットによって、ビームを垂直に立てた後、垂直偏向は螢光面と対向した背面の面抵抗体電極にノコギリ波電圧を加えて、ビームを上から下に走査している。この管の特長は面抵抗体電極の利用によって、電界に電位傾度を持たせて、ビームの入射角を大きくしたところにある。

1－6　フイリップス管[6]

GEとよく似た弁当箱スタイルであり、水平偏向を、マグネットの代りに電界により行ない、垂直偏向は背面の反射電極の電圧を変えることにより行っているが、電子銃を螢光面に対し、斜に取けた事により、ビームを斜入射

させ、螢光面への入射角を一定に保ったところに特長がある。

その他電界の向きも螢光面に対し、斜にすることにより入射角を90°にしたものが、垂直偏向に、磁界を利用してビームの出射角を変えると共に、反射電極の電圧も同時に変えて、ターゲットへのビームの入射角を大きくしたものもある。

### 1－7　東芝管[7]

これは他のチューブとは異り、電子銃をスクリーンの横方向に設け、水平偏向は、従来と同じ、電極偏向コイルにより、垂直偏向は磁気コリメータレンズを使用している。また螢光面は直線性をよくする為に円弧状をなしている。

## 2. 本研究に於るＦｌａｔ　ＣＲＴの原理

垂直偏向部は単偏向板型偏向系と磁界による予備偏向系を併用し、ターゲットへのビーム入射角の向上を図った。図1に偏向系を示す。

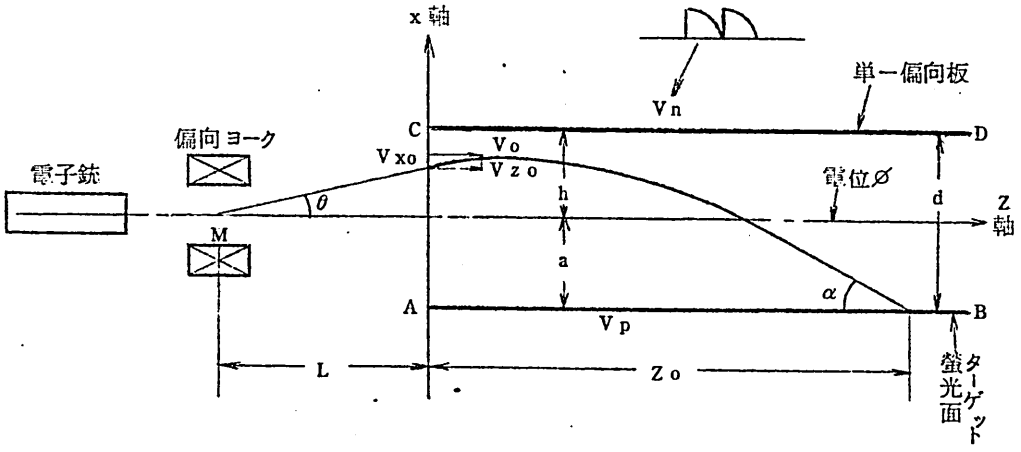
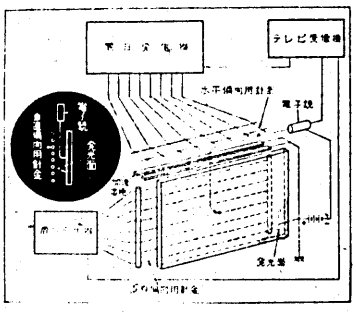



図1　座標と偏向系　　DEFLECTION, SYSTEM ON COORDINATE




第1図　アイケン管の概図

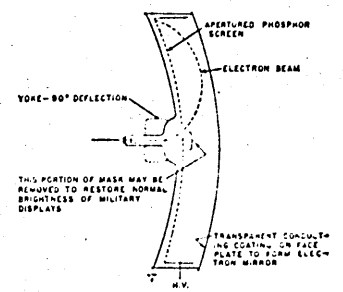
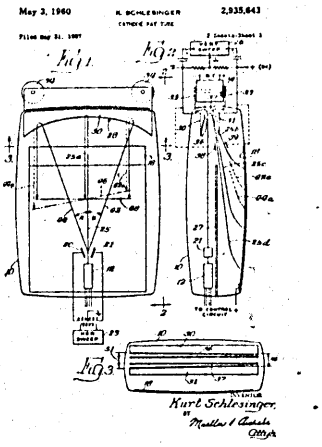
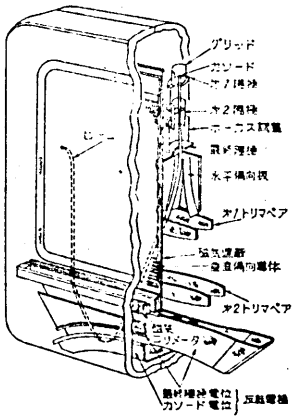
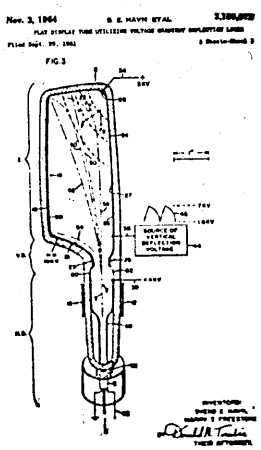


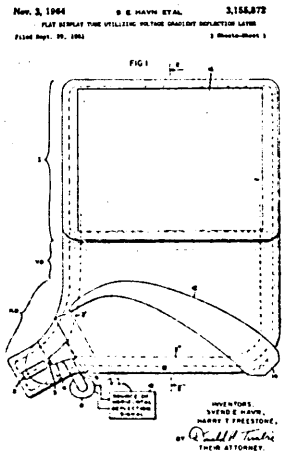

Fig. 1—Schematic drawing of reflected-beam kinescope.

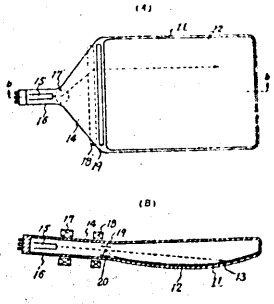



第5図　Gabor 管



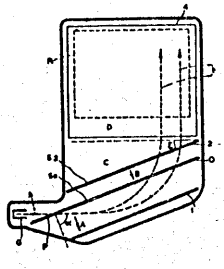



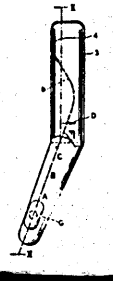





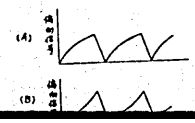

第2図

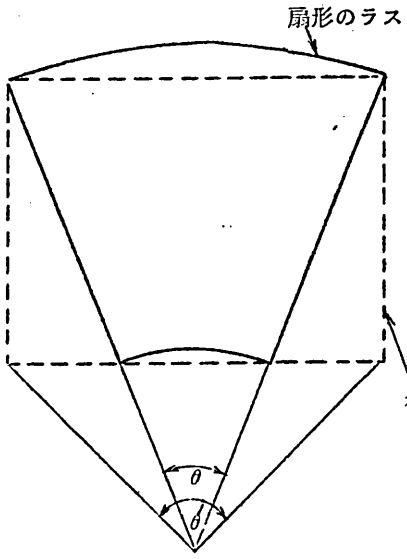


第3図



第2図






水平偏向は従来のテレビジョンと同じ電磁偏向により行っているが、図2のように、ラスターが扇形となる為、偏向コイルには、これを補正する台形歪補正電流を重畳させてラスター歪を補正している。

図2　ラスターの扇形化

KEY-STONE WITH BOWSTRING OF RASTER

図3に、Flat CRT の構造を示す。

画面サイズ8吋、厚み56㍉、高さ306㍉、巾190㍉、主偏向器電極は銀ペイントを塗布して作成、主偏向器と蛍光面ターゲットの絶縁は酸化クロームを使用、ターゲットと電子銃の電気的接続には、黒鉛を用い、その部分は

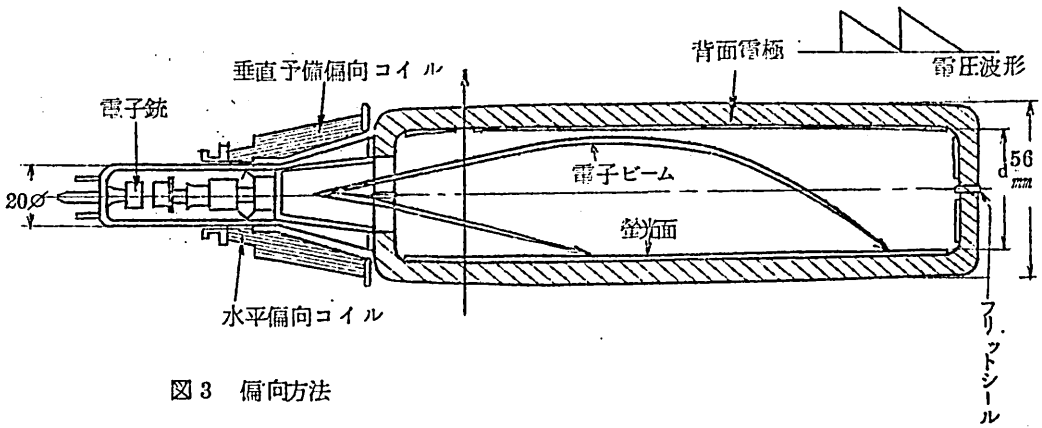



図3　偏向方法

加速電極となっている。また主偏向器の入口つまり電子銃に近い部分は、後に述べる円弧歪を補正する為、歪形のパターンをもった加速電極と酸化クロームにより絶縁されている。

ネックチューブは20㎜φ、電子銃はユニポテンシャル型トランジスタテレビ用を使用した。

2－1　垂直掃引

実際のチューブの螢光面と静電偏向電極は平行ではないが、解析を簡単にする為に両電極は平行とする。

解析の条件

(1)　電界領域では、電界の乱れはなく、入口に於る端縁効果は無視する。

$$\text{電界 } E = \frac{V_p - V_n}{d}$$

(2)　電界領域に於るビームの初期全速度$V_0$は入射点の電位 $\phi = \phi_0 - X_0 E$ で決まる。

2－1－1　垂直掃引距離

X方向の電界Exのみが存在する電界領域では、次の運動方程式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d t^2} &= -\frac{e}{m} Ex \\ \frac{d^2 z}{d t^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

m：電子の質量

e：電子の電荷

(1)式にX軸の初期条件を入れて垂直掃引距離

$Z_0$を導けば[8]

$$Z_0 = \frac{(V_0 \cos\theta)^2}{\frac{e}{m} Ex} \left\{ \tan\theta + \sqrt{\tan^2\theta + \frac{2\frac{e}{m} Ex\ L \tan\theta}{(V_0 \cos\theta)^2}} \right\} \cdots\cdots (2)$$

となりExをパラメータとして、垂直予備偏向角$\theta$に対する掃引距離$Z_0$を求めると、図4の点線となる。横軸は偏向角$\theta$、従軸は画面中心軸上の掃引距離を表す。

図から判るように、電界Eが弱まるにつれて偏向感度は高くなっている。またEx＝600Vのあたりでは、予備偏向角$\theta$のみで、直線掃引が可能な事を示している。

2－1－2　垂直掃引距離の実測値

図4の実線は実測値である。偏向角0°附近の掃引距離が、計算値と5㎜ほどずれているのは、端縁効果による歪の影響と思われる。また、偏向角を大きくするにつれて計算値より実測値が短かくなっているのは、同じく主偏向器入口の電界の乱れによって、ビームの軌道を曲げられた為と思われる。図5はその模様を示す。

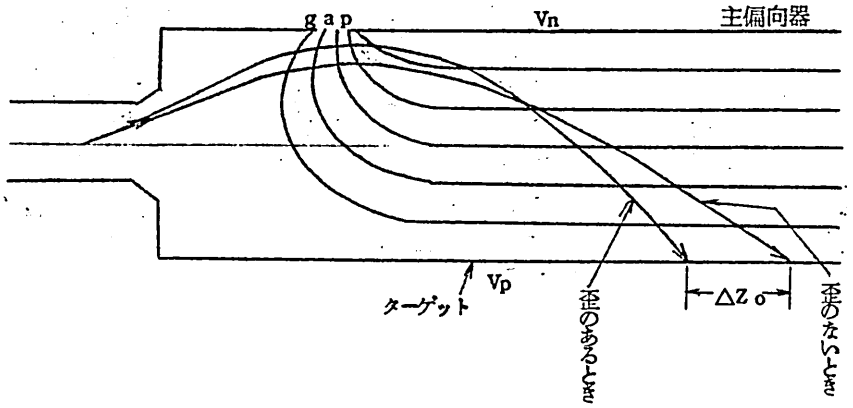



図5　主偏向器入口の端縁効果による
DISTORTION BY EDGE EFFECT OF MAIN DEFLECTOR

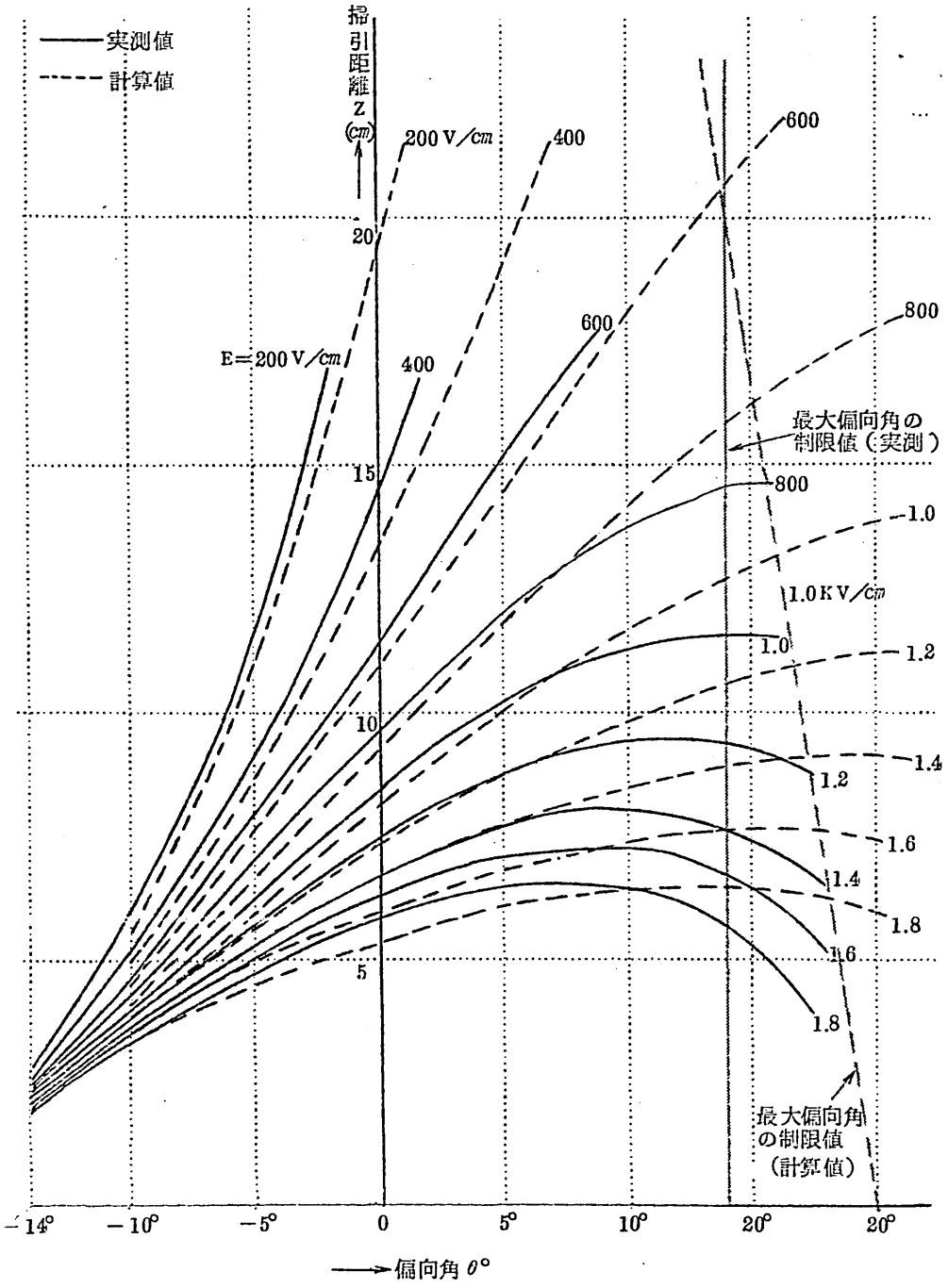

実測値
計算値
掃引距離 Z (cm)
200 V/cm
400
600
800
E=200 V/cm
400
600
800
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
1.0 KV/cm
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
最大偏向角の制限値（実測）
最大偏向角の制限値（計算値）
20
15
10
5
−14°
−10°
−5°
0
5°
10°
20°
20°
偏向角 θ°

図 4　垂直掃引距離

## 3. 水平偏向方式

水平偏向方式は従来のテレビジョンと全く同じ磁界偏向方式を採用しているが、ラスターの台形歪を補正する波形を重畳させている。台形歪とは、ラスターの扇形歪から円弧歪を除いたもので、この場合は逆台形となる。写真2に台形歪の状態を示す。

ラスターの上下の水平掃引距離の差は、水平の偏向角度に比例して大きくなる。図6は水平偏向角度とラスター上下の水平掃引距離の比をグラフに表わしたもので、最大偏向角114°の場合では、上弦に比べ下弦の長さは約⅓になっている。即ち、偏向角を大きくするほど台形歪は大きくなり、65°を越えると遂には基本の水平掃引距離より補正量の方が大きくなってしまう。



写真2　　台形歪　~~補正波形~~

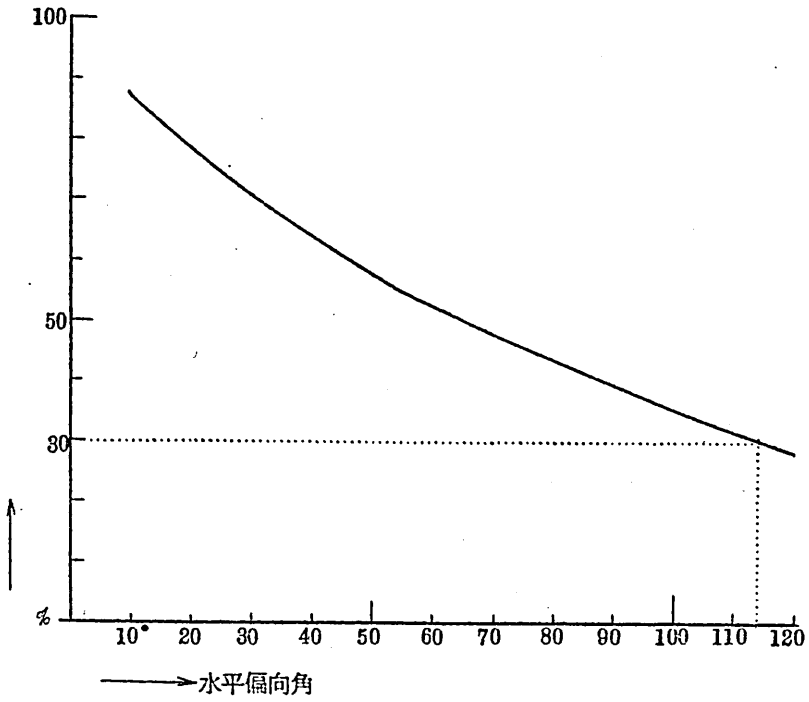



図　6　水平偏向角による上弦と下弦の比
TOP VS—BOTTOM LINES OF KEY—STONE
BY CHANGE OF HORIZONTAL DEFLECTION ANGLE

台形歪の補正方法には、水平偏向電流の振巾を変化させる方法と静電コリメータまたは磁気コリメータ等がある。コリメータレンズを使用する方法は、いずれもレンズの分だけ管長が長くなる事と調整の困難さから今回は採用しなかった。ただし扁平管を横にして使用する場合などは、回路上からの補正は困難なので、コリメータレンズを使用せざるを得ない。

水平偏向電流の振巾変化による台形歪補正波形は図7の考え方から求まり、電流 $I_H$ は次式で表わされる。

$$I_H = K\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{W^2}\left\{(H+A)-\frac{H}{T}tn\right\}^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

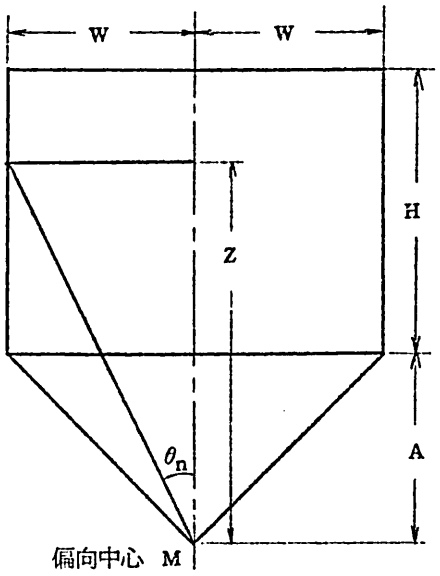



図 7 水平偏向の考え方
ILLUSTRATION OF METHOD FOL HORIZONTAL DEFLECTIDN

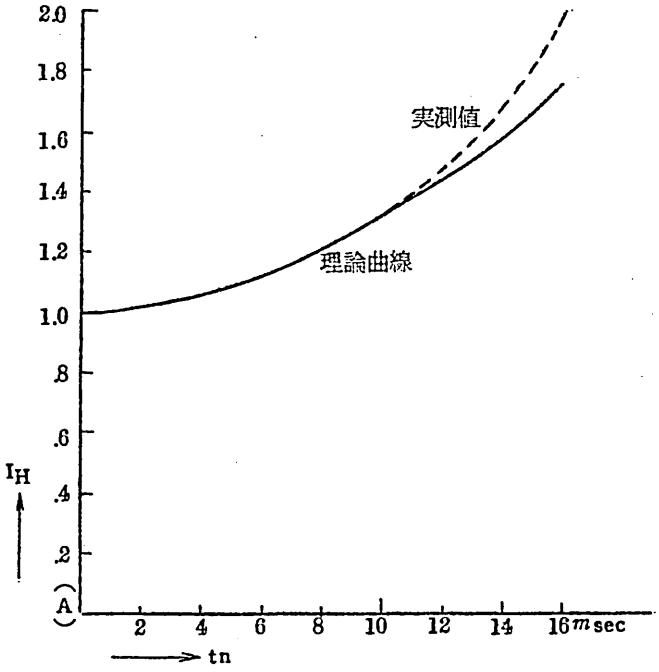



図 8 台形歪 補正波形
WAVEFORM FOR CORRECTION OF KBY-STONE

(3)式に8吋画面に必要な定数を入れて $I_H$ の変化を求めたのが図8である。tnが10msecを越えるあたりより実測値との差がでているが、これは主偏向器入口の電界の乱れによって掃引距離に差を生じたものと考えられる。

図9は台形歪補正波形と水平偏向電流との関係を示したもので、写真3は実際の波形の写真である。

## 4. 円弧歪の補正

円弧歪の量は偏向中心Mから垂直掃引距離Zを半径とする円弧と中心軸上を直角に交わる直線との差で表わされる。図10は円弧歪量Sを求

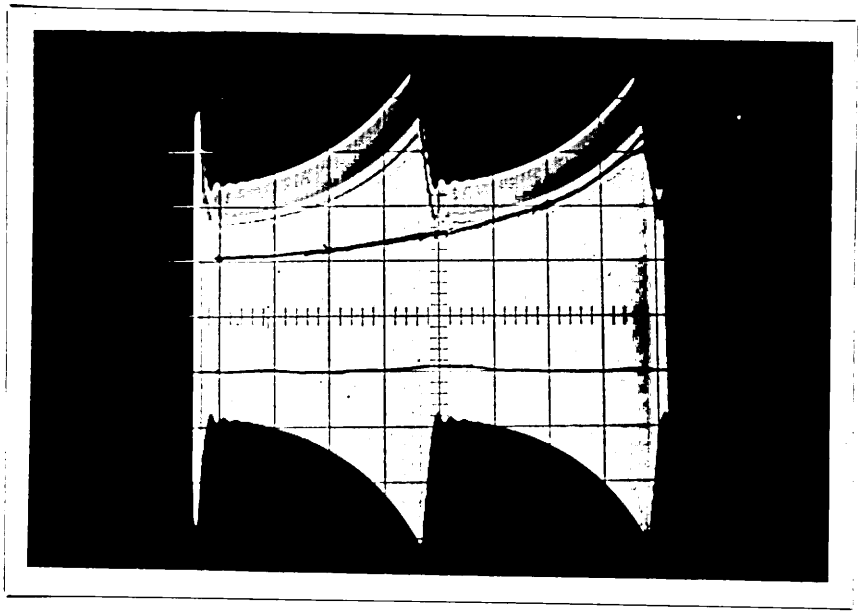


写真3　　台　形　歪

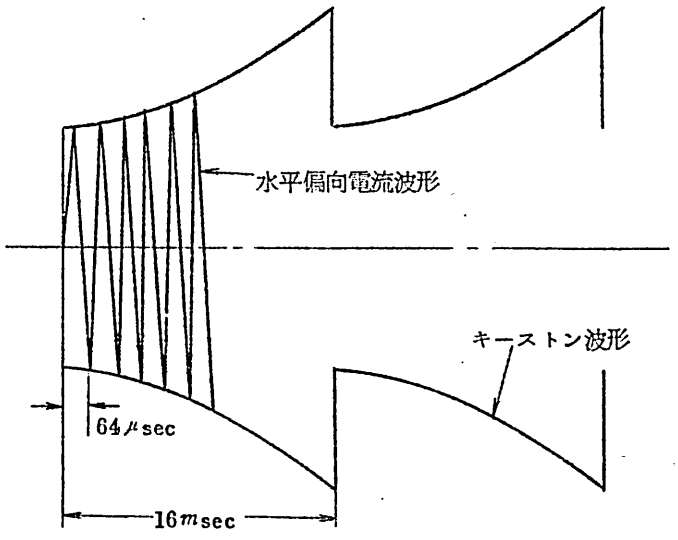



図　9　台形歪　補正波形

WAVEFORM FOR CORRECTION OF KEY-STONE

める為の座標系を示す。

Sは次の式で表わされる。

$$S = (Z_0 + L)\left\{1 + \left(\frac{W}{Z_0 + L}\right)^2 - \frac{1}{\cos\theta}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

但し、$Z_0 = f(\theta, Vn)$

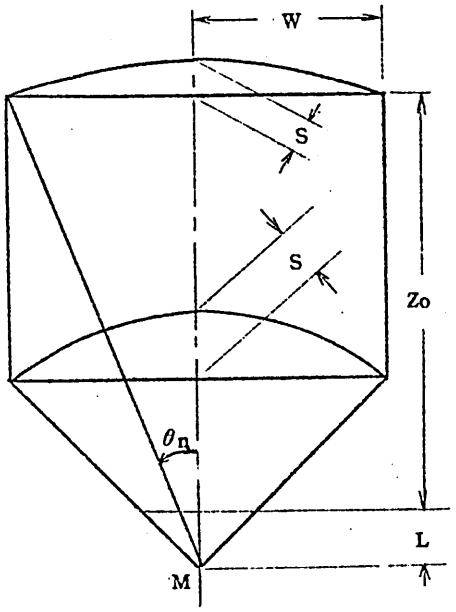



図 10　円弧歪
BOWSTRING DISTORTION

図8から判るとおり、一本の水平走査時間内に垂直の掃引距離をSだけ変化させねばならない。その為には(4)式で求まったSの補正波形を作って垂直偏向波形に重畳させればよいのだが、一方では、台形歪補正波形の重量もあり、出来るだけ回路を簡単にする為に電界による補正を試みた。

主偏向器電極と加速電極の間は絶縁の為にギャップを設けてあるので、ギャップの形を適当に描いて、ビームを静電的に補正しようとするものである。

即ち、中心部は電子銃側へ近ずけ、両端は上に曲げた歪形のパターンにする事により、中心部は両端に比べ早く偏向を受ける為、垂直掃引距離は短かくなって、補正が行なわれ、水平の直線掃引を可能にする。

但し、本扁平管の垂直掃引距離は、画面の上下で大巾に違う上に、予備偏向によって、ビームが振られている為、電界の影響は一様ではない。従って画面全面にわたって完全に補正する事は不可能とみてよいが、実用上差支え

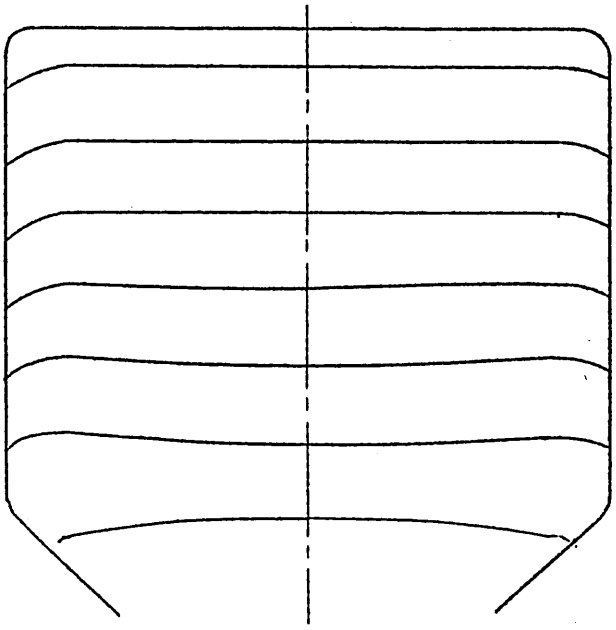


図 11　円弧歪補正後の横しまの直線性

HORIZONTAL SCANNING LINES
AFTER CORRECTION OF BOWSTRING DISTORTION

ない程度まで補正する事は困難ではない。図11に水平走査線の軌跡をプロットした。

## 結　論

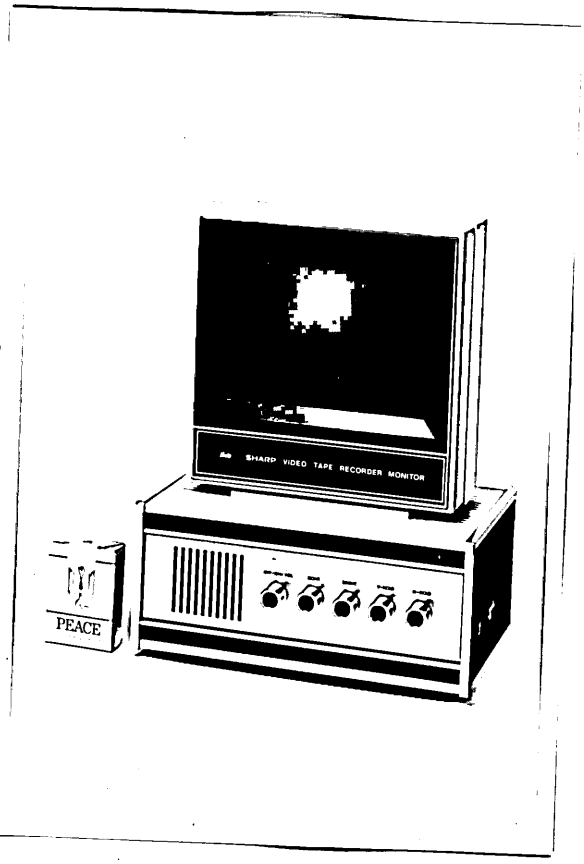
今までに研究されてきた各種の扁平管は、いづれも複雑であったり、構造に無理があったりして実用化されていない。今回早川にて試作したFlat CRTは、tube の構造をより簡易化し実用化へ一歩近ずけた点に特長がある。



写真4　　放送受像画面

写真4は試作した tube に放送を受像したもので、解像度は垂直水平共に300本である。

写真5は、Flat CRTの応用として開発した




Video Monitorである。

残された問題点としては、円弧歪を更に少くする事と、主偏向器の高圧制御回路の簡易化を行ってコストを引下げねばならない事である。

最後に本研究に対し耐えず御指導頂いた三戸所長を始め関係各位に感謝の意を表します。

写真 5　ビデオモニター

## 参考文献

(1) H.B. Law, E.G. Ramberg: The Reflected-Beam Kinescope, Proc, I,R,E 48, 8, pp 1409～1417 (1960)

(2) ウイリアム・ロス・アイケン、陰極線管、特公、昭32－1962
特公、昭33－7862

(3) D.Gabor: Cathode Ray Tube, U,S, Pat, Application No. 2795729 Nov, 29, (1955)

(4) K. Schlesinger, L. Grange ; Catode Ray tube, U.S.pat. Application No. 2935643. May 31 (1957)

(5) S.E.Harn, HJ. Freestone : Flat Display Tube Utilizing Voltage Gradient Deflection Layer. U.S.Pat. Application No. 3155872, Sep. 29. 1961

(6) ピーター・シャーゲン、反射型陰極線管装置、特公・昭36－4927，
特公・昭36－9820
(7) 山田達也、長谷川伸：扁平ブラウン管　特公・昭39－30102
(8) 高橋正彦：NHK技術研究　第16巻、第6号（昭39）

輻射科学研究会資料

# 運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる表面波の励振

藤岡弘
中川紀美雄
（大阪大学・工学部）

1968年11月29日

# 1. 序　　言

最近，運動系の電磁界理論に関する研究が活発になされ，運動しているプラズマ媒質と平面電磁波との相互作用[1),(2)]，あるいは運動している無限に拡がったプラズマ媒質中の電磁放射[3)]等に関する多数の研究が報告されている．

ここでは，軸方向に運動している円柱状プラズマ中に静止しているダイポールによって励振される表面波[4)]について考察し，プラズマ媒質の運動が表面波の伝搬に与える影響は従来の他の場合[1)~3)]に比べて極めて大きいことを明らかにする．

ダイポールによる励振周波数$\omega$とプラズマ周波数$\omega_p$との比を$N$で定義したとき，プラズマ媒質が静止しているとき[5)]には，$0<N<1/\sqrt{2}$なる周波数領域にわたって表面波が励振される．しかし，媒質が運動している場合には，この様子は媒質の運動速度によって非常に異ったものとなる．そこで本文では媒質の運動が分散関係式に与える影響を数値計算例を挙げて詳細に検討し，媒質の運動方向と逆の方向に伝搬する表面波の（正規化）遮断周波数を$N_c^-$とし，同じ方向に伝搬する表面波の（正規化）遮断周波数を$N_c^+$としたとき，常に$N_c^-<N_c^+$であり，媒質の運動速度が比較的小さいときの遮断周波数は媒質が静止している場合の遮断周波数より大きくなる，すなわち$N_c^+>N_c^->1/\sqrt{2}$であるが，速度が大きくなるにつれて$N_c^-$，$N_c^+$は次第に小さくなり（特に，$N_c^-$は運動速度の増加と共に急激に小さくなる），光速度に近ずく極限では$N_c^-=N_c^+=0$となり表面波はもはや励振できないこと等を明らかにする．

## 2．プラズマ円柱内外の電磁界

図1に示すように $z$ 方向に無限に長い半径 $b$ なる円柱状プラズマ[5]を考えこのプラズマは $z$ 軸の正の方向に $v$ なる速度で波源に対して一様に運動しているものとする．ただし，プラズマ媒質は，等方性であり，その誘電率は媒質の静止座標系において $\varepsilon_0\varepsilon = \varepsilon_0(1-\omega_p^2/\omega'^2)$ で与えられるものとする．ここで，$\omega'$ は媒質の静止座標系における波源の周波数であり，$\omega_p$ はプラズマ周波数を表わす．さて，ダイポールは座標原点に位置し，双極子モーメントの方向は $z$ 軸に平行であるとすれば電流密度 $\mathbf{J}$ は次式で与えられる．

$$\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_e \frac{\delta(\rho)\,\delta(z)}{2\pi\rho} \qquad (1)$$

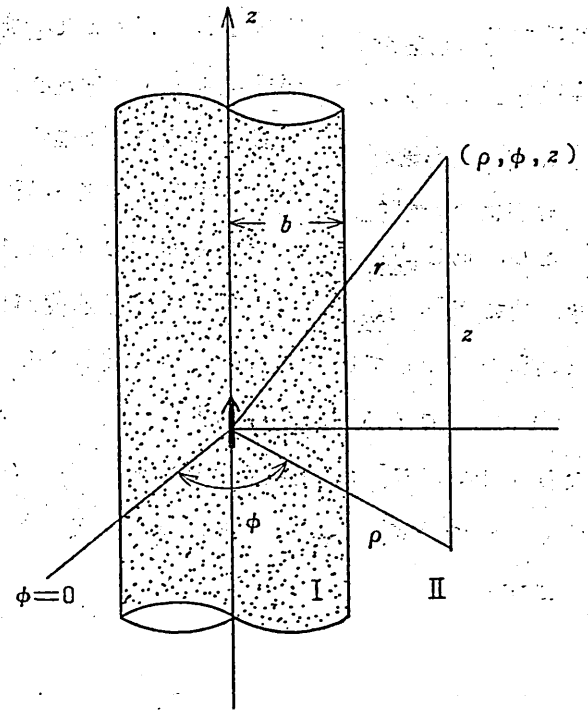



図1　座　標　系

ここで電磁界の時間変化を $e^{j\omega t}$ と仮定すれば領域 I ( $0<\rho<b$ ), すなわち運動しているプラズマ媒質中の電磁界は次式により決定される.(6)

$$(\nabla - j\omega\Omega)\times\mathbf{E}_e = -j\omega\mu_0\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}_e \tag{2a}$$

$$(\nabla - j\omega\Omega)\times\mathbf{H}_e = j\omega\varepsilon_0\varepsilon\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}_e + \mathbf{J} \tag{2b}$$

$$(\nabla - j\omega\Omega)\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}_e = \frac{\Omega\cdot\mathbf{J}+q}{\varepsilon_0\varepsilon} \tag{2c}$$

$$(\nabla - j\omega\Omega)\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}_e = 0 \tag{2d}$$

ただし添字 $e$ はプラズマ媒質中の電磁界を表わし, また $q$ は波源電磁流密度 $\mathbf{J}$ に伴う電荷密度を表わす, なお, 以下の諸記号を導入した.

$$\Omega = \frac{(n^2-1)\mathbf{v}}{(1-n^2\beta^2)c^2} = \frac{(n^2-1)\beta}{(1-n^2\beta^2)c}\mathbf{i}_z = \Omega\mathbf{i}_z$$

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad n = \sqrt{\varepsilon}, \quad c = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \tag{3}$$

さて, 式 ( 2d )から電磁界補助量としてベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_e$ をつぎのように導入することができる.

$$\mathbf{H}_e = \bar{\alpha}^{-1}\cdot[(\nabla - j\omega\Omega)\times(\bar{\alpha}^{-1}\cdot\mathbf{A}_e)] \tag{4}$$

したがってスカラ・ポテンシャルを $\phi_e$ とすれば, $\mathbf{E}_e$ は式 ( 2a )から

$$\mathbf{E}_e = -j\omega\mu_0\bar{\alpha}^{-1}\cdot\mathbf{A}_e - (\nabla - j\omega\Omega)\phi_e \tag{5}$$

とかける．式（４），（５）を式（２b），（２c）に代入し，ゲージ関係式

$$(\nabla - j\omega\Omega)\cdot \mathbf{A}_e + j\omega\varepsilon_0\varepsilon\ a^2\phi_e = 0 \qquad (6)$$

を用いて，ベクトル・ポテンシャル$\mathbf{A}_e$ に関する波動方程式

$$(\nabla - j\omega\Omega)\cdot\bar{\alpha}\cdot(\nabla - j\omega\Omega)\,\mathbf{A}_e + a^2 k^2 \mathbf{A}_e = -a^2\mathbf{J} \qquad (7)$$

を得る．ただし，

$$k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon = k_0^2\varepsilon \qquad (8)$$

式（１）で与えられる波源に対しては，全ての電磁界成分は円周方向$\phi$に無関係になり，波動方程式（７）はベクトル・ポテンシャル$\mathbf{A}_e$ の$z$成分$A_{ze}$を用いてつぎのようにかける．

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right\} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2\,j\omega\Omega}{a}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\omega^2\Omega^2}{a} + k^2 a\right] A_{ze}$$

$$= -a J_e\,\delta(\rho)\,\delta(z)/2\pi\rho \qquad (9)$$

また，電磁界成分は式（4），（5），（6）を用いてつぎのようにかける．

$$E_{\rho e} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon\ a^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho\,\partial z} - j\omega\Omega\frac{\partial}{\partial\rho}\right) A_{ze} \qquad (10a)$$

$$E_{ze} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon\ a^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\,j\omega\Omega\frac{\partial}{\partial z} - \omega^2\Omega^2 + k^2 a^2\right) A_{ze} \qquad (10b)$$

$$H_{\phi e} = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\rho}\,A_{ze} \qquad (10c)$$

つぎに，領域Ⅱ（$b<\rho<\infty$），すなわち真空中の電磁界は領域Ⅰの場合と同様にして，波動方程式

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right\}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right]A_{z0}=0 \tag{11}$$

を満足するベクトル・ポテンシャル$A_{z0}$を用いてつぎのように表わされる．

$$E_{\rho_0}=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}A_{z0} \tag{12a}$$

$$E_{z0}=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)A_{z0} \tag{12b}$$

$$H_{\phi_0}=-\frac{\partial}{\partial\rho}A_{z0} \tag{12c}$$

ただし，添字0は自由空間中の電磁界量を表わす．

つぎに波動方程式（9）および（11）を解くことを考える．まず領域Ⅰにおける波動方程式（9）をFourier変換することによって次式を得る．

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right\}-\frac{1}{a}h^2-\frac{2\omega\Omega h}{a}-\frac{\omega^2\Omega^2}{a}+k^2a\right]\overline{A}_{ze}$$

$$=-aJ_e\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \tag{13}$$

ただし，

$$A_{ze}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_{ze}\,e^{-jhz}\,dh \tag{14a}$$

$$\overline{A_{ze}} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{ze}\, e^{jhz}\, dz \qquad (14b)$$

式（13）は等方性運動プラズマ中において常に成りたつ関係式

$$h^2 + 2\omega\Omega h + \omega^2\Omega^2 - a^2k^2 = a\,(h^2 - k_e^2) \qquad (15)$$

を用いて簡単化することができる．ただし，$k^2$は式（8）に与えられる量であり，$k_e^2$ は次式で定義される．

$$k_e^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = k_0^2\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad (16)$$

式（15）を代入することによって式（13）はつぎのようにかける．

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right\} + \xi_e^2\,\rho\right]\overline{A_{ze}} = -\frac{aJ_e\,\delta(\rho)}{2\pi} \qquad (17)$$

ただし，

$$\xi_e^2 = k_e^2 - h^2 \qquad (18)$$

式（17）の解として

$$\overline{A_{ze}} = C\left[H_0^{(2)}(\xi_e\rho) + F\,J_0(\xi_e\rho)\right] \qquad (19)$$

なる形の解を仮定する．ただし，$C$，$F$は定数であり，$H_0^{(2)}$, $J_0$はそれぞれ零次の第2種Hankel関数および第1種 Bessel関数を表わす．上式の定数$C$は式（17）の両辺を$\rho = 0$を含む微小範囲で$\rho$について積分することによってつぎのように定められる．

$$C = j\frac{aJ_e}{8} \qquad (20)$$

$A_{ze}$ は式(19)を逆変換することによってつぎのように求められる.

$$A_{ze}=\frac{jaJ_e}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_0^{(2)}(\xi_e\rho)+FJ_0(\xi_e\rho)\right]e^{-jhz}\,dh \qquad (21)$$

したがって,円柱表面に平行な電磁界成分$H_{\phi e}$, $E_{ze}$ は上式(21)を式(10a), (10c)に代入することによってそれぞれつぎのように求められる.

$$H_{\phi e}=j\frac{J_e\xi_e}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_1^{(2)}(\xi_e\rho)+FJ_1(\xi_e\rho)\right]e^{-jhz}\,dh \qquad (22a)$$

$$E_{ze}=\frac{J_e\xi_e^2}{16\pi\omega\varepsilon_0\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_0^{(2)}(\xi_e\rho)+FJ_0(\xi_e\rho)\right]e^{-jhz}\,dh \qquad (22b)$$

上式(22a), (22b)に含まれる定数$F$は,円柱表面上での境界条件から決定される.

つぎに,波動方程式(11)をFourier 変換して次式を得る.

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\xi_0^2\right]\overline{A}_{z_0}=0 \qquad (23)$$

ただし,

$$\xi_0^2=k_0^2-h^2 \qquad (24)$$

また,

$$A_{z0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{A}_{z0}\,e^{-jhz}\,dh \qquad (25a)$$

$$\overline{A}_{z0}=\int_{-\infty}^{\infty}A_{z0}\,e^{jhz}\,dz \qquad (25b)$$

さて，式 (23) の解を

$$\overline{A}_{z0} = G J_e H_0^{(2)}(\xi_0 \rho) \tag{26}$$

と仮定すれば，式(12b)，(12c) を用いて $H_{\phi 0}$，$E_{z0}$ はそれぞれつぎのように表わされる．

$$H_{\phi 0} = \frac{G J_e \xi_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1^{(2)}(\xi_0 \rho)\, e^{-jhz}\, dh \tag{27a}$$

$$E_{z0} = \frac{G J_e \xi_0^2}{j 2\pi \omega \varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\xi_0 \rho)\, e^{-jhz}\, dh \tag{27b}$$

ここで，円柱表面上（$\rho = b$）での境界条件

$$H_{\phi e} = H_{\phi 0}, \quad (\rho = b) \tag{28a}$$

$$E_{ze} = E_{z0}, \quad (\rho = b) \tag{28b}$$

を用いて $G$，$F$ はそれぞれつぎのように決定される．

$$G = \frac{\xi_e}{4\pi b \xi_0 \left[\varepsilon \xi_0 H_0^{(2)}(\xi_0 b)\, J_1(\xi_e b) - \xi_e H_1^{(2)}(\xi_0 b)\, J_0(\xi_e b)\right]} \tag{29a}$$

$$F = \frac{\xi_e H_0^{(2)}(\xi_e b)\, H_1^{(2)}(\xi_0 b) - \varepsilon H_0^{(2)}(\xi_0 b)\, H_1^{(2)}(\xi_e b)}{\varepsilon \xi_0 H_0^{(2)}(\xi_0 b)\, J_1(\xi_e b) - \xi_e H_1^{(2)}(\xi_0 b)\, J_0(\xi_e b)} \tag{29b}$$

したがって，領域 I，および領域 II におけるベクトル・ポテンシャルはそれぞれつぎのようになる．

$$A_{ze} = j \frac{a J_e}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ H_0^{(2)}(\xi_e \rho) + \frac{P(h)}{\Delta(h)} J_0(\xi_e \rho) \right] e^{-jhz}\, dh\,, \quad (0 < \rho < b) \tag{30a}$$

$$A_{z0}=-j\frac{J_e}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2j\xi_e}{\pi b\xi_0\Delta(h)}H_0^{(2)}(\xi_0\rho)\right]e^{-jhz}\,dh,\quad(b<\rho<\infty) \tag{30b}$$

ただし,

$$P(h)=\xi_e H_0^{(2)}(\xi_e b)\,H_1^{(2)}(\xi_0 b)-\varepsilon\xi_0 H_0^{(2)}(\xi_0 b)\,H_1^{(2)}(\xi_e b) \tag{31a}$$

$$\Delta(h)=\varepsilon\xi_0 H_0^{(2)}(\xi_0 b)\,J_1(\xi_e b)-\xi_e H_1^{(2)}(\xi_0 b)\,J_0(\xi_e b) \tag{31b}$$

$$\xi_e=\begin{cases}\sqrt{k_e^2-h^2}, & (k_e>h) \quad (32a)\\ -j\sqrt{h^2-k_e^2}, & (k_e<h) \quad (32b)\end{cases}$$

$$\xi_0=\begin{cases}\sqrt{k_0^2-h^2}, & (k_0>b) \quad (33a)\\ -j\sqrt{h^2-k_0^2}, & (k_0<h) \quad (33b)\end{cases}$$

$$\varepsilon=1-\frac{\omega_p^2}{\omega'^2}=1-\frac{(1-\beta^2)\omega_p^2}{(\omega-\beta c h)^2} \tag{34}$$

## 3. 表面波の励振

### 3.1 分散関係式

ベクトル・ポテンシャル$A_{ze}$, $A_{z0}$ の表面波による寄与は，被積分関数の極における留数を計算することによって求められるが，ここではまず分散関係式について考察する．

式 (30a), (30b)の被積分関数の極は，$\Delta(h)=0$ の根で与えられるが，$\xi_e=-j\sqrt{h^2-k_e^2}$, $(k_e<h)$ ; $\xi_0=-j\sqrt{h^2-k_0^2}$, $(k_0<h)$のときの$\Delta(h)$ の零点 $h_s$が表面波の伝搬定数を与える．したがって表面波の分散関係式は式 (31b), (32b), (33b)および (34) からつぎのように表わされる．

$$(1-\beta k_s)^2 p_e I_0(MN p_e) K_1(MN p_0) + \left\{(1-\beta k_s)^2 - (1-\beta^2) N^{-2}\right\} p_0 \times I_1(MN p_e) K_0(MN p_0) = 0 \tag{35}$$

ただし，

$$p_e = \sqrt{k_s^2 - (1-N^{-2})} \tag{36a}$$

$$p_0 = \sqrt{k_s^2 - 1} \tag{36b}$$

$$k_s = \frac{h_s}{k_0} = \text{正規化表面波伝搬定数} \tag{36c}$$

$$M = \frac{\omega_p}{c} b = \text{正規化半径} \tag{36d}$$

$$N = \frac{\omega}{\omega_p} = \text{正規化周波数} \tag{36e}$$

ここで，$I_n$ および $K_n$ はそれぞれ $n$ 次の第1種および第2種の変形 Bessel 関数を表わす．さて，本文ではプラズマ媒質が $z$ の正の方向に運動（$\beta>0$）していると仮定しているがこのとき $z$ の負の方向に伝搬する表面波（$k_s<-1$）は，媒質が $z$ の負の方向に運動（$\beta<0$）していると仮定したいときに $z$ の正の方向に伝搬する表面波（$k_s>1$）と等価である．したがって，$z$ の負の方向に伝搬する表面波の伝搬定数（$k_s<-1$）を求めるには分散関係式 (35) における $\beta$ を $-\beta$ で置き換え，$k_s>1$ なる解を求め－符号を付ければよい．

図2，図3 (a)～(c) は分散関係の数値計算例である．図からつぎのことがわかる．すなわち，媒質の運動方向（$z$ の正の方向）に伝搬する表面波の正規化遮断周波数を $N_c^+$，逆方向（$z$ の負の方向）に伝搬する表面波の正規化遮断周波数を $N_c^-$ とするとき

1) $\beta$ が比較的小さいときには $N_c^+ > N_c^- > 1/\sqrt{2}$ である．すなわち，遮断周波数は媒質が静止しているときのそれより大きい．

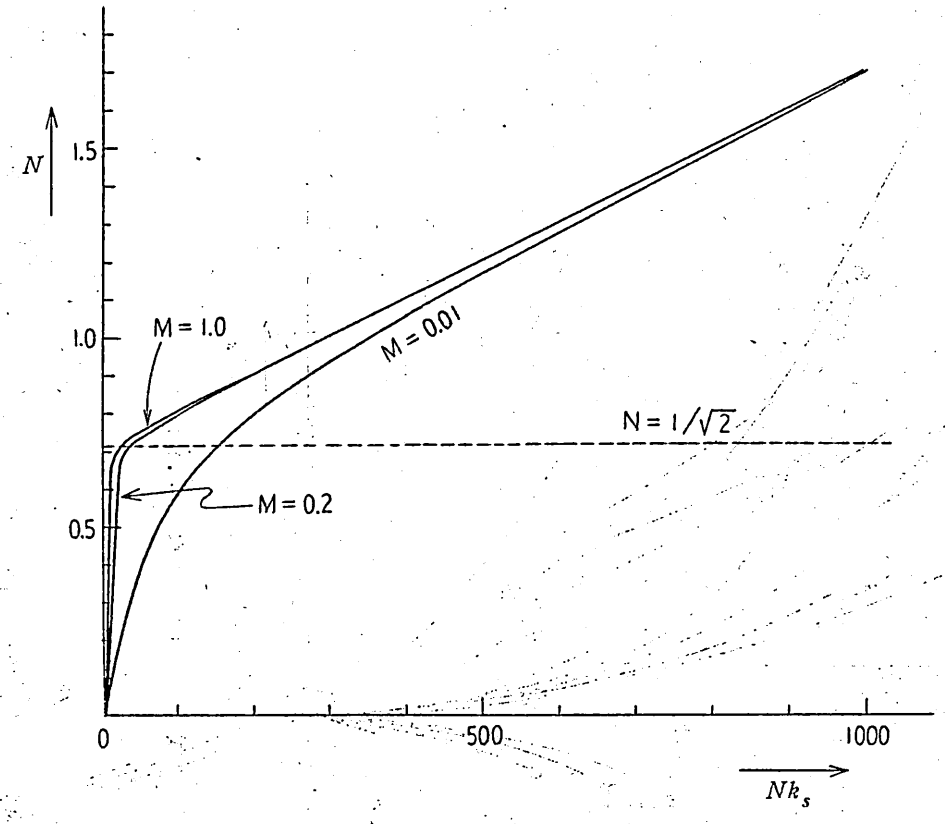



図2　分　散　関　係　($\beta=0.001$)

2)　$\beta$が大きくなるにつれて$N_c^-$，$N_c^+$はだんだん小さくなり，特に$N_c^-$ は$\beta$の増大と共に急激に小さくなる．

3)　$\beta$が1に近ずく極限，すなわち媒質の運動速度が光速に等しくなる極限においては$N_c^+ = N_c^- = 0$となり，もはや表面波の励振はできなくなる．

以上の傾向は分散関係式（35）から直接確めることができる．分散関係式（35）は，その左辺第2項の係数が正の場合には明らかに解をもたない．すなわち，

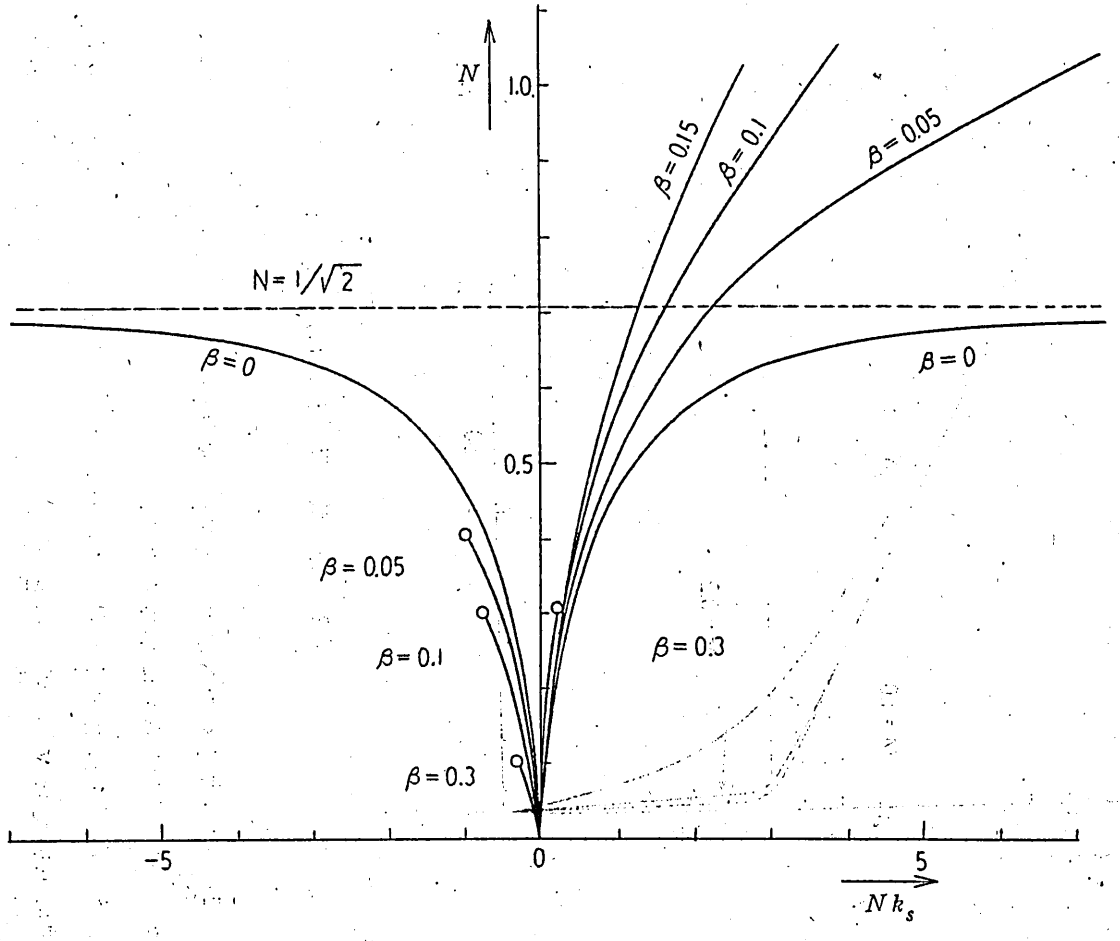



図 3 (a)　分 散 関 係　($M=1.0$)

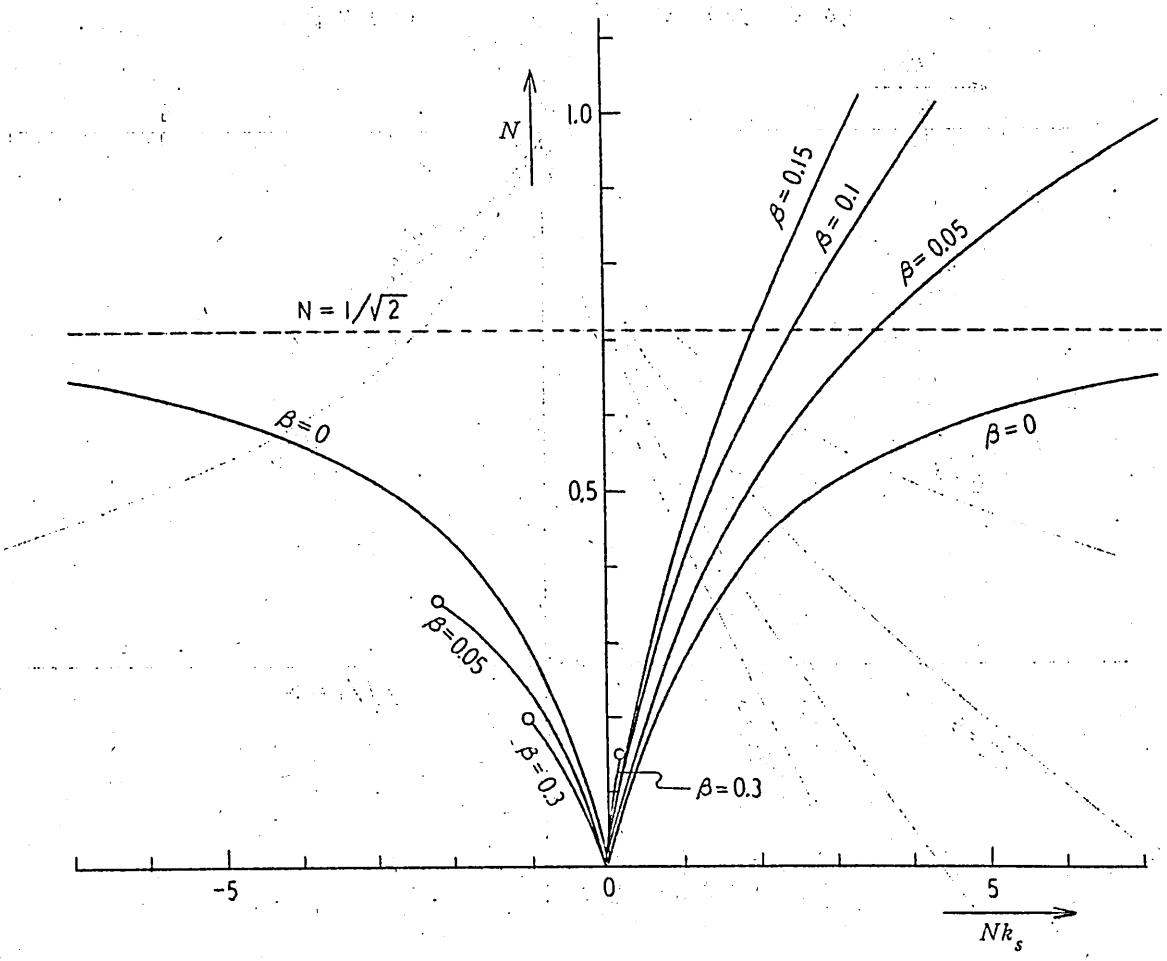



図 3 (b)　分 散 関 計　($M = 0.4$)

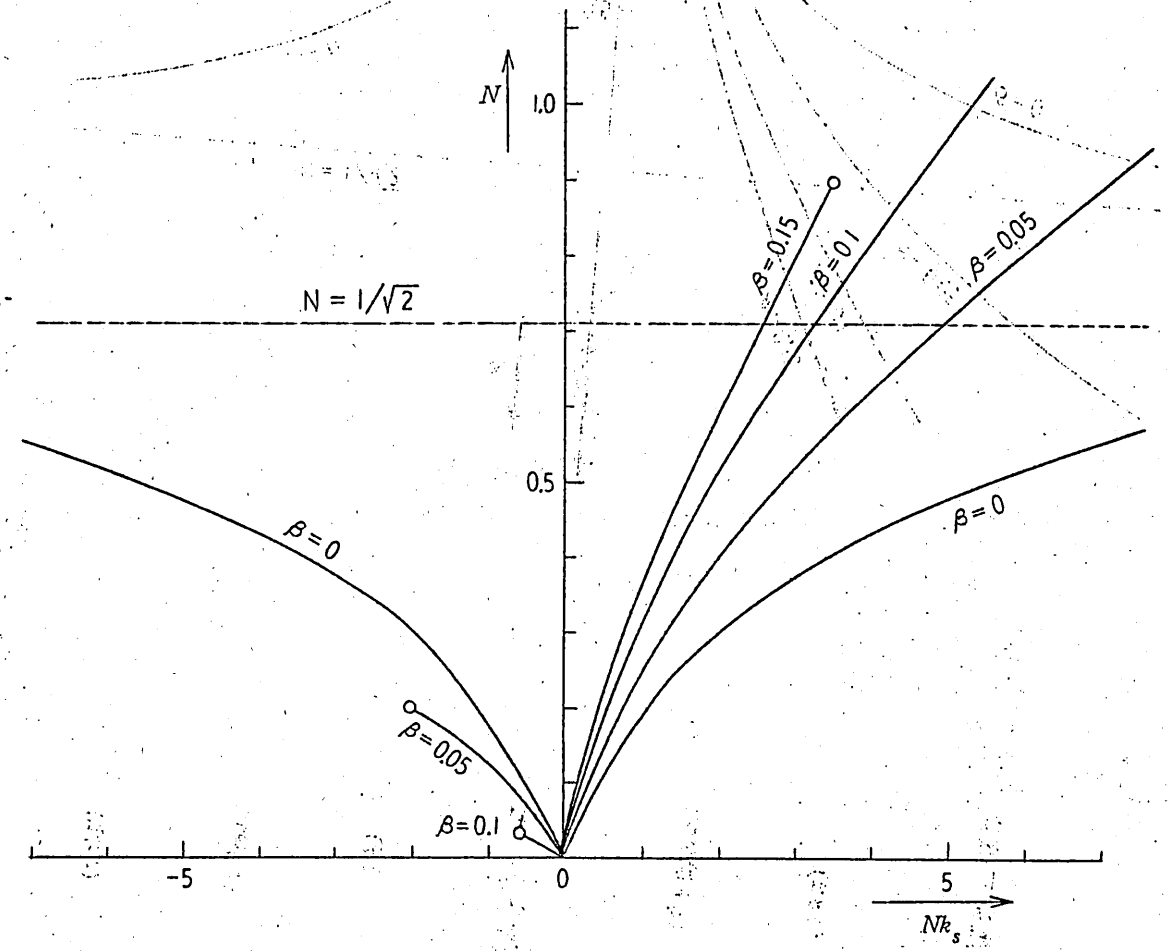



図 3 (C)　分　散　関　係　($M = 0.2$)

$$(1-\beta k_s)^2-(1-\beta^2)N^{-2}>0 \tag{37a}$$

したがって

$$N>\beta N k_s+\sqrt{1-\beta^2} \tag{37b}$$

および

$$N<\beta N k_s-\sqrt{1-\beta^2} \tag{37c}$$

なる領域には解は存在しない．式(37b)および(37c)の領域を図示すれば図4の斜線部のようになる．ただし，式(37b)および(37c)は分散関係式(35)が解をもたない為の十分条件であり必要条件ではない．したがって実際に解の存在する領域は図の斜線を引いていない部分よりさらに小さくなる．この図からも$\beta\to 1$に近づくにつれて斜線を引いていない部分が小さくなり，つ

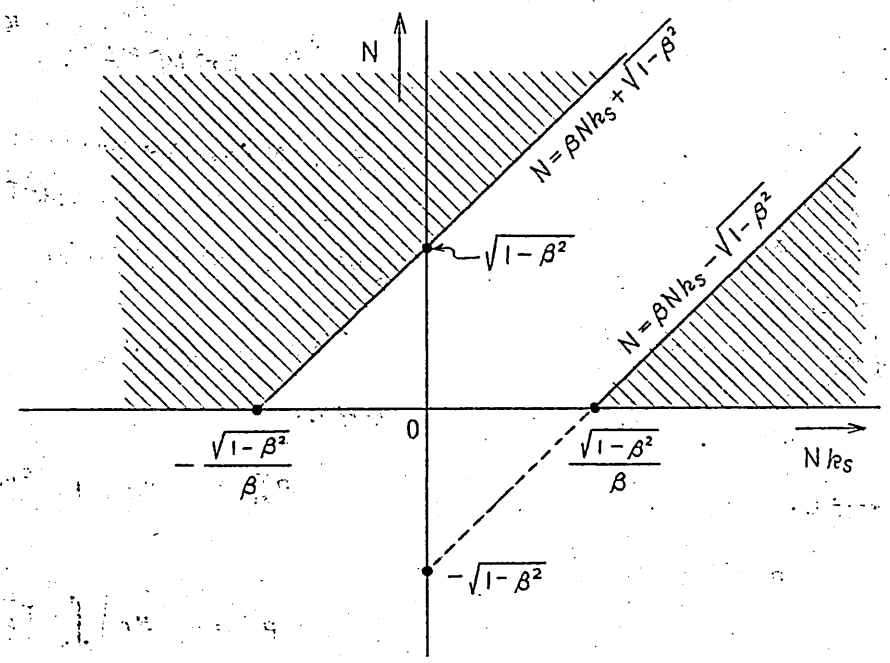



図4　分散関係式が解をもたない領域
（斜線部が解をもたない領域を表わす）

いには0となることが分かる.

また，数値計算例から媒質の運動が表面波の伝搬に与える影響は，従来の場合[1)~3)]に比べて極めて大きいことが分かる.

## 3．2 表面波電力

ベクトル・ポテンシャルの表面波による寄与は極における留数を計算することによって求められ，$z>0$の領域においてつぎのようになる.

$$A_{ze}^{+}=\frac{aJ_e}{8}\frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)}I_0(k_0p_e\rho)\,e^{-jh_sz} \tag{38a}$$

$$A_{z0}^{+}=\frac{J_e p_e}{2\pi^2 b\varepsilon P_0\Delta'(h_s)}K_0(k_0p_0\rho)\,e^{-jh_sz} \tag{38b}$$

ただし，$\Delta'(h_s)$は$\Delta(h)$の$h=h_s$での微分を表わす.

さて，$z$の正の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力を$P_s^{+}$とすれば$P_s^{+}$は次式で与えられる.

$$P_s^{+}=P_{se}^{+}+P_{s0}^{+} \tag{39}$$

ただし，

$$P_{se}^{+}=\frac{1}{2}Re\left[\int_0^b E_{\rho e}^{+}H_{\phi e}^{+*}\,2\pi\rho\,d\rho\right] \tag{40a}$$

$$P_{s0}^{+}=\frac{1}{2}Re\left[\int_b^\infty E_{\rho 0}^{+}H_{\phi 0}^{+*}\,2\pi\rho\,d\rho\right] \tag{40b}$$

上式(40a)に含まれる$E_{\rho e}^{+}$，$H_{\phi e}^{+}$は式(10a)，(10c)に式(38a)を用いてつぎのように求められる.

$$E_{\rho e}^{+} = -\frac{J_e\,(h_s+\omega\Omega)\,k_0 p_e}{8\,\omega\,\varepsilon_0\varepsilon\,a}\,\frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)}\,I_1(k_0 p_e \rho)\,e^{-jh_s z} \tag{41a}$$

$$H_{\phi e}^{+} = -\frac{J_e\,k_0 p_e}{8}\,\frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)}\,I_1(k_0 p_e \rho)\,e^{-jh_s z} \tag{41b}$$

同様に $E_{\rho 0}^{+}$, $H_{\phi 0}^{+}$ は式 (12a)，(12c)および (38b)を用いてつぎのように求められる．

$$E_{\rho 0}^{+} = \frac{J_e}{2\pi^2 b\omega\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{h_s k_0 p_e}{\Delta'(h_s)}\,K_1(k_0 p_0 \rho)\,e^{-jh_s z} \tag{42a}$$

$$H_{\phi 0}^{+} = \frac{J_e}{2\pi^2 b\varepsilon}\,\frac{k_0 p_e}{\Delta'(h_s)}\,K_1(k_0 p_0 \rho)\,e^{-jh_s z} \tag{42b}$$

したがって $P_{se}^{+}$, $P_{s_0}^{+}$ はそれぞれつぎのように表わされる．

$$P_{sc}^{+} = \frac{1}{2}\left[\frac{J_e^2}{16\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\omega p}{c}\right)^2\right]\frac{N^4 M^2 p_e^2\,(\beta k_s + a - 1)}{\varepsilon\,a\beta}$$

$$\times\frac{L^2}{D^2}\left[I_1^2(MN p_e) - I_0(MN p_e)\,I_2(MN p_e)\right] \tag{43a}$$

$$P_{s0}^{+} = \frac{1}{2}\left[\frac{J_e^2}{16\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2\right]\frac{N^2 k_s\,p_e^2}{\varepsilon^2 D^2}\left[K_0(MN p_0)\,K_2(MN p_0)\right.$$

$$\left. - K_1^2(MN p_0)\right] \tag{43b}$$

ただし，

$$L = \frac{p_e}{\varepsilon}\,K_0(MN p_e)\,K_1(MN p_0) - p_0 K_0(MN p_0)\,K_1(MN p_e) \tag{44a}$$

$$D=\left[\frac{2p_e\beta(1-\beta^2)}{\varepsilon^2N^2(1-\beta k_s)^3}-\frac{k_s}{\varepsilon p_e p_0^2N^2}\right]I_0(MNp_e)K_1(MNp_0)$$

$$+\frac{(1-\beta^2)k_sM}{\varepsilon N(1-\beta k_s)^2}I_1(MNp_e)K_1(MNp_0)$$

$$+\frac{MNk_s(\varepsilon p_0^2-p_e^2)}{\varepsilon p_e p_0}I_0(MNp_e)K_1(MNp_0)$$

$$+\frac{k_s}{p_e^2p_0N^2}I_1(MNp_e)K_0(MNp_0) \qquad (44b)$$

つぎに，$z$の負の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力は，$z$の正の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力を表わす式における$\beta$を$-\beta$に置き換えたものに等しい．ただし，このとき$k_s$は分散関係式（35）における$\beta$を$-\beta$とおいて得られる$k_s$の値を使用するものとする．したがって次式がなりたつ．

$$P_s^-(\beta)=P^+(-\beta)=P_{se}^+(-\beta)+P_{s0}^+(-\beta) \qquad (45)$$

よって表面波によって運ばれる全電力$P_s$はつぎのようになる．

$$P_s=P_s^++P_s^-=P_s^+(\beta)+P_s^+(-\beta) \qquad (46)$$

## 4．結　　言

軸方向に運動している無限に長い等方性プラズス中に静止しているダイポールによって励振される表面波について数値計算例を挙げて詳細に検討し，

媒質の運動が表面波の励振に与える影響が極めて大きいことを明らかにした．

なお，本文では円柱表面に沿って伝搬する表面波についてのみ考察したが，自由空間中に放射される放射波についても現在検討を進めており，これについては他の機会に報告する予定である．

## 謝　　辞

日頃，種々御指導いただく大阪大学工学部板倉清保教授，同熊谷信昭助教授，ならびに常々御討論いただく板倉研究室の諸氏に深謝する．

なお，本文の数値計算は大阪大学計算センターのＮＥＡＣ－２２０６によったことを付記する．

# 文　　献


(1) C.Yeh: "Reflection and Transmission of Electromagnetic Waves by a Moving Plasma Medium", J.Appl.Phys., 37 p. 3079 (July, 1966).

(2) H.Fujioka, F.Nihei, and N.Kumagai: "Interaction of Plane Electromagnetic Waves with a Moving Compressible Plasma Fluid", Can.J.Phys., to be published.

(3) K.S.H.Lee and C.H.Papas: "Antenna Radiation in a Moving Dispersive Medium", IEEE Trans., AP-13, p. 799 (Sept., 1965).

(4) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭；“運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射”，昭43全大，S 6－3．

(5) S.R. Seshadri: "Radiation from an Electric Dipole in a Plasma Column", Proc. IEE, 112, p.249 (Feb., 1965).

(6) C.T. Tai: "The Dyadic Green's Function for a Moving Isotropic Medium", IEEE Trans. (Communications), AP-13, p.322 (March, 1965).

輻射科学研究会資料

# 大地に平行に運動する電離層によるＶＬＦ伝搬

小嶋敏孝　板倉清保
（大阪大学・工学部）

1968年11月29日

## 1. まえがき

運動する分散性媒質，および非分散性媒質における波動伝搬に関する問題は，最近，新たなる興味の対象となり，多数の研究結果が報告されている．LeeとPapas[1]は運動する無限の広がりを有する分散性媒質における放射の問題について論じ，またTai[2]は非分散の媒質が運動している場合の，dyadic Green関数を導いている．他方，有限の広がりを有する非分散性媒質が運動している場合のGreens dyadic関数についてはSeto[3]によって報告されている．また，BergerとGriemsmann[4]は運動する分散性媒質を含む導波管について報告している，また，著者等によって，プラズマで被覆された運動金属円柱による平面電磁波の散乱について報告されている．[10]

本稿では，簡単なモデルを用いて，一様な速度で，大地に平行に運動する電離層と大地間における$VLF$電波の伝搬について考察した．すでに$VLF$伝搬については，J.R.Wait[5],[6]，Gelejs[7]，Seshadri[8]等によって多数の研究が報告されている．しかし，それらは全て，電離層が静止している場合であって，任意の速度で運動している場合については，まだ取扱われていないようである．

## 2. 問題の定式化

図1に示すように座標系を選ぶ．媒質Ⅰは自由空間であり，媒質Ⅱは等方均質，非圧縮プラズマであり，速度

$$V = \hat{x}\, v \qquad (1)$$

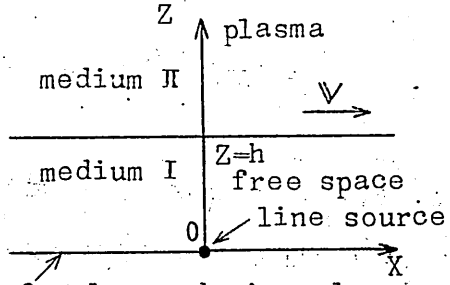


図1 座標系

で，大地に平行に，一様に運動しているものとする．さらに，大地は完全導体の平面とみなす．線条磁流源は，$x = 0$，$z = 0$の完全導体平面上にあり$y$軸に平行におかれているものとする．したがって，波源はつぎの式で与えられる．

$$E_x(x) = E_0 \delta(x) \tag{2}$$

波源は$e^{-j\omega t}$なる時間変化をするものとする．

線条磁流源の静止系において，Maxwell の方程式と運動媒質に関する構成方程式は次式で与えられる．

（媒質Ⅰ）

$$\nabla \times E_1 = j\omega\mu_0 H_1 \tag{3a}$$

$$\nabla \times H_1 = -j\omega\varepsilon_0 E_1 \tag{3b}$$

（媒質Ⅱ）

$$\nabla \times E_2 = j\omega B \tag{4a}$$

$$\nabla \times H_2 = -j\omega D \tag{4b}$$

$$D + \frac{1}{C^2} V \times H_2 = \varepsilon_p (E_2 + V \times B) \tag{5a}$$

$$B - \frac{1}{C^2} V \times E_2 = \mu_p (H_2 - V \times D) \tag{5b}$$

ここで，$\varepsilon_p$，$\mu_p$は電離層の静止系における，電離層の誘電率，および透磁率であり，$C$は自由空間中の光速である．

電磁界成分は，$y$座標には依存しないので，$E$姿態と$H$姿態に分離される

が，磁流源が存在するので，$H$姿態は励振されない．したがって$H_x = H_z = E_y = 0$．媒質Ⅰにおいて，式(2)，および(3)より，$H_{1y}$についてつぎの微分方程式を得る．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right] H_{1y}(x, z) = 0 \tag{6}$$

ここで

$$k_0^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \tag{7}$$

$E_{1x}$，$E_{1z}$は次式で与えられる．

$$E_1 = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \nabla \times H_1 \tag{8}$$

媒質Ⅱにおいて，波動方程式を得るために，式(5)よりD，Bを$E_2$，$H_2$であらわす．すなわち

$$D = \varepsilon_p \bar{\alpha} \cdot E_2 + \Omega \times H_2 \tag{9a}$$

$$B = \mu_0 \bar{\alpha} \cdot H_2 - \Omega \times E_2 \tag{9b}$$

ここで

$$\Omega = \frac{n^2 - 1}{1 - n^2\beta^2} \cdot \frac{\beta}{C} x \tag{10a}$$

$$\beta = \frac{v}{C} \tag{10b}$$

$$n = \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10c}$$

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \tag{10d}$$

$$a = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2} \tag{10e}$$

そして，電離層の透磁率 $\mu_p = \mu_0$ とした．

式（9a），および（9b）を式（4a），（4b）に代入することにより，つぎの Maxwell-Minkowski の方程式を得る．

$$(\nabla + j\omega\Omega) \times E_2 = j\omega\mu_0\bar{\alpha} \cdot H_2 \tag{11a}$$

$$(\nabla + j\omega\Omega) \times H_2 = -j\omega\varepsilon_p\bar{\alpha} \cdot E_2 \tag{11b}$$

上式より $E_2$ を消去することにより，$H_2$ に対してつぎの波動方程式を得る．

$$(\nabla + j\omega\Omega) \times \left[\bar{\alpha}^{-1} \cdot (\nabla + j\omega\Omega) \times H_2\right] - k_p^2\bar{\alpha} \cdot H_2 = 0 \tag{12}$$

こゝで

$$\bar{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \tag{13a}$$

$$k_p^2 = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} k_0^2 \tag{13b}$$

式（12）を成分に分けることにより，$H_{2y}$ に対してつぎの微分方程式を得る．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2j\omega\bar{\Omega}}{a}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\omega^2\bar{\Omega}^2}{a}+a k_p^2\right] H_{2y}(x,z)=0 \quad (14)$$

ここで，

$$\bar{\Omega}=\frac{n^2-1}{1-n^2\beta^2}\cdot\frac{\beta}{C} \quad (15)$$

$E_{2x}$，$E_{2z}$ は次式で与えられる．

$$\mathrm{E}_2=-\frac{1}{j\omega\varepsilon_p}\bar{\alpha}^{-1}\cdot(\nabla+j\omega\boldsymbol{\Omega})\times\mathrm{H}_2 \quad (16)$$

全電磁界成分を求めるためには，式(6)と（14）を適当な境界条件のもとで解かなければならない．いま電離層は境界面に平行に運動しているので，境界条件は静止している場合と同一になる[11]．したがって境界条件は次式で与えられる．

$$E_{1x}(x,o)=E_0\overset{\delta}{g}(x) \quad (17a)$$

$$H_{1y}(x,h)=H_{2y}(x,h) \quad (17b)$$

$$E_{1x}(x,h)=E_{2x}(x,h) \quad (17c)$$

$H_{1y}(x,z)$ と $H_{2y}(x,z)$ のフーリエ変換を $\vartheta_1(\zeta,z)$，$\vartheta_2(\zeta,z)$ で定義する．すなわち，

$$\vartheta_1(\zeta,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}H_{1y}(x,z)\,e^{-j\zeta x}\,dx \quad (18a)$$

$$\mathcal{G}_2(\zeta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{2y}(x, z)\, e^{-j\zeta x}\, dx \qquad (18b)$$

したがって，フーリエ積分

$$H_{1y}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_1(\zeta, z)\, e^{j\zeta x}\, d\zeta \qquad (19a)$$

$$H_{2y}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_2(\zeta, z)\, e^{j\zeta x}\, d\zeta \qquad (19b)$$

は，$\mathcal{G}_1(\zeta, z)$，と$\mathcal{G}_2(\zeta, z)$ が次式で与えられる式を満足するなら，式(6)と式(14)の解である．

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + p^2\right) \mathcal{G}_1(\zeta, z) = 0 \qquad (20a)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + q^2\right) \mathcal{G}_2(\zeta, z) = 0 \qquad (20b)$$

ただし

$$p^2 = k_0^{\sim 2} - \zeta^2 \qquad (21a)$$

$$q^2 = a k_p^2 - \frac{\omega^2 \bar{\Omega}}{a} - \frac{2\omega\bar{\Omega}}{a}\zeta - \frac{1}{a}\zeta^2 \qquad (21b)$$

式(6)と(14)の解は，境界条件(17a)－(17c)を考慮すると，次式の積分で与えられる．

$$H_{1y}(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega\varepsilon_0 E_0}{2\Delta(\zeta)p}\left[(\varepsilon_p p-\varepsilon_0 q)e^{-jp(z-h)} + (\varepsilon_p p+\varepsilon_0 q)e^{jp(z-h)}\right] e^{j\zeta x}\,d\zeta \quad (22a)$$

$$H_{2y}(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega\varepsilon_0 E_0 \varepsilon_p}{\Delta(\zeta)} e^{jq(z-h)+j\zeta x}\,d\zeta \quad (22b)$$

ただし，

$$\Delta(\zeta) = \varepsilon_0 q\cos ph - j\varepsilon_p \sin ph \quad (23)$$

一方，電離層の静止系における，誘電率 $\varepsilon_p$ は次式で与えられる．

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0\left[1-\left(\frac{\omega_p}{\omega'}\right)^2\right] \quad (24)$$

ただし，$\omega_p$ はプラスマ角周波数で不変量であり，$\omega'$は電離層の静止系における信号周波数である．

$\omega' = \gamma(\omega - v\zeta)$ であるから，磁流源の静止系において，$\varepsilon_p$ はつぎのようにあらわされる．

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0\left[1-\frac{\omega_p^2}{\gamma^2(\omega-v\zeta)^2}\right] \quad (25)$$

ただし，

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \quad (26)$$

式(25)を式(10c),(10e),(13b),(15) に代入して，それを用いることにより，式(21b) はつぎのように簡単になる．

$$q^2 + \zeta^2 = k^2 \tag{27}$$

ただし，

$$k^2 = k_0^2 \frac{M^2 - 1}{M^2} \tag{28}$$

$$M = \frac{\omega}{\omega_p} \tag{29}$$

式(27) は運動する電離層における伝搬定数の関係を与えるが，これには運動速度の項を含まず，静止している場合と同一になる．このことは，すでに運動する等方性プラズマの特徴としてC.H.Jiang[9]によって指摘されている．

## 3. 分　散　式

式(22) の被積分関数は，図2に示すように$\omega$が$\omega_p$ より大きいか，小さいかによって，$\zeta$平面の実軸，あるいは虚軸上で，$\zeta = \pm k$に分岐点を持つ．また，式(22) の被積分関数の極はつぎの式の根$\zeta_s$ であたえられる．

$$\Delta(\zeta_s) = 0 \tag{30}$$

式(30) の実根は，$x$軸方向に伝搬する波動を与えることがわかる．式(23) より，$p$が実数で，$q$が虚数か，あるいは$p$，$q$ともに虚数の場合のみに，

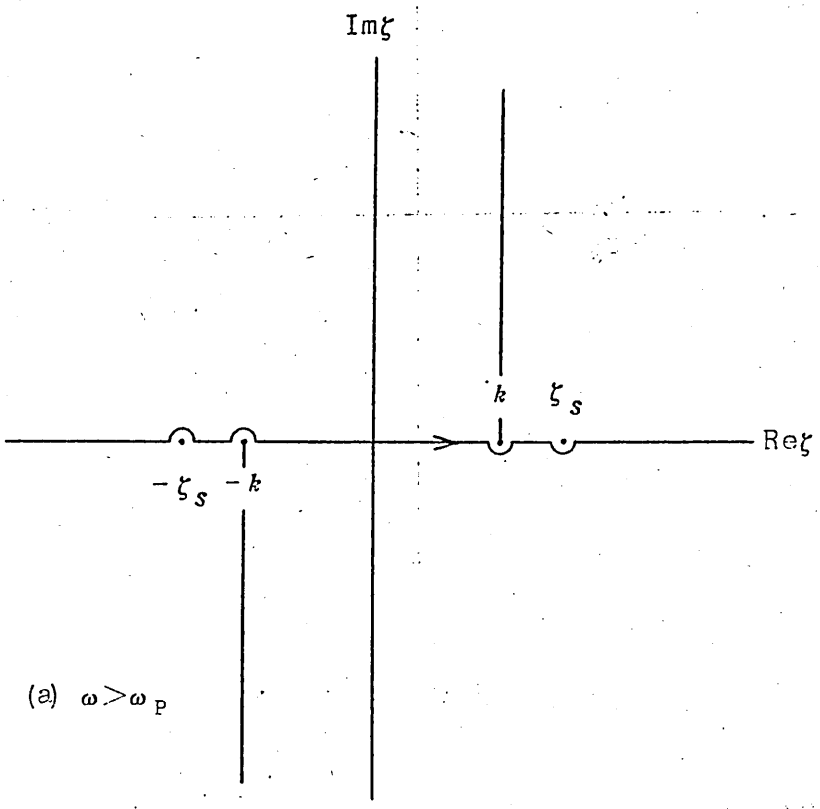



図2.(a) ζ 平面の積分路

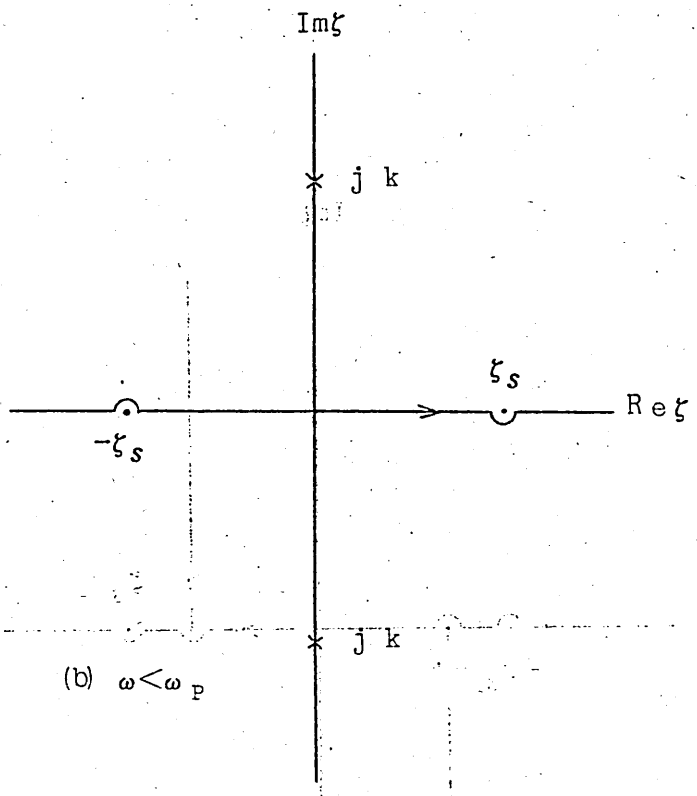



図2.(a) ζ 平面の積分路

根が存在することがわかる．すなわち前者はファースト・ウエーブモードの波を与え，後者はスローウエーブモードの波を与えることがわかる．

したがって，式(21a),(23),(27) より各々のモードに対する分散式はつぎのようになる．

(I) ファースト・ウエーブモード ( $C/V_p<1$ )

$$\left[\gamma^2\left(1-\beta\frac{C}{V_p}\right)^2\Lambda^2-1\right]\sqrt{1-\left(\frac{C}{V_p}\right)^2}\cdot\sin\left(\alpha\Lambda\sqrt{1-\left(\frac{C}{V_p}\right)^2}\right)$$

$$=\gamma^2\left(1-\beta\frac{C}{V_p}\right)^2 A\sqrt{A^2\left(\frac{C}{V_p}\right)^2-(A^2-1)}\cdot\cos\left(\alpha A\sqrt{1-\left(\frac{C}{V_p}\right)^2}\right) \quad (31)$$

(B) スロー・ウエーブモード ( $C/V_p > 1$ )

$$\left[1-\gamma^2\left(1-\beta\frac{C}{V_p}\right)^2 A^2\right]\sqrt{\left(\frac{C}{V_p}\right)^2-1}\cdot\sinh\left(\alpha A\sqrt{\left(\frac{C}{V_p}\right)^2-1}\right)$$

$$=\gamma^2\left(1-\beta\frac{C}{V_p}\right)^2 A\sqrt{A^2\left(\frac{C}{V_p}\right)^2-(A^2-1)}\cdot\cosh\left(\alpha A\sqrt{\left(\frac{C}{V_p}\right)^2-1}\right) \quad (32)$$

ここで,

$$V_p=\frac{\omega}{\zeta S}\quad,\qquad \alpha=\frac{\omega_p h}{C} \quad (33)$$

したがって $V_p$ は $x$ 軸方向に伝搬する波の位相速度になる．式 (30) と (31) で $\beta=0$ とすると，電離層が静止している場合の分散式[8]に一致することがわかる．さらに，媒質Ⅱが静止している場合は，$x$ 軸の正方向と負方向の伝搬定数は絶対値が等しく，符号が異るのみで，対称性を保持しているが，媒質が運動している場合には，$x$ 軸の正方向と負方向の伝搬定数は絶対値も異なる．これは媒質の運動によつて，分散式に $\beta$ と $\zeta$ の積の一次の項が含まれるからである．式 (30) のファースト・ウエーブについて数値計算をおこない，特定の $\alpha$; $A$ に対して，正規化伝搬定数 $C/V_p$ の $\beta$ に対する変化図を図3，図4に示した．ただし，$\alpha$ は電離層の高さ70Km，およびプラズマ角周波数 $\omega_p \simeq 0.5\times10^6$ に選んだ値を用い，$\alpha=10^2$ とした．また $A$ は $VLF$ の周波数帯域で，$5\times10^2 < A < 5\times10^{-1}$ の通を選んだ．さらに図におい

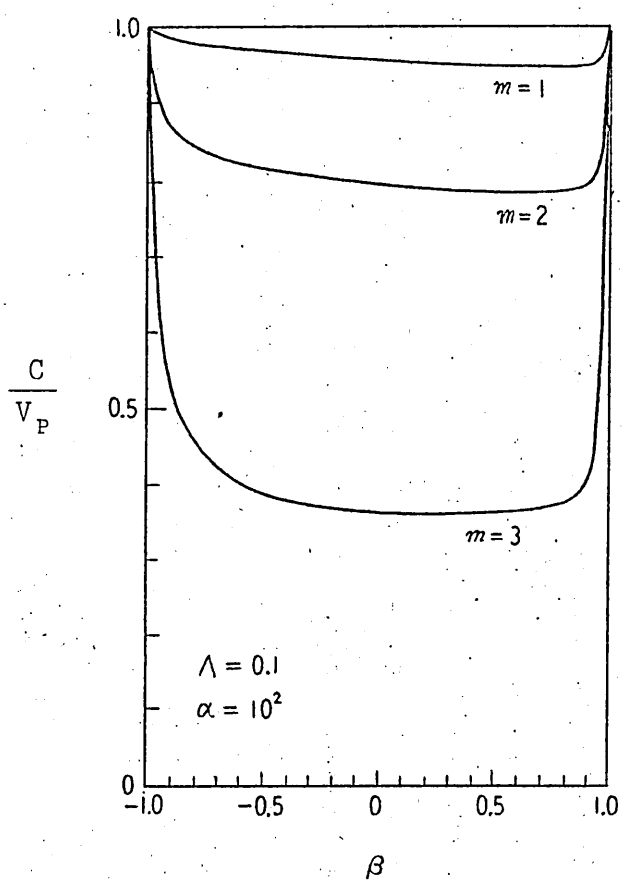

1.0
0.5
0
C/V_P
m = 1
m = 2
m = 3
Λ = 0.1
α = 10²
−1.0
−0.5
0
0.5
1.0
β

図 4．分　　散　　図

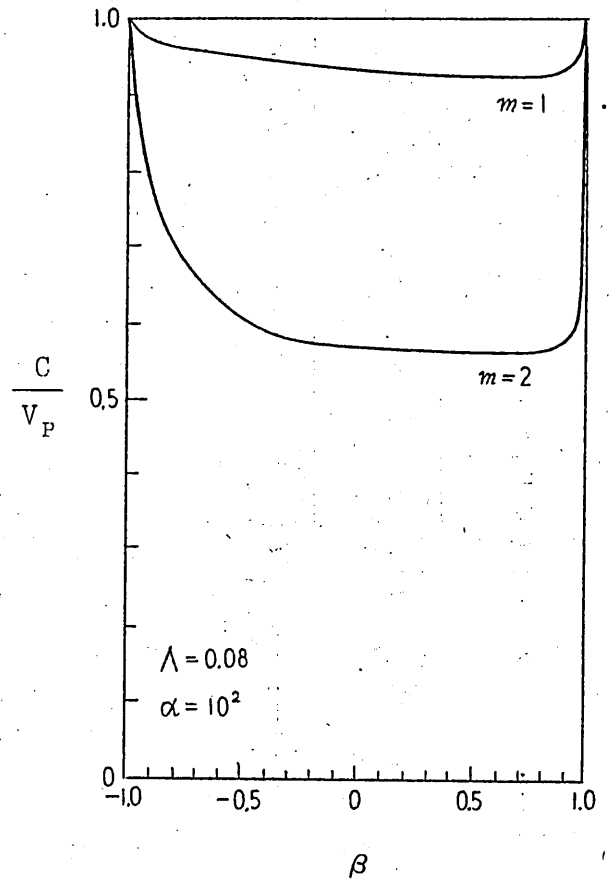

1.0
0.5
0
C/V_P
m = 1
m = 2
Λ = 0.08
α = 10²
−1.0
−0.5
0
0.5
1.0
β

図 3．分　　散　　図

て，$m=1$，2，3は最低次の姿態より，順次高次の姿態をあらわす．図3図4より，つぎのことがわかる．すなわち，媒質Ⅱの速度が小さい場合は，伝搬定数はほとんど速度の影響を受けないが，$\beta$が大きくなるにつれて，$C/V_p$は増加し，$|\beta|\to 1$の極限では$C/V_p\to 1$になり，もはや導波管モードの波動は伝搬しなくなる．さらに，媒質Ⅱの運動方向と同方向の伝搬定数は，$\beta$の増加にともない一時的にわずか減少するが，$\beta$のある点より急に増加する．媒質Ⅱの運動方向と逆方向の伝搬定数は$\beta$とともに増加する．

## 4. エネルギー関係

本節では，フアーストウエーブによって$x$軸の正方向に運ばれる全電力について考察する．$x>0$にたいして，式(22a)と(22b)の積分は，$\vartheta$平面を囲むことによって与えられる．積分路は図2に示すように，極と，分岐点を適当に囲むようにとる．式(22a)と(22b)の積分は，極における留数と分岐上の積分との和で与えられる．$x$が十分に大きければ，分岐の寄与は，極の寄与にくらべて無視できる．したがって極の寄与は留数定理を用いるとつぎのようになる．

$$H_{1y}(x,z)=H_0\left[\bar{\varepsilon}\sqrt{k_0^2-\zeta_S^2}\cdot\cos\left\{(z-h)\cdot\sqrt{k_0^2-\vartheta_S^2}\right\}-\sqrt{\zeta_S^2-k^2}\cdot\sin\left\{(z-h)\sqrt{k_0^2-\zeta_S^2}\right\}\right]e^{j\zeta_S x},\quad 0<z\lesseqgtr h, \tag{34a}$$

$$H_{2y}(x,z)=H_p\,e^{j\zeta_S x-\sqrt{\zeta_S^2-k^2}(z-h)},\quad h<z<\infty \tag{34b}$$

ここで，

$$H_0 = \frac{\omega \varepsilon_0 H_0}{\Delta'(\zeta_S)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_0^2 \ \zeta_S^2}} \tag{35a}$$

$$H_p = \frac{\omega \varepsilon_0 E_0 \bar{\varepsilon}}{\Delta'(\zeta_S)} \tag{35b}$$

そして，$\Delta'(\zeta_S)$は，$\zeta = \zeta_S$ における$\Delta(\zeta)$の一次導関数である．すなわち

$$\Delta'(\zeta_S) = \left[ \frac{\zeta_S}{\sqrt{\zeta_S^2 - k^2}} + \zeta \bar{\varepsilon} \right] \cdot \cos\left( h \sqrt{k_0^2 - \zeta_S^2} \right)$$

$$+ \left[ \frac{\zeta_S h \sqrt{\zeta_S^2 - k^2} + \zeta_S \bar{\varepsilon}}{\sqrt{k_0^2 - \zeta_S^2}} + \frac{2 v \omega_p^2 \sqrt{k_0^2 - \zeta_S^2}}{\gamma^2 (\omega - v \zeta_S)^3} \right]$$

$$\cdot \sin\left( h \sqrt{k_0^2 - \zeta_S^2} \right) \tag{36a}$$

そして，

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} \tag{36b}$$

式(34a)と(34b)はフアーストウエーブモードに対してのみ成立する．スローウエーブに対応するものは，簡単のため省略する．

$y-z$平面に平行な面の単位面積を通過するエネルギーの時間平均は次式によって与えられる．

$$\bar{S} = \frac{1}{2} R_e \left[ E \times H^* \right] \tag{37}$$

各々の媒質で，フアーストウエーブによって運ばれる全電力は

$$P_I = P_I^+ + P_I^- \tag{38a}$$

$$P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{II}}^{+} + P_{\mathrm{II}}^{-} \qquad (38b)$$

で与えられる．ただし，$P_{\mathrm{I}}^{+}, P_{\mathrm{I}}^{-}$，$P_{\mathrm{II}}^{+}, P_{\mathrm{II}}^{-}$ は各媒質における，$x$ 軸の正および負方向に流れる電力である．電離層が運動している場合は，$x$ 軸の正，および負方向の伝搬定数の非対称より，つぎの関係が成り立つ．

$$P_{\mathrm{I}}^{+} \neq P_{\mathrm{I}}^{-} \qquad (39a)$$

$$P_{\mathrm{II}}^{+} \neq P_{\mathrm{II}}^{-} \qquad (39b)$$

また，$P_{\mathrm{I}}^{\pm}, P_{\mathrm{II}}^{\pm}$ は次式の積分で与えられる．

$$P_{\mathrm{I}}^{\pm} = \frac{1}{2} Re \int_{o}^{h} \left[ -E_{1z}^{\pm}(x,z) \cdot \overset{*}{H}_{1y}^{\pm}(x,z) \right] dz \qquad (40a)$$

$$P_{\mathrm{II}}^{\pm} = \frac{1}{2} Re \int_{h}^{\infty} \left[ -E_{2z}^{\pm}(x,z) \cdot \overset{*}{H}_{2y}^{\pm}(x,z) \right] dz \qquad (40b)$$

ここで，$(E_z^{+}, H_y^{+})$，$(E_z^{-}, H_y^{-})$ は $x$ 軸の正および負方向のエネルギーの流れに寄与する電磁界成分である．

式(8)，(34a)，(16)，(34b)を用いることにより，式(40a)と(40b)はつぎのようになる．

$$P_{\mathrm{I}}^{\pm} = P_0 \frac{1}{F^2 A^2} \left( \frac{C}{V_p^{\pm}} \right) \left[ \frac{(G \cdot A)^2 + B^2}{2} \alpha A + \frac{(G \cdot A)^2 - B^2}{4A} \sin(2\alpha A A) + \frac{G \cdot B}{2} \left\{ 1 - \cos(2\alpha A A) \right\} \right] \qquad (41a)$$

$$P_{\mathrm{II}}^{\pm} = P_0 \frac{G}{2B \cdot F^2} \left[\frac{D^2A^2+\beta^2}{D^2A^2}\right]\left[\left(\frac{C}{V_p^{\pm}}\right) - \frac{\beta}{D^2A^2+\beta^2}\right] \qquad (41b)$$

ここで，

$$P_0 = \frac{1}{2}\ \omega\ \varepsilon_0 E_0^2 \qquad (42a)$$

$$G = 1 - \frac{1}{\gamma^2 D^2 A^2} \qquad (42b)$$

$$A = \sqrt{1 - \left(\frac{C}{V_p^{\pm}}\right)^2} \qquad (42c)$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{C}{V_p^{\pm}}\right)^2 - \frac{A^2-1}{A^2}} \qquad (42d)$$

$$D = 1 - \beta \frac{C}{V_p^{\pm}} \qquad (42e)$$

$$F = \left(\frac{C}{V_p^{\pm}}\right) \cdot \left[\frac{1}{B} + \alpha A G\right] \cdot \cos(\alpha A A) + \left[\frac{1}{A} \cdot \left(\frac{C}{V_p^{\pm}}\right) \cdot (\alpha A B + G) + \frac{2\beta A}{\gamma^2 D^3 A^2}\right] \cdot \cos(\alpha A A) \qquad (42f)$$

そして，$V_p^{\pm}$は$x$軸の正，および負方向へ伝搬する波の位相速度をあらわしている．

各モードによって，$x$軸の正方向，および負方向へ運ばれる全電力を，それぞれ$P^+$，および$P^-$とすれば，それらは

$$P^+ = P_{\mathrm{I}}^- + P_{\mathrm{II}}^- \qquad (43a)$$

$$P^- = P_{\mathrm{I}}^- + P_{\mathrm{II}}^- \qquad (43b)$$

であらわされる．したがって，単位長当たりの線条磁流源によって，各々のモードに放射される全電力は，次式によって与えられる．

$$P = P^+ + P^- \qquad (44)$$

フアーストウエーブに放射される電力が，媒質Ⅱの速度によってどのように変化するかを図５に示した．図より，正規化電力$P^+/P_0$の$\beta$に対する変化は$A$の値によって異なった様相を呈することがわかる．$|\beta| \to 1$の極限では正規化電力は急激に減少するが，これは運動する電離層の等価的な誘電率が$\varepsilon_0$に近づくためである．

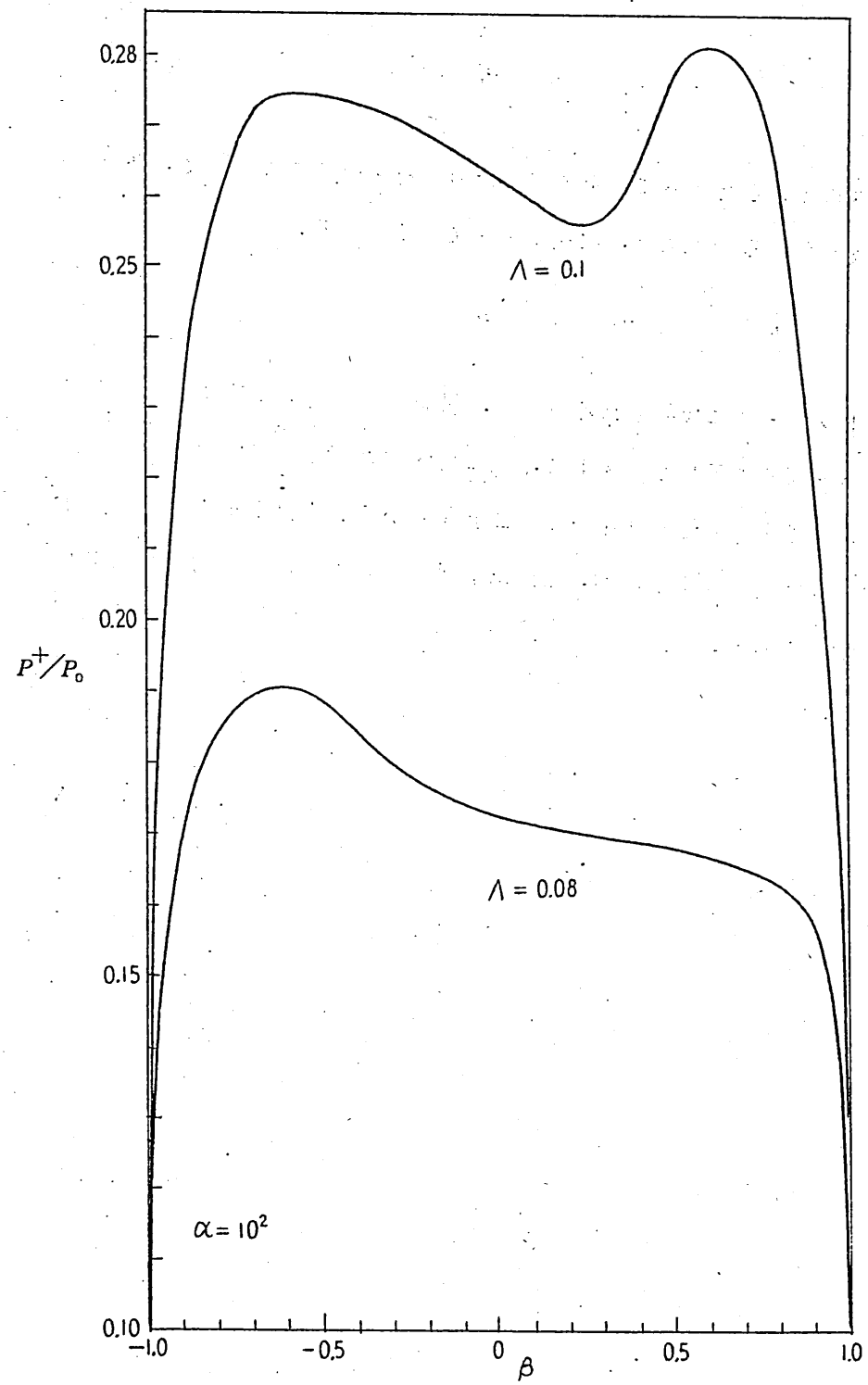



図 5.　$x$ 軸の正方向に伝搬する導波管モードの波動に放射される電力

## 謝　　辞

本研究において，有益なる御討論をいただいた大阪大学工学部通信工学教室板倉研究室の小山正樹，塩沢俊之，藤岡弘の各氏をはじめ板倉研究室の方方に深謝する．

## 文　　献

(1) K.S.H. Lee and Papas:"Antenna radiation in a moving dispersive medium", IEEE Trans., AP-13, p.799(Sept. 1965).

(2) C.T. Tai:"A study of electrodynamics of moving media" Proc. IEEE, 52, p.689 (June 1964).

(3) Y.J. Seto:"The green's dyadic for radiation in a bounded simple moving medium", IEEE Trans., MTT-15, p.455 (Aug. 1966).

(4) H. Berger and J.W.E. Griemsmann:"Guided waves in moving dispersive media:Part I,II", IEEE Trans., MTT-16, p.11 (Jan. 1968).

(5) J.R. Wait:"Terrestrial propagation of very-low-frequency radio waves-a theoretical investigation", J. Res. NBS, 64D, No.2, p.156.

(6) J.R. Wait:"On the propagation of VLF and ELF radio waves when the ionosphere is not sharply bounded",

J. Res. NBS, 64D, No.1, p.53

(7) J. Gelejs:"ELF waves in the presence of exponential ionospheric conductivity profiles", IRE Trans., AP-9, p.554 (Nov. 1961).

(8) S.R. Seshadri:"VLF propagation in a sharply bounded, compressible, isotropic ionosphere", IEEE Trans., AP-13, p.311 (Mar. 1965).

(9) C.L. Jiang:"Transformation theory of guided waves in moving media", J. appl. Phys., 38, p.3692 (Aug. 1967).

(10) 小嶋敏孝，板倉清保："プラズマで被覆された運動金属円柱による平面電磁波の散乱"信学論，51-B，4，（研究速報），p.513（昭43-10）

(11) A. Sommerfeld:"Electrodynamics", p.280, Academic press Inc. (1952).

輻射科学研究会資料

# 誘電体境界平面による
# ビーム波の反射と透過

根本承次郎　　牧本利夫
（大阪大学　基礎工学部）

1968年 11月 29日
（於　松下電器産業株式会社　中央研究所）

## §まえがき

ビーム波に関するもっとも基本的な境界値問題である誘電体境界平面によるビーム波の反射と透過については すでに文献(1)で考察されているが，ビーム波の伝搬方向に垂直な単一境界平面による反射波と透過波の導出にとどまり，実用上重要な誘電体平板やビーム波の伝搬方向に対して傾斜した境界平面による反射と透過についての具体的な報告はまだなされていない。

本報告では，境界面が平面である場合の取り扱いに便利な直角座標系でのビーム波をとりあげ，ビーム波の伝搬方向に垂直な単一境界平面および誘電体平板によるビーム波の反射につき，誘電体がわずかな損失をもつ場合を含めてややくわしく考察した。また，ビーム波の伝搬方向に対して傾斜した単一境界平面によるビーム波の反射と透過についても簡単な考察をおこなった。

## §1 直角座標系におけるビーム波の導出

一様な導電性媒質中における電界および磁界ベクトル $\mathbb{E}$, $\mathbb{H}$ は，電気的および磁気的ヘルツベクトル $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$ より次式によって導びかれる電磁界 $\mathbb{E}^{(1)}$, $\mathbb{H}^{(1)}$; $\mathbb{E}^{(2)}$, $\mathbb{H}^{(2)}$ の和として与えられる(2)

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{E}^{(1)} &= \nabla\times\nabla\times\Pi^{(1)}, & \mathbb{H}^{(1)} &= \left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma\right)\nabla\times\Pi^{(1)} \\ \mathbb{E}^{(2)} &= -\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\Pi^{(2)}, & \mathbb{H}^{(2)} &= \nabla\times\nabla\times\Pi^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

$$\mathbb{E}=\mathbb{E}^{(1)}+\mathbb{E}^{(2)}, \qquad \mathbb{H}=\mathbb{H}^{(1)}+\mathbb{H}^{(2)} \qquad (1.2)$$

ただし，$\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ はそれぞれ媒質の誘電率，透磁率，導電率である。今，$\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$ が次式で与えられる場合を考える。

$$\left.\begin{aligned} \Pi^{(1)} &= (\Pi_x^{(1)}, \Pi_y^{(1)}, \Pi_z^{(1)}) = (0, 0, \psi^{(1)}) \\ \Pi^{(2)} &= (\Pi_x^{(2)}, \Pi_y^{(2)}, \Pi_z^{(2)}) = (0, 0, \psi^{(2)}) \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

このような $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$ によって得られる電磁波はそれぞれ TM, TE 波であり，(1.1), (1.3) より $\mathbb{E}^{(1)}$, $\mathbb{H}^{(1)}$; $\mathbb{E}^{(2)}$, $\mathbb{H}^{(2)}$ の直角座標成分は次式で与えられる。

$$E_x^{(1)}=\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial z\partial x},\quad H_x^{(1)}=(\sigma+j\omega\varepsilon)\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial y}$$
$$E_y^{(1)}=\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial z\partial y},\quad H_y^{(1)}=-(\sigma+j\omega\varepsilon)\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}$$
$$E_z^{(1)}=-\left[\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial y^2}\right],\quad H_z^{(1)}=0 \qquad (1.4)$$

$$E_x^{(2)}=-j\omega\mu\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial y},\quad H_x^{(2)}=\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial z\partial x}$$
$$E_y^{(2)}=j\omega\mu\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x},\quad H_y^{(2)}=\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial z\partial y}$$
$$E_z^{(2)}=0,\quad H_z^{(2)}=-\left[\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial y^2}\right] \qquad (1.5)$$

ただし，$\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ の時間因子は $\exp(j\omega t)$ を仮定している。
$\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ は次の波動方程式をみたす。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+(\omega^2\mu\varepsilon-j\omega\mu\sigma)\psi=0 \qquad (1.6)$$

上式の一般解は，$g(k_1,k_2)$ を，次の等式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint_{-\infty}^{\infty} g(k_1,k_2)e^{j(k_1x+k_2y+k_3z)}\,dk_1\,dk_2$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(k_1,k_2)e^{j(k_1x+k_2y+k_3z)}\,dk_1\,dk_2 \qquad (1.7)$$

（$y$, $z$ についても同様）をみたす任意関数として次式で与えられる。

$$\psi(x,y,z)=\iint_{-\infty}^{\infty} g(k_1,k_2)e^{j(k_1x+k_2y+k_3z)}\,dk_1\,dk_2 \qquad (1.8)$$

ただし

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2=\omega^2\mu\varepsilon-j\omega\mu\sigma \qquad (1.9)$$

であり，時間因子を省略している。$k_1$, $k_2$, $k_3$ は物理的

には，素平面波 $e^{j(\omega t+\mathbb{k}\cdot\mathbb{r})}$ の伝搬方向を示す波数ベクトル $\mathbb{k}$ の $x$，$y$，$z$ 成分を表わしている。なお，二変数 $k_1$，$k_2$ の連続関数 $g(k_1,k_2)$ について(1.7)が成り立つための十分条件は，$g\equiv g(k_1,k_2)$，として次の各無限積分が収束することである。

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}|g|\,dk_1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|k_1 g|\,dk_1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|k_1^2 g|\,dk_1\\ &\iint_{-\infty}^{\infty}|g|\,dk_1dk_2,\quad \iint_{-\infty}^{\infty}|k_1 g|\,dk_1dk_2,\quad \iint_{-\infty}^{\infty}|k_1^2 g|\,dk_1dk_2\end{aligned}\right\}\quad(1.10)$$

$\psi^{(1)}$，$\psi^{(2)}$ を与えるスペクトル関数 $g$ を $g^{(1)}$，$g^{(2)}$ とすると

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(1)}&=\iint_{-\infty}^{\infty}g^{(1)}(k_1,k_2)\,e^{j(k_1x+k_2y+k_3z)}\,dk_1dk_2\\ \psi^{(2)}&=\iint_{-\infty}^{\infty}g^{(2)}(k_1,k_2)\,e^{j(k_1x+k_2y+k_3z)}\,dk_1dk_2\end{aligned}\right\}\quad(1.11)$$

であり，上式を(1.4)，(1.5)に代入し，(1.2)を用いると $E$，$H$ の各成分は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}E_x&=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[-k_1k_3g^{(1)}+\omega\mu k_2g^{(2)}\right]e^{j\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}\,dk_1dk_2\\ E_y&=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[-k_2k_3g^{(1)}-\omega\mu k_1g^{(2)}\right]e^{j\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}\,dk_1dk_2\\ E_z&=\iint_{-\infty}^{\infty}(k_1^2+k_2^2)\,g^{(1)}e^{j\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}\,dk_1dk_2\end{aligned}\right\}\quad(1.12)$$

$$\left.\begin{aligned}H_x&=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[j(\sigma+j\omega\varepsilon)k_2g^{(1)}-k_1k_3g^{(2)}\right]e^{j\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}\,dk_1dk_2\\ H_y&=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[-j(\sigma+j\omega\varepsilon)k_1g^{(1)}-k_2k_3g^{(2)}\right]e^{j\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}\,dk_1dk_2\\ H_z&=\iint_{-\infty}^{\infty}(k_1^2+k_2^2)\,g^{(2)}e^{j\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}\,dk_1dk_2\end{aligned}\right\}\quad(1.13)$$

$$\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}=k_1x+k_2y+k_3z$$

(1.9) より 次式が得られる。

$$k_3^2 = k^2\left[1-\left(\frac{k_1^2+k_2^2}{k^2}+j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\right], \quad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \qquad (1.14)$$

ここで, (1.12), (1.13) における積分範囲を, $k_{10}, k_{20}$ を $k$ にくらべて十分小さい正数として

$$|k_1| \le k_{10} \ll k, \quad |k_2| \le k_{20} \ll k \qquad (1.15)$$

とする。このことは波数空間を考えれば わかるように, $k_3$ 方向, すなわち $z$ 軸方向, と十分小さな立体角をなす方向へ伝搬する素平面波のみを考えることであるから, スペクトル関数 $g^{(1)}, g^{(2)}$ が (1.15) の範囲でのみ大きな値をもつと仮定しなければならない。[3] (1.15) より

$$\frac{k_1^2+k_2^2}{k^2} \le \frac{k_{10}^2+k_{20}^2}{k^2} \ll 1 \qquad (1.16)$$

が成り立つ。よって, $\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$, とすれば (1.14) より $k_3$ は次式で近似できる。

$$k_3 \simeq -\hat{k} + \frac{k_1^2+k_2^2}{2k}, \quad \hat{k} \equiv k\left(1-j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \qquad (1.17)$$

次に, 先に述べた $g^{(1)}, g^{(2)}$ に対する仮定を強めて, $g^{(1)}, g^{(2)}$ を, $|k_1| > k_{10}$, $|k_2| > k_{20}$, の範囲では急速に 0 に近づく関数にえらび, 積分範囲を $(-\infty, \infty)$ に拡張する。また, 次の各式

$$j(\sigma+j\omega\varepsilon) \simeq -\omega\varepsilon, \quad \omega\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}k, \quad \omega\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}k \qquad (1.18)$$

および (1.17) の $k_3$ を (1.12), (1.13) に代入すると次式が得られる。ただし, $k_3$ については, 振幅項には, $k_3 \simeq -k$, 位相因子には (1.17) を代入する。

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= ke^{-j\hat{k}z}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[k_1 g^{(1)} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}k_2 g^{(2)}\right]e^{j\varphi(k_1,k_2)}\,dk_1dk_2 \\
E_y &= ke^{-j\hat{k}z}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[k_2 g^{(1)} - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}k_1 g^{(2)}\right]e^{j\varphi(k_1,k_2)}\,dk_1dk_2 \\
E_z &= e^{-j\hat{k}z}\iint_{-\infty}^{\infty}(k_1^2+k_2^2)\,g^{(1)}e^{j\varphi(k_1,k_2)}\,dk_1dk_2
\end{aligned}\right\} \qquad (1.19)$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,k\,e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[k_2 g^{(1)} - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,k_1 g^{(2)}\right] e^{j\varphi(k_1,k_2)}\,dk_1 dk_2 \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,k\,e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[k_1 g^{(1)} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,k_2 g^{(2)}\right] e^{j\varphi(k_1,k_2)}\,dk_1 dk_2 \\ H_z &= e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty}(k_1^2+k_2^2)\,g^{(2)} e^{j\varphi(k_1,k_2)}\,dk_1 dk_2 \end{aligned}\right\} \quad (1.20)$$

$$\varphi(k_1,k_2) \equiv k_1 x + k_2 y + \frac{k_1^2+k_2^2}{2k} z \qquad (1.21)$$

ここで，$u=k_1$，$v=k_2$，と変数を変え（$k_{10}$，$k_{20}$ に対応する $u$，$v$ を $u_1$，$v_1$ とする）

$$\left.\begin{aligned} f(u,v) &\equiv k\left[u\,g^{(1)}(u,v) + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,v\,g^{(2)}(u,v)\right] \\ h(u,v) &\equiv k\left[v\,g^{(1)}(u,v) - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,u\,g^{(2)}(u,v)\right] \end{aligned}\right\} \quad (1.22)$$

とおく。すなわち，上の二式より

$$\left.\begin{aligned} (u^2+v^2)\,g^{(1)}(u,v) &= \frac{1}{k}\left[u f(u,v) + v h(u,v)\right] \\ (u^2+v^2)\,g^{(2)}(u,v) &= \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[v f(u,v) - u h(u,v)\right] \end{aligned}\right\} \quad (1.23)$$

であり，(1.22)，(1.23) を用いると (1.19)，(1.20) は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} E_x &= e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,e^{j\varphi(u,v)}\,du\,dv \\ E_y &= e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty} h(u,v)\,e^{j\varphi(u,v)}\,du\,dv \\ E_z &= \frac{1}{k}e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[u f(u,v) + v h(u,v)\right] e^{j\varphi(u,v)}\,du\,dv \end{aligned}\right\} \quad (1.24)$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty} h(u,v)\,e^{j\varphi(u,v)}\,du\,dv \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,e^{j\varphi(u,v)}\,du\,dv \\ H_z &= \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[v f(u,v) - u h(u,v)\right] e^{j\varphi(u,v)}\,du\,dv \end{aligned}\right\} \quad (1.25)$$

以上のようにして得られたMaxwell方程式の近似解 $(E_x, E_y, E_z)$, $(H_x, H_y, H_z)$ に関して, (1.24), (1.25) および (1.21) より次の関係式が成り立つ。

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_y \quad , \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_x \qquad (1.26)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} - jkE_z = 0 \quad , \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} - jkH_z = 0 \qquad (1.27)$$

(1.27) は, $\nabla \cdot \mathbb{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbb{H} = 0$, に類似な式であり, また (1.26), (1.27) より

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \qquad (1.28)$$

すなわち, $(\nabla \times \mathbb{E})_z = -\mu \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t}\right)_z$, が得られる。(1.24), (1.25) より

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & f(u,v) = 0, \text{ としたとき}, \quad E_x = H_y = 0 \\ \text{(ii)} & h(u,v) = 0, \text{ としたとき}, \quad E_y = H_x = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.29)$$

となる。$f = 0$, または, $h = 0$, とするためには (1.22) より $g(u,v)$ を任意関数として

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & g^{(1)}(u,v) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, v\, g(u,v), \quad g^{(2)}(u,v) = -u\, g(u,v) \\ \text{(ii)} & g^{(1)}(u,v) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, u\, g(u,v), \quad g^{(2)}(u,v) = v\, g(u,v) \end{array}\right\} \qquad (1.30)$$

とすればよい。次節以下ではすべて (ii) の場合について考える。この場合の電磁界は (1.26), (1.27), (1.29) より次式で与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} E_x = e^{-jkz} \iint_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\, e^{j(ux+vy)}\, e^{j\frac{u^2+v^2}{2k}z}\, du\, dv \\ H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_x \quad , \quad E_z = \frac{1}{jk}\frac{\partial E_x}{\partial x} \quad , \quad H_z = \frac{1}{jk}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{array}\right\} \qquad (1.31)$$

なお, (ii) の場合, すなわち, $h(u,v) = 0$, とする場合, を考えることは, (1.23) より $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ を

$$\left.\begin{array}{l} (u^2+v^2)\, g^{(1)}(u,v) = \frac{1}{k} u f(u,v) \\ (u^2+v^2)\, g^{(2)}(u,v) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, v f(u,v) \end{array}\right\} \qquad (1.32)$$

とえらぶことである。すなわち このことは，$(u,v)=(0,0)$，での $g^{(1)}, g^{(2)}$ は不定であるから適当に定義して(たとえば0と定義して)，$g^{(1)}, g^{(2)}$ を

$$\left.\begin{aligned} g^{(1)}(u,v) &= \frac{1}{R}\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) f(u,v) \qquad (u,v)\neq(0,0) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (u,v)=(0,0) \\ g^{(2)}(u,v) &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right) f(u,v) \quad (u,v)\neq(0,0) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (u,v)=(0,0) \end{aligned}\right\} \quad (1.33)$$

とえらぶことである。次節以下では $f(u,v)$ として，次の上下いずれかの関数

$$f(u,v)=\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi u_0 v_0} e^{-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{u}{u_0}\right)^2+\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right]} \\ &\frac{s^2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}s^2(u^2+v^2)} \end{aligned}\right\} \quad (1.34)$$

を採用するが，このとき $g^{(1)}, g^{(2)}$ は，二変数 $u,v$ の連続関数ではなく，したがって (1.8) の二重積分の存在および (1.7) の成立は必ずしも保証されない。すなわち，$h(u,v)=0$，とすることができるとは必ずしもいえないが，以下，このような心配はないものと仮定して議論する。

## §2 単一境界平面によるビーム波の反射と透過

(1.31)で与えられるビーム波が下図に示すように領域Ⅰから Ⅱへ，ビーム波の伝搬方向(z軸の正方向)に垂直な境界平面に入射した場合の反射波および透過波を求める．ただし，領域Ⅰ，Ⅱをみたす媒質の定数をそれぞれ $(\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$，$(\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ とする．

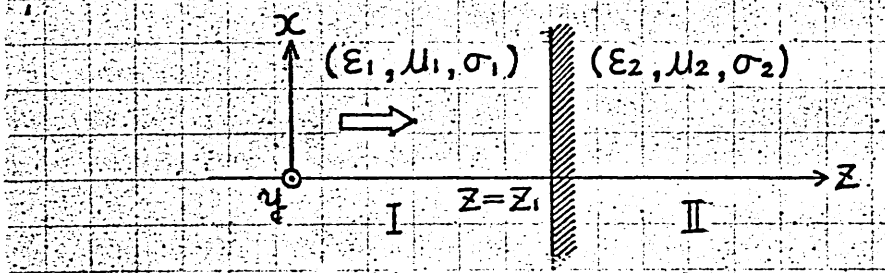



図1　単一境界平面に入射するビーム波

入射波，反射波および透過波のスペクトル関数をそれぞれ $f^i(u,v)$，$f^r(u,v)$，$f^t(u,v)$ とすれば，それぞれの波の境界面に平行な電磁界成分は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} E_x^i &= e^{-j\hat{k}_1 z}\iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{j\frac{u^2+v^2}{2\hat{k}_1}z}\, du\,dv \\ E_x^r &= e^{j\hat{k}_1 z}\iint_{-\infty}^{\infty} f^r(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{-j\frac{u^2+v^2}{2\hat{k}_1}z}\, du\,dv \\ E_x^t &= e^{-j\hat{k}_2 z}\iint_{-\infty}^{\infty} f^t(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{j\frac{u^2+v^2}{2\hat{k}_2}z}\, du\,dv \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

$$H_y^i = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_x^i, \quad H_y^r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_x^r, \quad H_y^t = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_x^t \quad (2.2)$$

境界面，$z=z_1$，における境界条件は

$$\left[E_x^i + E_x^r = E_x^t\right]_{z=z_1}, \quad \left[H_y^i + H_y^r = H_y^t\right]_{z=z_1} \quad (2.3)$$

であり，上式と(2.1)，(2.2)より次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} e^{-j\hat{k}_1 z_1} & e^{j\hat{k}_1 z_1} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}e^{-j\hat{k}_1 z_1} & -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}e^{j\hat{k}_1 z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^i(x,y) \\ g^r(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \end{pmatrix} e^{-j\hat{k}_2 z_1}\, g^t(x,y) \quad (2.4)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
g^i(x,y) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}z_1}\, du\,dv \\
g^r(x,y) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^r(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{-j\frac{u^2+v^2}{2k_1}z_1}\, du\,dv \\
g^t(x,y) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^t(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_2}z_1}\, du\,dv
\end{aligned}
\right\} \quad (2.5)
$$

(2.4) より $g^r$, $g^t$ を求めた結果は

$$
\left.
\begin{aligned}
g^r(x,y) &= R\, e^{-2j\hat{k}_1 z_1}\, g^i(x,y) \\
g^t(x,y) &= T\, e^{-j(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1}\, g^i(x,y)
\end{aligned}
\right\} \quad (2.6)
$$

$$
R \equiv \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}, \qquad T \equiv \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} \qquad (2.7)
$$

である。(2.5) より (2.6) をみたす十分条件として $f^r$, $f^t$ が次のように求められる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{f^r(u,v)}{f^i(u,v)} &= R\, e^{-2j\hat{k}_1 z_1}\, e^{j\frac{u^2+v^2}{k_1}z_1} \\
\frac{f^t(u,v)}{f^i(u,v)} &= T\, e^{-j(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1}\, e^{\frac{j}{2}\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)(u^2+v^2)z_1}
\end{aligned}
\right\} \quad (2.8)
$$

上式と (2.1), (2.2) より入射波とともに反射波，透過波は次式で与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
E_x^i &= \hat{I} F^i(x,y,z), & H_y^i &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_x^i \\
E_x^r &= \hat{R} F^r(x,y,z), & H_y^r &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_x^r \\
E_x^t &= \hat{T} F^t(x,y,z), & H_y^t &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_x^t
\end{aligned}
\right\} \quad (2.9)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{I} &\equiv e^{-j\hat{k}_1 z} \\
\hat{R} &\equiv R\, e^{j\hat{k}_1(z-2z_1)} \\
\hat{T} &\equiv T\, e^{-j[\hat{k}_2 z+(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1]}
\end{aligned}
\right\} \quad (2.10)
$$

$$\left.\begin{aligned} F^i &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}z}\, du\,dv \\ F^r &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^r(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{-j\frac{u^2+v^2}{2k_1}(z-2z_1)}\, du\,dv \\ F^t &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^t(u,v)\, e^{j(ux+vy)} e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_2}\left[z+\left(\frac{k_2}{k_1}-1\right)z_1\right]}\, du\,dv \end{aligned}\right\} \quad (2.11)$$

領域Ⅰ, Ⅱにおいて $z$ 軸の正方向に伝送される時間平均電力 $P_1$, $P_2$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(|E_x^i|^2 - |E_x^r|^2\right) dx\,dy \\ P_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \iint_{-\infty}^{\infty} |E_x^t|^2\, dx\,dy \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

上式に (2.9) を代入すると次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(|\hat{I}|^2 |F^i|^2 - |\hat{R}|^2 |F^r|^2\right) dx\,dy \\ P_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \iint_{-\infty}^{\infty} |\hat{T}|^2 |F^t|^2\, dx\,dy \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

(2.11) 第一式と Parseval の等式より

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |F^i|^2 dx\,dy = (2\pi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \left| f^i(u,v)\, e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}z} \right|^2 du\,dv$$

$$= (2\pi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f^i(u,v)|^2\, du\,dv \quad (2.14)$$

であり, 同様に

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |F^r|^2 dx\,dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |F^t|^2 dx\,dy = (2\pi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f^i(u,v)|^2 du\,dv \quad (2.15)$$

であるから (2.14), (2.15) を (2.13) に代入すると次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (2\pi)^2 \left(|\hat{I}|^2 - |\hat{R}|^2\right) \iint_{-\infty}^{\infty} |f^i(u,v)|^2\, du\,dv \\ P_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} (2\pi)^2 |\hat{T}|^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f^i(u,v)|^2\, du\,dv \end{aligned}\right\} \quad (2.16)$$

よって

$$P_2/P_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\, |\hat{T}|^2}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\left(|\hat{I}|^2 - |\hat{R}|^2\right)} \quad (2.17)$$

であり，特に，$\sigma_1=\sigma_2=0$，のとき，すなわち，$\hat{I}=1$，$\hat{R}=R$，$\hat{T}=T$，のとき，(2.17) は (2.7) より

$$P_2/P_1=1 \qquad (2.18)$$

となって無損失の場合の当然の結果が得られる。ビーム波の具体例として，入射波のスペクトル関数 $f^i(u,v)$ が次式で与えられる場合を考える。

$$f^i(u,v)=\frac{1}{4\pi u_0 v_0}e^{-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{u}{u_0}\right)^2+\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right]}, \quad u_0, v_0: \text{正の実定数} \qquad (2.19)$$

この場合，(2.9)，(2.11) より

$$E_x^i|_{z=0}=\iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)e^{j(ux+vy)}\,du\,dv$$
$$=e^{-(u_0^2x^2+v_0^2y^2)} \quad \cdots \text{位相が } x,y \text{ に無関係} \qquad (2.20)$$

であるから，入射波は，$z=0$，なる平面を等位相としてもっている。(2.9)，(2.11)，(2.19) より，入射波，反射波および透過波はそれぞれ次式で与えられる。

$$E_x^i=\hat{I}\iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)e^{j(ux+vy)}e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}z}\,du\,dv$$
$$=\hat{I}\left\{\left[1+\left(\frac{2u_0^2z}{k_1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2v_0^2z}{k_1}\right)^2\right]\right\}^{-\frac{1}{4}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\left[\frac{u_0^2x^2}{1+(2u_0^2z/k_1)^2}+\frac{v_0^2y^2}{1+(2v_0^2z/k_1)^2}\right]\right\}$$
$$\cdot\exp\left\{-j\left[\frac{(2u_0^4z/k_1)x^2}{1+(2u_0^2z/k_1)^2}+\frac{(2v_0^4z/k_1)y^2}{1+(2v_0^2z/k_1)^2}\right]\right\}$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{j}{2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2u_0^2z}{k_1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2v_0^2z}{k_1}\right)\right]\right\}$$
$$=\hat{I}\sqrt{\frac{S_xS_y}{w_x^iw_y^i}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[P_x^ix^2+P_y^iy^2\right]\right\}$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{j}{2}\left[\arg P_x^i+\arg P_y^i\right]\right\} \qquad (2.21)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
P_\alpha^i &\equiv \frac{1}{(w_\alpha^i)^2} + \frac{jk_1}{R_\alpha^i} \\
w_\alpha^i &\equiv S_\alpha \sqrt{1+\left(\frac{z}{k_1 S_\alpha^2}\right)^2} \\
R_\alpha^i &\equiv z\left[1+\left(\frac{k_1 S_\alpha^2}{z}\right)^2\right] \quad , \quad \alpha = x, y \\
S_x &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}\,u_0} \quad , \quad S_y \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\,v_0}
\end{aligned}
\right\} \quad (2.22)
$$

$$
E_x^r = \hat{R}\sqrt{\frac{S_x S_y}{w_x^r w_y^r}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[P_x^{r*}x^2 + P_y^{r*}y^2\right]\right\}
\cdot \exp\left\{-\frac{j}{2}\left[\arg P_x^r + \arg P_y^r\right]\right\} \quad (2.23)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
P_\alpha^r &\equiv \frac{1}{(w_\alpha^r)^2} + \frac{jk_1}{R_\alpha^r} \\
w_\alpha^r &\equiv S_\alpha \sqrt{1+\left(\frac{z-2z_1}{k_1 S_\alpha^2}\right)^2} \\
R_\alpha^r &\equiv (z-2z_1)\left[1+\left(\frac{k_1 S_\alpha^2}{z-2z_1}\right)^2\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (2.24)
$$

$$
E_x^t = \hat{T}\sqrt{\frac{S_x S_y}{w_x^t w_y^t}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[P_x^t x^2 + P_y^t y^2\right]\right\}
\cdot \exp\left\{\frac{j}{2}\left[\arg P_x^t + \arg P_y^t\right]\right\} \quad (2.25)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
P_\alpha^t &\equiv \frac{1}{(w_\alpha^t)^2} + \frac{jk_2}{R_\alpha^t} \\
w_\alpha^t &\equiv S_\alpha \sqrt{1+\left(\frac{z+\left(\frac{k_2}{k_1}-1\right)z_1}{k_2 S_\alpha^2}\right)^2} \\
R_\alpha^t &\equiv \left[z+\left(\frac{k_2}{k_1}-1\right)z_1\right]\left[1+\left(\frac{k_2 S_\alpha^2}{z+\left(\frac{k_2}{k_1}-1\right)z_1}\right)^2\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (2.26)
$$

以上の各式において，$w_{x,y}^{i,r,t}$ は入射波，反射波および透過波の振幅の二乗が z 軸上の値の $1/e$ 倍に下がる x, y 方向の距

離であり，それぞれの波における $x, y$ 方向のスポットサイズ[4]である。$R_{x,y}^{i,r,t}$ はそれぞれの波において $\arg P_{x,y}^{i,r,t}$ を無視したときの等位相面の主曲率半径であり，$z$ 軸の正方向に関して凸(凹)な等位相面に対して正(負)の値をとる。また $P_{x,y}^{i,r,t}$ はそれぞれの波についての $x, y$ 方向の波面係数[4]である。$(x, y, z) = (0, 0, z^{i,r,t})$ なる点を通るそれぞれの波の等位相面は，$\arg P_{x,y}^{i,r,t}$ を無視すると次式で与えられる。

$$z = z^{i,r,t} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_x^{i,r,t}} + \frac{y^2}{R_y^{i,r,t}}\right) \tag{2.27}$$

なお (2.19) の $f^i$ について

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u, v)\, du\, dv = 1 \tag{2.28}$$

であり，$u_0, v_0 \to 0$，のとき

$$f^i(0,0) = \infty \quad ; \quad f^i(u,v) = 0, \ (u,v) \neq (0,0) \tag{2.29}$$

であるから，$u_0, v_0 \to 0$，のとき $f^i$ は二次元の $\delta$-関数となる。よって，このときの $f^i$ によって与えられる入射波は $z$ 軸の正方向へ伝搬する平面波であり，(2.8)～(2.11)より，反射波および透過波も $z$ 軸の負および正方向へ伝搬する平面波である。このことは (2.21)～(2.26) において，$S_x, S_y \to \infty$，とすることによっても確かめられる。以下，

$$S_x = S_y \equiv S \tag{2.30}$$

の場合，すなわち上式と (2.22), (2.24), (2.26) より

$$\left.\begin{aligned} w_x^{i,r,t} &= w_y^{i,r,t} \equiv w^{i,r,t} \\ R_x^{i,r,t} &= R_y^{i,r,t} \equiv R^{i,r,t} \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

の場合を考える。このとき，それぞれの波のスポットサイズ，曲率半径は

$$\left.\begin{aligned} w^i(z) &= S\sqrt{1 + \left(\frac{z}{k_1 S^2}\right)^2} \\ w^r(z) &= S\sqrt{1 + \left(\frac{z - 2z_1}{k_1 S^2}\right)^2} \\ w^t(z) &= S\sqrt{1 + \left(\frac{z + (n-1)z_1}{n k_1 S^2}\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

$$R^i(z)=z\left[1+\left(\frac{k_1S^2}{z}\right)^2\right]$$

$$R^r(z)=(z-2z_1)\left[1+\left(\frac{k_1S^2}{z-2z_1}\right)^2\right] \qquad (2.33)$$

$$R^t(z)=\left[z+(n-1)z_1\right]\left[1+\left(\frac{nk_1S^2}{z+(n-1)z_1}\right)^2\right]$$

$n\equiv k_2/k_1$ ：領域Ⅱの領域Ⅰに対する相対屈折率

である。反射波の存在する領域は，$z<z_1$，なる領域Ⅰであり，透過波の存在する領域は，$z>z_1$，なる領域Ⅱであるが，反射波および透過波を，それぞれ領域Ⅱ，Ⅰへ拡張して考えると (2.32)，(2.33) より次式が成り立つ。

$$w^i(0)=w^r(2z_1)=w^t(-(n-1)z_1)=S$$

$$1/R^i(0)=1/R^r(2z_1)=1/R^t(-(n-1)z_1)=0 \qquad (2.34)$$

よって，入射波が，$z=0$，なる平面を等位相面としてもち，かつ，この位置で最小のスポットサイズ S をもつのに対応して，反射波および透過波は，それぞれ領域Ⅱ，Ⅰにおいて

$$z=2z_1\ ,\quad z=-(n-1)z_1 \qquad (2.35)$$

なる仮想的な等位相面をもち，かつ，この位置で仮想的な最小のスポットサイズ S をもつ。また (2.32)，(2.33) より次式が成り立つ。

$$w^r(z_1)=w^t(z_1)=w^i(z_1)$$

$$\left(\frac{dw^r}{dz}\right)_{z_1}=-\left(\frac{dw^i}{dz}\right)_{z_1}\ ,\quad \left(\frac{dw^t}{dz}\right)_{z_1}=\frac{1}{n}\left(\frac{dw^i}{dz}\right)_{z_1} \qquad (2.36)$$

$$R^r(z_1)=-R^i(z_1)\ ,\quad R^t(z_1)=nR^i(z_1)$$

$$\left(\frac{dR^r}{dz}\right)_{z_1}=\left(\frac{dR^i}{dz}\right)_{z_1}\ ,\quad \left(\frac{dR^t}{dz}\right)_{z_1}-1=\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{dR^i}{dz}\right)_{z_1}-1\right] \qquad (2.37)$$

さらに，(2.36) 第二式と (2.37) 第一式より次の関係式

$$R^i(z_1)\left(\frac{dw^i}{dz}\right)_{z_1}=R^r(z_1)\left(\frac{dw^r}{dz}\right)_{z_2}=R^t(z_1)\left(\frac{dw^t}{dz}\right)_{z_1} \qquad (2.38)$$

が得られる。上式は，スポットサイズの軌跡と等位相面とが

ほぼ直交していることを示す次の関係式

$$\frac{dw^{\alpha}}{dz}=\frac{w^{\alpha}(z)}{R^{\alpha}(z)} \qquad \alpha=i,r,t \tag{2.39}$$

と(2.36)第一式のスポットサイズの連続性からも得られる。図2に，入射波，反射波および透過波の伝搬のようすを，スポットサイズのzによる変化を通して定性的に示す。

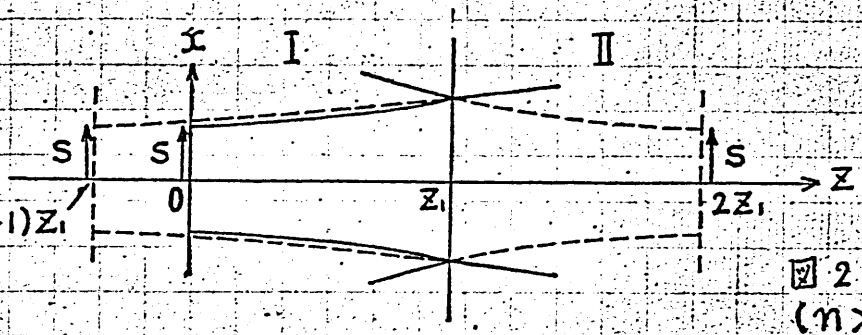



図2-a
$(n>1)$

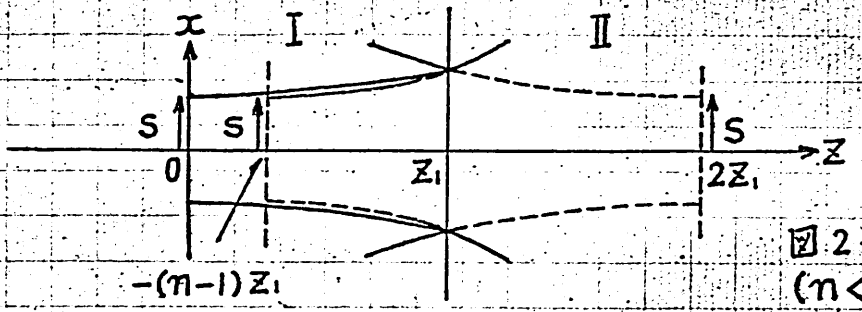



図2-b
$(n<1)$

図2 入射波，反射波，透過波の伝搬のようす

今，z座標を規格化して

$$\zeta\equiv z/z_1 \quad , \quad W^{i,r,t}(\zeta)\equiv w^{i,r,t}(z) \tag{2.40}$$

とおけば(2.36)第一式より

$$W^{i}(1)=W^{r}(1)=W^{t}(1)\equiv W(1) \tag{2.41}$$

であり，(2.32)より

$$\left.\begin{aligned}
\bar{W}^{i}(\zeta)&\equiv\frac{W^{i}(\zeta)}{W(1)}=\sqrt{\frac{1+\eta^2\zeta^2}{1+\eta^2}}\\
\bar{W}^{r}(\zeta)&\equiv\frac{W^{r}(\zeta)}{W(1)}=\sqrt{\frac{1+\eta^2(\zeta-2)^2}{1+\eta^2}}\\
\bar{W}^{t}(\zeta)&\equiv\frac{W^{t}(\zeta)}{W(1)}=\sqrt{\frac{1+\eta^2[(\zeta+n-1)/n]^2}{1+\eta^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

が得られる。ただし

$$\eta \equiv \frac{z_1}{k_1 S^2} = \sqrt{\left[\frac{W^i(1)}{W^i(0)}\right]^2 - 1} \qquad (2.43)$$

であり，これは入射波の広がりの程度を表わす量である。図3に，$n=2$，のときの $\bar{W}^{i,r,t}$ を，$\eta=1, \sqrt{3}$，の場合について示す。

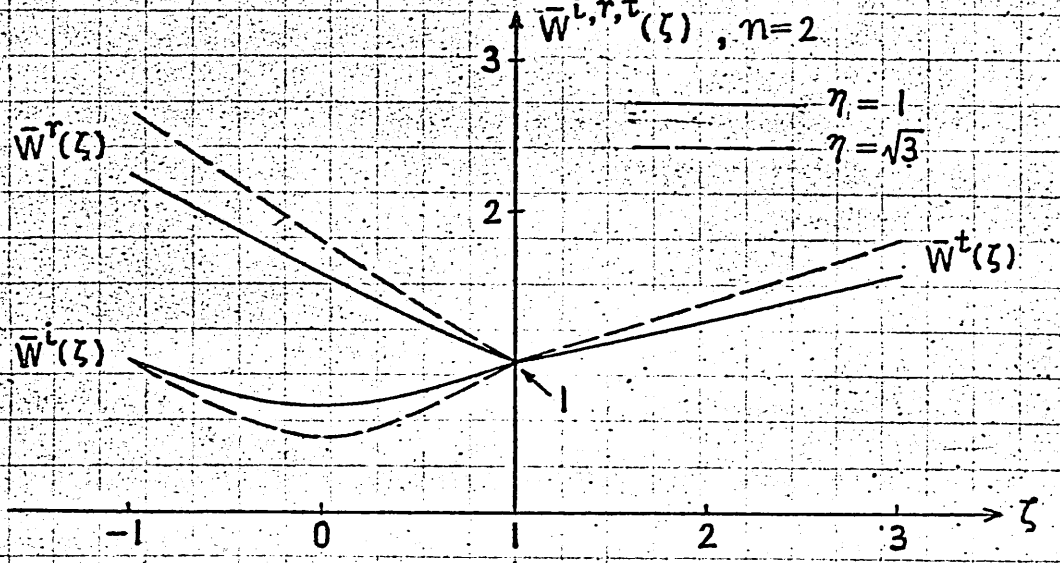



図3　規格化されたスポットサイズの $\zeta$ による変化

## §3 誘電体平板によるビーム波の反射と透過

下図に示すように，異なる媒質定数をもつ三つの領域の境界面が，$z=z_1, z_2$ なる平面である場合を考え，ビーム波が領域Ⅰから Ⅱ へ，境界面に垂直に入射したときの各領域での電磁界を求める，

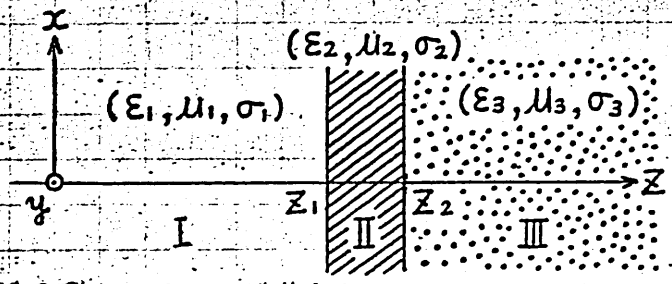



図-4 異なる媒質定数をもつ三つの領域

$f^{i,r}(u,v)$：領域Ⅰにおける入射波，反射波のスペクトル関数

$f^{+,-}(u,v)$：領域Ⅱにおいて z 軸の正，負方向へ伝搬する波のスペクトル関数

$f^{t}(u,v)$ ：領域Ⅲにおける透過波のスペクトル関数

とすると，与えられる関数 $f^i$，未知関数 $f^r$, $f^{\pm}$, $f^t$ によって各領域での，境界面に平行な電磁界成分は次式で与えられる。

(領域Ⅰ)

$$\left.\begin{aligned} E_x^i &= e^{-j\hat{k}_1 z}\iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;k_1)}\,du\,dv \\ E_x^r &= e^{j\hat{k}_1 z}\iint_{-\infty}^{\infty} f^r(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;-k_1)}\,du\,dv \\ H_y^i &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_x^i, \quad H_y^r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_x^r \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

(領域Ⅱ)

$$\left.\begin{aligned} E_x^+ &= e^{-j\hat{k}_2 z}\iint_{-\infty}^{\infty} f^+(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;k_2)}\,du\,dv \\ E_x^- &= e^{j\hat{k}_2 z}\iint_{-\infty}^{\infty} f^-(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;-k_2)}\,du\,dv \\ H_y^+ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_x^+, \quad H_y^- = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_x^- \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

(領域 Ⅲ)

$$\left.\begin{aligned} E_x^t &= e^{-j\hat{k}_3 z}\iint_{-\infty}^{\infty} f^t(u,v)\,e^{j\varphi(u,v;k_3)}\,du\,dv \\ H_y^t &= \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}}E_x^t \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

ただし

$$\varphi(u,v;k_i) = ux + vy + \frac{u^2+v^2}{2k_i}z, \qquad i=1,2,3 \quad (3.4)$$

である。$z=z_1, z_2$ における境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &\left[E_x^i + E_x^r = E_x^+ + E_x^-\right]_{z=z_1} \\ &\left[H_y^i + H_y^r = H_y^+ + H_y^-\right]_{z=z_1} \\ &\left[E_x^+ + E_x^- = E_x^t\right]_{z=z_2} \\ &\left[H_y^+ + H_y^- = H_y^t\right]_{z=z_2} \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

であり，上の各式と (3.1)～(3.4) より次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} e^{-j\hat{k}_1 z_1} & e^{j\hat{k}_1 z_1} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}e^{-j\hat{k}_1 z_1} & -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}e^{j\hat{k}_1 z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^i(z_1) \\ g^r(z_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-j\hat{k}_2 z_1} & e^{j\hat{k}_2 z_1} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}e^{-j\hat{k}_2 z_1} & -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}e^{j\hat{k}_2 z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^+(z_1) \\ g^-(z_1) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{pmatrix} e^{-j\hat{k}_2 z_2} & e^{j\hat{k}_2 z_2} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}e^{-j\hat{k}_2 z_2} & -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}e^{j\hat{k}_2 z_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^+(z_2) \\ g^-(z_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}} \end{pmatrix} e^{-j\hat{k}_3 z_2} g^t(z_2) \quad (3.7)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
g^i(z) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;k_1)}\, du\,dv \\
g^r(z) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^r(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;-k_1)}\, du\,dv \\
g^+(z) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^+(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;k_2)}\, du\,dv \\
g^-(z) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^-(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;-k_2)}\, du\,dv \\
g^t(z) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^t(u,v)\, e^{j\varphi(u,v;k_3)}\, du\,dv
\end{aligned}
\right\} \quad (3.8)
$$

さらに (3.6)～(3.8) より次式が得られる.

$$
\begin{pmatrix} f^i \\ f^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^+ \\ f^- \end{pmatrix} \qquad (3.9)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11} &\equiv \xi_1 e^{j(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1} e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)(u^2+v^2)z_1} \\
a_{12} &\equiv \eta_1 e^{j(\hat{k}_1+\hat{k}_2)z_1} e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)(u^2+v^2)z_1} \\
a_{21} &\equiv \eta_1 e^{-j(\hat{k}_1+\hat{k}_2)z_1} e^{\frac{j}{2}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)(u^2+v^2)z_1} \\
a_{22} &\equiv \xi_1 e^{-j(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1} e^{\frac{j}{2}\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)(u^2+v^2)z_1}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.10)
$$

$$
\xi_1 \equiv \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)\Big/ 2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}, \quad \eta_1 \equiv \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)\Big/ 2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \qquad (3.11)
$$

$$
\begin{pmatrix} f^+ \\ f^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} f^t \qquad (3.12)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
b_1 &\equiv \xi_2 e^{j(\hat{k}_2-\hat{k}_3)z_2} e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_3}\right)(u^2+v^2)z_2} \\
b_2 &\equiv \eta_2 e^{-j(\hat{k}_2+\hat{k}_3)z_2} e^{\frac{j}{2}\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\right)(u^2+v^2)z_2}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.13)
$$

$$
\xi_2 \equiv \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}}\right)\Big/ 2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}, \quad \eta_2 \equiv \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}}\right)\Big/ 2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \qquad (3.14)
$$

(3.9), (3.10) および (3.12), (3.13) より未知関数 $f^r$, $f^{\pm}$, $f^t$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{f^r}{f_i}=\frac{1}{\Delta}\Big[\xi_1\eta_2\exp\Big\{-j\Big[(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1+(\hat{k}_2+\hat{k}_3)z_2\Big]\Big\}\cdot\exp\Big\{\frac{j}{2}\Big[\Big(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\Big)z_1+\Big(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\Big)z_2\Big](u^2+v^2)\Big\}+\xi_2\eta_1\exp\Big\{-j\Big[(\hat{k}_1+\hat{k}_2)z_1-(\hat{k}_2-\hat{k}_3)z_2\Big]\Big\}\cdot\exp\Big\{\frac{j}{2}\Big[\Big(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\Big)z_1-\Big(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_3}\Big)z_2\Big](u^2+v^2)\Big\}\Big]$$

$$\frac{f^+}{f_i}=\frac{1}{\Delta}\xi_2\exp\Big\{j(\hat{k}_2-\hat{k}_3)z_2\Big\}\exp\Big\{-\frac{j}{2}\Big(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_3}\Big)(u^2+v^2)z_2\Big\}$$

$$\frac{f^-}{f_i}=\frac{1}{\Delta}\eta_2\exp\Big\{-j(\hat{k}_2+\hat{k}_3)z_2\Big\}\exp\Big\{\frac{j}{2}\Big(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\Big)(u^2+v^2)z_2\Big\}$$

$$\frac{f^t}{f_i}=\frac{1}{\Delta}\qquad\qquad(3.15)\sim(3.18)$$

$$\Delta\equiv\xi_1\xi_2\exp\Big\{j\Big[(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1+(\hat{k}_2-\hat{k}_3)z_2\Big]\Big\}\cdot\exp\Big\{-\frac{j}{2}\Big[\Big(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\Big)z_1+\Big(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_3}\Big)z_2\Big](u^2+v^2)\Big\}+\eta_1\eta_2\exp\Big\{j\Big[(\hat{k}_1+\hat{k}_2)z_1-(\hat{k}_2+\hat{k}_3)z_2\Big]\Big\}\cdot\exp\Big\{-\frac{j}{2}\Big[\Big(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\Big)z_1-\Big(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\Big)z_2\Big](u^2+v^2)\Big\}\qquad(3.19)$$

また，上の各式より次式が得られる。

$$\Big|\frac{f^r}{f_i}\Big|^2=\frac{1}{|\Delta|^2}\Big[\xi_1^2\eta_2^2\Big|\exp\Big\{-j\Big[(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1+(\hat{k}_2+\hat{k}_3)z_2\Big]\Big\}\Big|^2+\xi_2^2\eta_1^2\Big|\exp\Big\{-j\Big[(\hat{k}_1+\hat{k}_2)z_1-(\hat{k}_2-\hat{k}_3)z_2\Big]\Big\}\Big|^2+2\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2\cos\Big[\Big(2k_2-\frac{u^2+v^2}{k_2}\Big)(z_2-z_1)\Big]\cdot\exp\Big\{-j\Big[(\hat{k}_1-\hat{k}_1^*)z_1+(\hat{k}_3-\hat{k}_3^*)z_2\Big]\Big\}\Big]\qquad(3.20)$$

$$\left|\frac{f^+}{f^i}\right|^2=\frac{1}{|\Delta|^2}\,\xi_2^2\left|\exp\{j(\hat{k}_2-\hat{k}_3)z_2\}\right|^2 \tag{3.21}$$

$$\left|\frac{f^-}{f^i}\right|^2=\frac{1}{|\Delta|^2}\,\eta_2^2\left|\exp\{-j(\hat{k}_2+\hat{k}_3)z_2\}\right|^2 \tag{3.22}$$

$$\left|\frac{f^t}{f^i}\right|^2=\frac{1}{|\Delta|^2} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}|\Delta|^2=&\,\xi_1^2\xi_2^2\left|\exp\{j[(\hat{k}_1-\hat{k}_2)z_1+(\hat{k}_2-\hat{k}_3)z_2]\}\right|^2\\&+\eta_1^2\eta_2^2\left|\exp\{j[(\hat{k}_1+\hat{k}_2)z_1-(\hat{k}_2+\hat{k}_3)z_2]\}\right|^2\\&+2\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2\cos\left[\left(2k_2-\frac{u^2+v^2}{k_2}\right)(z_2-z_1)\right]\\&\cdot\exp\{j[(\hat{k}_1-\hat{k}_1^*)z_1-(\hat{k}_3-\hat{k}_3^*)z_2]\}\end{aligned} \tag{3.24}$$

領域 I, II, III において z 軸の正方向に伝送される時間平均電力 $P_1, P_2, P_3$ は (2.16) と同様にそれぞれ次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(2\pi)^2\left[|\hat{I}_1|^2\iint_{-\infty}^{\infty}|f^i|^2\,du\,dv-|\hat{I}_1|^{-2}\iint_{-\infty}^{\infty}|f^r|^2\,du\,dv\right]\\P_2&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}(2\pi)^2\left[|\hat{I}_2|^2\iint_{-\infty}^{\infty}|f^+|^2\,du\,dv-|\hat{I}_2|^{-2}\iint_{-\infty}^{\infty}|f^-|^2\,du\,dv\right]\\P_3&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}}(2\pi)^2|\hat{I}_3|^2\iint_{-\infty}^{\infty}|f^t|^2\,du\,dv\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

$$\hat{I}_i\equiv e^{-j\hat{k}_i z},\quad i=1,2,3 \tag{3.26}$$

以下，特に次式が成り立つ場合を考える。

$$\varepsilon_1=\varepsilon_3,\quad \mu_1=\mu_2=\mu_3,\quad \sigma_1=\sigma_3=0 \tag{3.27}$$

このとき

$$\left.\begin{aligned}&\eta\equiv k_2/k_1,\quad d\equiv z_2-z_1\\&\alpha\equiv k_2\sigma_2/2\omega\varepsilon_2,\quad \beta\equiv\eta k_1-\frac{u^2+v^2}{2\eta k_1}\\&\gamma\equiv\alpha+j\eta k_1\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

とおくと (3.15) ～ (3.18) は次式のようになる。

$$\frac{f^r(u,v)}{f^i(u,v)}=\frac{1-n^2}{4n\Delta}e^{-jk_1(2z_1+d)}\cdot\left[e^{\gamma d}e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}(2z_1+\frac{n-1}{n}d)}-e^{-\gamma d}e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}(2z_1+\frac{n+1}{n}d)}\right] \quad (3.29)$$

$$\frac{f^+(u,v)}{f^i(u,v)}=\frac{n+1}{2n\Delta}e^{(\gamma-jk_1)z_2}e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}(\frac{n-1}{n})z_2} \quad (3.30)$$

$$\frac{f^-(u,v)}{f^i(u,v)}=\frac{n-1}{2n\Delta}e^{-(\gamma+jk_1)z_2}e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}(\frac{n+1}{n})z_2} \quad (3.31)$$

$$\frac{f^t(u,v)}{f^i(u,v)}=\frac{1}{\Delta} \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{4n}{(n+1)^2}\left[\frac{e^{-(\alpha+j\beta)d}}{1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2e^{-2(\alpha+j\beta)d}}\right]e^{j\left(k_1-\frac{u^2+v^2}{2k_1}\right)d}$$

$$=\frac{4n}{(n+1)^2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2m}e^{-(2m+1)(\alpha+j\beta)d}\right]e^{j\left(k_1-\frac{u^2+v^2}{2k_1}\right)d} \quad (3.33)$$

$$\because \left|\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2e^{-2(\alpha+j\beta)d}\right|<1.$$

(3.33) に

$$\beta=nk_1-\frac{u^2+v^2}{2nk_1} \quad (3.34)$$

を代入し，整理すると次式が得られる。

$$\frac{1}{\Delta}=T^2e^{-(\gamma-jk_1)d}\sum_{m=0}^{\infty}(R^2e^{-2\gamma d})^me^{-j\frac{u^2+v^2}{2k_1}\left(1-\frac{2m+1}{n}\right)d} \quad (3.35)$$

$$T^2\equiv\frac{4n}{(n+1)^2},\quad R^2\equiv\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad (3.36)$$

(3.35) を (3.29)～(3.32) に代入し，整理すると結局次式が得られる。

$$\frac{f^r(u,v)}{f^i(u,v)} = R_{12}e^{-2jk_1z_1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty}(R_{23}R_{21}e^{-2\gamma d})^m \left[ e^{j\frac{u^2+v^2}{k_1}\left(z_1+\frac{m}{n}d\right)} - e^{-2\gamma d}e^{j\frac{u^2+v^2}{k_1}\left(z_1+\frac{m+1}{n}d\right)} \right] \tag{3.37}$$

$$\frac{f^+(u,v)}{f^i(u,v)} = T_{12}e^{(\gamma-jk_1)z_1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty}(R_{23}R_{21}e^{-2\gamma d})^m e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}\left(\frac{n+1}{n}z_1+\frac{2m+1}{n}d\right)} \tag{3.38}$$

$$\frac{f^-(u,v)}{f^i(u,v)} = T_{12}R_{23}e^{-2\gamma d}e^{-(\gamma+jk_1)z_1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty}(R_{23}R_{21}e^{-2\gamma d})^m e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}\left(\frac{n+1}{n}z_1+\frac{2m+1}{n}d\right)} \tag{3.39}$$

$$\frac{f^t(u,v)}{f^i(u,v)} = T_{12}T_{23}e^{-\gamma d}e^{jk_1d} \cdot \sum_{m=0}^{\infty}(R_{23}R_{21}e^{-2\gamma d})^m e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}\left(\frac{2m+1}{n}-1\right)d} \tag{3.40}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &\equiv \frac{1-n}{1+n}, \quad R_{21}=R_{23} \equiv \frac{n-1}{n+1} \\ T_{12} &\equiv \frac{2}{1+n}, \quad T_{23} \equiv \frac{2n}{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

(3.41) において，たとえば $R_{12}, T_{12}$ は，領域Ⅰ，Ⅱのみが存在しているとき，領域Ⅰから Ⅱ へ入射する波の反射係数，透過係数である。

(3.27) が成り立つとき (3.20)～(3.24) は次式のようになる。

$$\left|\frac{f^r(u,v)}{f^i(u,v)}\right|^2 = \frac{1}{|\Delta|^2}\left(\frac{n^2-1}{4n}\right)^2\left\{e^{-2\alpha d}+e^{2\alpha d}-2\cos\left[\left(2k_2-\frac{u^2+v^2}{k_2}\right)d\right]\right\} \tag{3.42}$$

$$\left|\frac{f^+(u,v)}{f^i(u,v)}\right|^2 = \frac{1}{|\Delta|^2}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 e^{2\alpha z_2} \tag{3.43}$$

$$\left|\frac{f^-(u,v)}{f^i(u,v)}\right|^2 = \frac{1}{|\Delta|^2}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 e^{-2\alpha z_2} \tag{3.44}$$

$$\left|\frac{f^t(u,v)}{f^i(u,v)}\right|^2 = \frac{1}{|\Delta|^2} \tag{3.45}$$

$$|\Delta|^2 = \frac{(n+1)^4}{16n^2}e^{2\alpha d}+\frac{(n-1)^4}{16n^2}e^{-2\alpha d}-\frac{(n^2-1)^2}{8n^2}\cos\left[\left(2k_2-\frac{u^2+v^2}{k_2}\right)d\right] \tag{3.46}$$

以下，入射波のスペクトル関数 $f^i$ が

$$f^i(u,v)=\frac{s^2}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}s^2(u^2+v^2)},\quad s>0 \tag{3.47}$$

で与えられる場合を考える。このとき各領域における，電界の x 成分は上式と (3.1)～(3.4) および (3.37)～(3.40) より次の各式で与えられる。ただし

$$r^2=x^2+y^2 \tag{3.48}$$

とおく。

〔領域 I〕

$$\boxed{E_x^i=e^{-jk_1z}\frac{s}{w^i}e^{-\frac{1}{2}P^ir^2}e^{j\arg P^i}} \tag{3.49}$$

$$\left.\begin{aligned} P^i&\equiv\frac{1}{(w^i)^2}+\frac{jk_1}{R^i}\\ w^i&\equiv s\sqrt{1+\left(\frac{z}{k_1s^2}\right)^2}\\ R^i&\equiv z\left[1+\left(\frac{k_1s^2}{z}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \tag{3.50}$$

$$\boxed{E_x^r=e^{jk_1z}R_{12}e^{-2jk_1z_1}\sum_{m=0}^{\infty}(R_{23}R_{21}e^{-2\gamma d})^m\varepsilon_m^r} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_m^r\equiv&\frac{s}{w_m^r}e^{-\frac{1}{2}P_m^{r*}r^2}e^{-j\arg P_m^r}\\ &-e^{-2\gamma d}\frac{s}{w_{m+1}^r}e^{-\frac{1}{2}P_{m+1}^{r*}r^2}e^{-j\arg P_{m+1}^r}\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\left.\begin{aligned} P_m^r&\equiv\frac{1}{(w_m^r)^2}+\frac{jk_1}{R_m^r}\\ w_m^r&\equiv s\sqrt{1+\left(\frac{n(z-2z_1)-2md}{nk_1s^2}\right)^2}\\ R_m^r&\equiv\left(z-2z_1-\frac{2m}{n}d\right)\left[1+\left(\frac{nk_1s^2}{n(z-2z_1)-2md}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

(領域Ⅱ)

$$E_x^+ = e^{-j\hat{k}_2 z}\, T_{12}\, e^{(\gamma - jk_1)z_1} \sum_{m=0}^{\infty} (R_{23}R_{21}e^{-2\gamma d})^m \varepsilon_m^+ \qquad (3.54)$$

$$\varepsilon_m^+ \equiv \frac{S}{w_m^+} e^{-\frac{1}{2}P_m^+ r^2} e^{j\arg P_m^+} \qquad (3.55)$$

$$\left.\begin{aligned} P_m^+ &\equiv \frac{1}{(w_m^+)^2} + \frac{jnk_1}{R_m^+} \\ w_m^+ &\equiv S\sqrt{1 + \left(\frac{z + (n-1)z_1 + 2md}{nk_1 S^2}\right)^2} \\ R_m^+ &\equiv \left[z + (n-1)z_1 + 2md\right]\left[1 + \left(\frac{nk_1 S^2}{z + (n-1)z_1 + 2md}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.56)$$

$$E_x^- = e^{j\hat{k}_2 z}\, T_{12} R_{23}\, e^{-2\gamma d} e^{-(\gamma + jk_1)z_1} \sum_{m=0}^{\infty} (R_{23}R_{21}e^{-2\gamma d})^m \varepsilon_m^- \qquad (3.57)$$

$$\varepsilon_m^- \equiv \frac{S}{w_m^-} e^{-\frac{1}{2}P_m^{-*} r^2} e^{-j\arg P_m^-} \qquad (3.58)$$

$$\left.\begin{aligned} P_m^- &\equiv \frac{1}{(w_m^-)^2} + \frac{jnk_1}{R_m^-} \\ w_m^- &\equiv S\sqrt{1 + \left(\frac{z - (n+1)z_1 - 2(m+1)d}{nk_1 S^2}\right)^2} \\ R_m^- &\equiv \left[z - (n+1)z_1 - 2(m+1)d\right]\left[1 + \left(\frac{nk_1 S^2}{z - (n+1)z_1 - 2(m+1)d}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.59)$$

(領域Ⅲ)

$$E_x^t = e^{-jk_1 z}\, T_{12} T_{23}\, e^{-\gamma d} e^{jk_1 d} \sum_{m=0}^{\infty} (R_{23}R_{21}e^{-2\gamma d})^m \varepsilon_m^t \qquad (3.60)$$

$$\varepsilon_m^t \equiv \frac{S}{w_m^t} e^{-\frac{1}{2}P_m^t r^2} e^{j\arg P_m^t} \qquad (3.61)$$

$$P_m^t \equiv \frac{1}{(w_m^t)^2} + \frac{jk_1}{R_m^t}$$

$$\left.\begin{aligned} w_m^t &\equiv S\sqrt{1+\left(\frac{n(z-d)+(2m+1)d}{n k_1 S^2}\right)^2} \\ R_m^t &\equiv \left(z-d+\frac{2m+1}{n}d\right)\left[1+\left(\frac{n k_1 S^2}{n(z-d)+(2m+1)d}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad (3.62)$$

反射波 $E_x^r$，透過波 $E_x^t$ の成分波 $\mathcal{E}_m^{r,t}$ のスポットサイズ $w_m^{r,t}$ および領域 II における波 $E_x^{+,-}$ の成分波 $\mathcal{E}_m^{+,-}$ のスポットサイズ $w_m^{+,-}$ を取り出して書くと

$$\left.\begin{aligned} w_m^r(z) &= S\sqrt{1+\left(\frac{n(z-2z_1)-2md}{n k_1 S^2}\right)^2} \\ w_m^+(z) &= S\sqrt{1+\left(\frac{z+(n-1)z_1+2md}{n k_1 S^2}\right)^2} \\ w_m^-(z) &= S\sqrt{1+\left(\frac{z-(n+1)z_1-2(m+1)d}{n k_1 S^2}\right)^2} \\ w_m^t(z) &= S\sqrt{1+\left(\frac{n(z-d)+(2m+1)d}{n k_1 S^2}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad (3.63)$$

である。一方，第二の境界面，$z=z_2$，が存在しないときの透過波のスポットサイズ，すなわち (2.32) 第三式を再び記すと

$$w^t(z) = S\sqrt{1+\left(\frac{z+(n-1)z_1}{n k_1 S^2}\right)^2} \quad (3.64)$$

である。(3.63) の四つのスポットサイズと，この $w^t$ との間には $d=z_2-z_1$，であることを考慮すると次の関係式が成り立っていることがわかる。

$$\left.\begin{aligned} w_m^r(z_1) &= w^t(z_1+2md) = w^t(z_2+(2m-1)d) \\ w_m^+(z) &= w^t(z+2md) \\ w_m^-(z) &= w^t(2z_2-z+2md) \\ w_m^t(z_2) &= w^t(z_2+2md) \end{aligned}\right\} \quad (3.65)$$

$m=0, 1, 2, \cdots\cdots$

(3.65) の関係を図示すると下図のようになり，この図から反射波，透過波および領域II中の波は，第二の境界面，$z=z_2$，が存在しないときの透過波の多重反射波によって形成されていることがわかる。

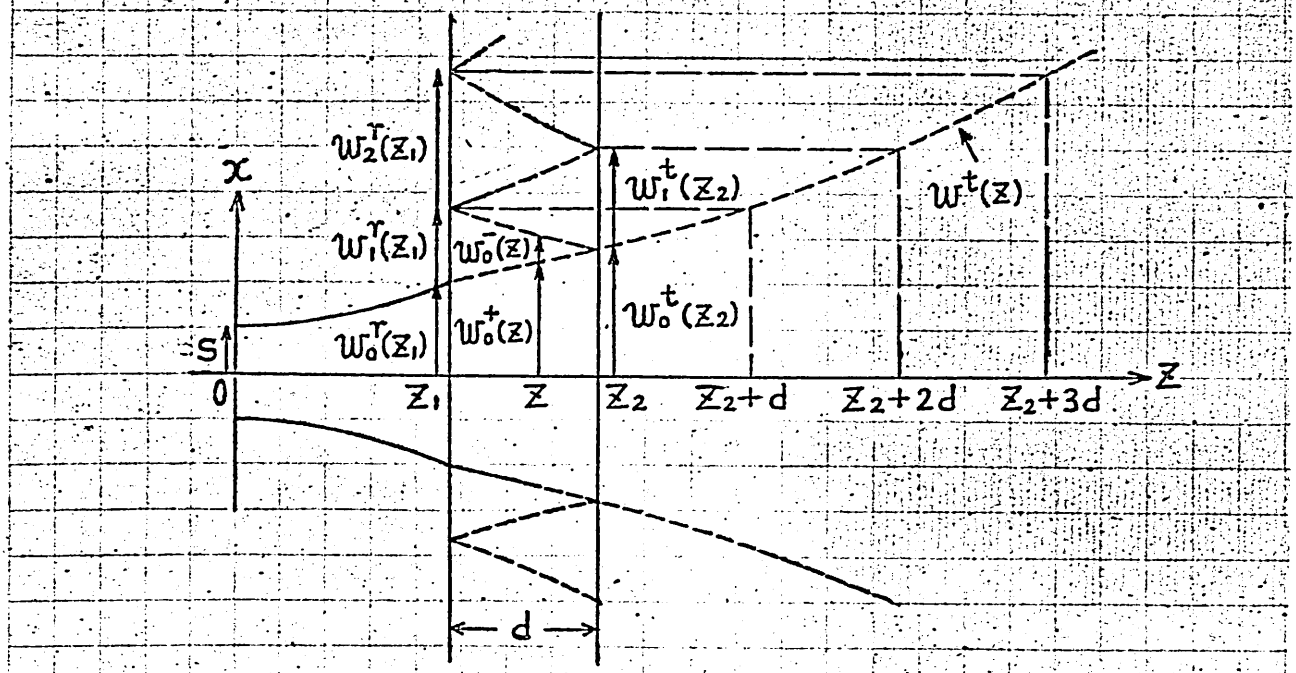



図 5　境界面 $z=z_1, z_2$ による多重反射のようす

次に，入射電力，反射電力および透過電力について考える。入射波，反射波および透過波によってz軸の正方向へ伝送される時間平均電力 $P^i, P^r, P^t$ は (3.27) が成り立つ場合 (3.25), (3.26) より

$$\left.\begin{aligned} P^i &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(2\pi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f^i|^2 du\,dv \\ P^r &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(2\pi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f^r|^2 du\,dv \\ P^t &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(2\pi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f^t|^2 du\,dv \end{aligned}\right\} \quad (3.66)$$

であり，上式に (3.42), (3.45)～(3.47) を代入すると次式が得られる。

$$
\left.\begin{aligned}
P^i &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(\pi s^2) \\
P^r &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left[\pi s^2 - cs^4 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2(u^2+v^2)}}{a - b\cos\left[(2k_2 - \frac{u^2+v^2}{k_2})d\right]} du\,dv\right] \\
P^t &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}s^4 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2(u^2+v^2)}}{a - b\cos\left[(2k_2 - \frac{u^2+v^2}{k_2})d\right]} du\,dv
\end{aligned}\right\} \quad (3.67)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
a &\equiv \frac{(n+1)^4}{16n^2}e^{2\alpha d} + \frac{(n-1)^4}{16n^2}e^{-2\alpha d} \\
b &\equiv \frac{(n^2-1)^2}{8n^2} \\
c &\equiv \frac{(n+1)^2}{4n}e^{2\alpha d} - \frac{(n-1)^2}{4n}e^{-2\alpha d}
\end{aligned}\right\} \quad (3.68)
$$

上式より，次式の成り立つことがわかる。

$$
P^i + P^r = cP^t \quad (= P^t,\ \alpha = 0) \qquad (3.69)
$$

(3.67)第三式で，$u = \tau\cos\varphi$，$v = \tau\sin\varphi$，とおくと

$$
P^t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(2\pi s^4)\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s^2\tau^2}d\tau \qquad (3.70)
$$

$$
f(\tau) \equiv \frac{\tau}{a - b\cos\left[(2k_2 - \frac{\tau^2}{k_2})d\right]} \qquad (3.71)
$$

となる。$f(\tau)$ を Taylor 展開した結果は

$$
f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{d}{k_2}\right)^m g^{(m)}(2k_2 d)\,\tau^{2m+1} \qquad (3.72)
$$

$$
g^{(m)}(2k_2 d) \equiv \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{a - b\cos x}\right)\Bigg|_{x=2k_2 d} \qquad (3.73)
$$

であり，上式を (3.70) に代入して積分を実行すると $P^t$ の $S$ に関する漸近式

$$
P^t \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(\pi s^2)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{d}{k_2 S^2}\right)^m g^{(m)}(2k_2 d) \qquad (3.74)
$$

が得られる。よって上式と (3.67) 第一式より次式が成り立つ。

$$\frac{P^t}{P^i}\sim\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{d}{k_2S^2}\right)^m g^{(m)}(2k_2d)$$

$$=\frac{1}{a-b\cos 2k_2d}+\left(\frac{d}{k_2S^2}\right)\frac{b\sin 2k_2d}{(a-b\cos 2k_2d)^2}$$

$$-\left(\frac{d}{k_2S^2}\right)^2\frac{b(a-b\cos 2k_2d)\cos 2k_2d-2b^2\sin^2 2k_2d}{(a-b\cos 2k_2d)^3}+\cdots \qquad (3.75)$$

上式で，$S\to\infty$，とすれば平面波が入射した場合の $P^t/P^i$ が得られる。特に $k_2d$ が特別な値をとるとき (3.75) は次式のようになる。

$$\frac{P^t}{P^i}\sim\begin{cases}\dfrac{1}{a-b}-\left(\dfrac{d}{k_2S^2}\right)^2\dfrac{b}{(a-b)^2}+\cdots, & k_2d=p\pi\\[2ex] \dfrac{1}{a+b}+\left(\dfrac{d}{k_2S^2}\right)^2\dfrac{b}{(a+b)^2}+\cdots, & k_2d=(2p-1)\pi/2\end{cases} \qquad (3.76)$$

$$p=1,2,3,\cdots$$

上式は，$\alpha=0$，のとき (3.58) より

$$\frac{P^t}{P^i}\sim\begin{cases}1-\left(\dfrac{d}{k_2S^2}\right)^2\dfrac{(n^2-1)^2}{8n^2}+\cdots, & k_2d=p\pi\\[2ex] \dfrac{4n^2}{(n^2+1)^2}+\left(\dfrac{d}{k_2S^2}\right)^2\dfrac{2n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)^4}+\cdots, & k_2d=(2p-1)\pi/2\end{cases} \qquad (3.77)$$

となる。下表に (3.75) の数値例を示す。ただし，$\lambda_1,\lambda_2$ を領域 I, II での波長として，$D\equiv d/\lambda_2$，$S\equiv S/\lambda_1$，である。

| | $n=1.5$ | | | $n=2.0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D | S=1 | S=3 | S=5 | S=1 | S=3 | S=5 |
| 0.1 | .94393 | .94347 | .94343 | .83803 | .83737 | .83731 |
| 0.2 | .86483 | .86434 | .86430 | .66337 | .66285 | .66281 |
| 0.3 | .86350 | .86419 | .86425 | .66193 | .66269 | .66275 |
| 0.4 | .94132 | .94318 | .94333 | .83430 | .83695 | .83716 |
| 0.5 | .99989 | 1.00000 | 1.00000 | .99989 | 1.00000 | 1.00000 |
| 0.6 | .94651 | .94376 | .94354 | .84177 | .83778 | .83746 |
| 0.7 | .86630 | .86449 | .86436 | .66490 | .66301 | .66287 |
| 0.8 | .86230 | .86404 | .86419 | .66059 | .66253 | .66269 |
| 0.9 | .93868 | .94289 | .94323 | .83060 | .83654 | .83701 |
| 1.0 | .99957 | .99999 | 1.00000 | .99955 | .99999 | 1.00000 |

表 1 $P^t/P^i$，$\alpha=0$，の数値例

## §4 傾斜した単一境界平面による反射と透過

図6に示すように，領域Ⅰ，Ⅱとも無損失な媒質でみたされているとき，ビーム波が領域Ⅰから Ⅱへ，その伝搬方向に対して傾斜した境界平面に入射した場合の反射波と透過波を求める。この場合，境界条件に電磁界のZ成分を考慮しなければならないが (1.31) より

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{E_z}{E_x}\right| &= \frac{1}{k}\left|\frac{\partial E_x}{\partial x}\Big/ E_x\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\Delta E_x}{E_x}\right| \\ \left|\frac{H_z}{H_y}\right| &= \frac{1}{k}\left|\frac{\partial H_y}{\partial y}\Big/ H_y\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\Delta H_y}{H_y}\right|\end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

$$\Delta E_x \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x}\lambda \quad , \quad \Delta H_y \equiv \frac{\partial H_y}{\partial y}\lambda \qquad (4.2)$$

が成り立つので，一波長程度の間で電磁界のx，y方向への変化割合が十分小さい場合，Z成分を無視できる。以下，このような場合を考えることにする

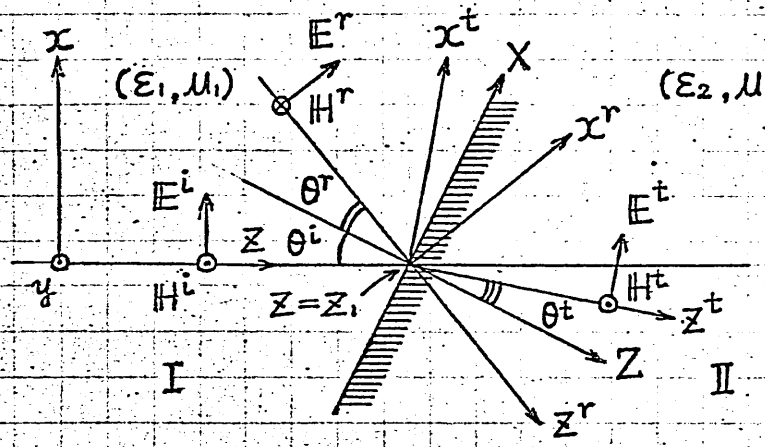



図6 傾斜した単一境界平面

入射波，反射波および透過波を記述するための直角座標系をそれぞれ $(x, y, z)$, $(x^r, y^r, z^r)$, $(x^t, y^t, z^t)$ とする。また境界面を記述するための直角座標系を $(X, Y, Z)$ とし，境界面は，$Z=0$，で与えられるものとする。$z$, $z^r$, $z^t$ 軸が Z軸とそれぞれ $\theta^i$, $\theta^r$, $\theta^t$ $(>0)$ なる角度をなし，$x$-$z$, $x^r$-$z^r$, $x^t$-$z^t$ および X-Z 面が一致しているものとすれば，これら四つの座標系間の関係は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} x &= -Z\sin\theta^i + X\cos\theta^i \\ y &= Y \\ z &= Z\cos\theta^i + X\sin\theta^i + z_1 \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

$$\left.\begin{aligned} x^r &= Z\sin\theta^r + X\cos\theta^r \\ y^r &= Y \\ z^r &= Z\cos\theta^r - X\sin\theta^r \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

$$\left.\begin{aligned} x^t &= -Z\sin\theta^t + X\cos\theta^t \\ y^t &= Y \\ z^t &= Z\cos\theta^t + X\sin\theta^t \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

(4.5)～(4.7) は, $Z=0$, のとき

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\theta^i, \quad y = Y, \quad z = X\sin\theta^i + z_1 \\ x^r &= X\cos\theta^r, \quad y^r = Y, \quad z^r = -X\sin\theta^r \\ x^t &= X\cos\theta^t, \quad y^t = Y, \quad z^t = X\sin\theta^t \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

である。入射波, 反射波および透過波はスペクトル関数 $f^{i,r,t}(u,v)$ を用いて, それぞれ次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} E^i &= e^{-jk_1 z} \iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j\psi(x,y,z;k_1)}\, du\,dv \\ E^r &= e^{jk_1 z^r} \iint_{-\infty}^{\infty} f^r(u,v)\, e^{j\psi(x^r,y^r,-z^r;k_1)}\, du\,dv \\ E^t &= e^{-jk_2 z^t} \iint_{-\infty}^{\infty} f^t(u,v)\, e^{j\psi(x^t,y^t,z^t;k_2)}\, du\,dv \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

$$H^i = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E^i, \quad H^r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E^r, \quad H^t = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E^t \quad (4.8)$$

$$\psi(x,y,z;k) \equiv ux + vy + \frac{u^2+v^2}{2k}z \quad (4.9)$$

ただし, $E^{i,r,t}$ は電界の $x, x^r, x^t$ 成分, $H^{i,r,t}$ は磁界の $y, y^r, y^t$ 成分である。電磁界の, 境界面に平行な成分の連続条件より

$$\left.\begin{aligned} &\left[E^i\cos\theta^i + E^r\cos\theta^r = E^t\cos\theta^t\right]_{z=0} \\ &\left[H^i + H^r = H^t\right]_{z=0} \end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

であり, 上式と (4.6) および (4.7)～(4.9) より次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta^i e^{-jk_1(X\sin\theta^i+Z_1)} & \cos\theta^r e^{-jk_1 X\sin\theta^r} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-jk_1(X\sin\theta^i+Z_1)} & -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-jk_1 X\sin\theta^r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^i(X,Y) \\ g^r(X,Y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta^t \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \end{pmatrix} e^{-jk_2 X\sin\theta^t} g^t(X,Y) \qquad (4.11)$$

$$\left.\begin{aligned} g^i(X,Y) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j\psi(X\cos\theta^i, Y, X\sin\theta^i+Z_1; k_1)}\, du\,dv \\ g^r(X,Y) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^r(u,v)\, e^{j\psi(X\cos\theta^r, Y, X\sin\theta^r; k_1)}\, du\,dv \\ g^t(X,Y) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} f^t(u,v)\, e^{j\psi(X\cos\theta^t, Y, X\sin\theta^t; k_2)}\, du\,dv \end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

Snell の法則にしたがい

$$\theta^r = \theta^i, \quad k_2\sin\theta^t = k_1\sin\theta^i \qquad (4.13)$$

としてみると (4.11) より次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} g^r(X,Y) &= Re^{-jk_1 Z_1} g^i(X,Y) \\ g^t(X,Y) &= Te^{-jk_1 Z_1} g^i(X,Y) \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

$$R \equiv \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta^t - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta^i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta^t + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta^i}, \quad T \equiv \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta^i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta^t + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta^i} \qquad (4.15)$$

(4.14) 第一式をみたす $f^r$ は (4.12) より次式で与えられる。

$$\frac{f^r(u,v)}{f^i(u,v)} = Re^{-jk_1 Z_1} e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1}Z_1} \qquad (4.16)$$

(4.14) 第二式を，すべての $X$ に対してみたす $f^t$ を求めることは困難であるので，$X=0$，の付近で境界条件をみたせば十分であるほど，入射波が $X$ 方向に細くしぼられている場合を考えると，透過波のスペクトル関数は次式で与えられる。

$$\frac{f^t(u,v)}{f^i(u,v)} = T e^{-jk_1 z_1} e^{j\frac{u^2+v^2}{2k_1} z_1} \tag{4.17}$$

(4.16), (4.17) を (4.7) に代入すると、$\eta \equiv k_2/k_1$ として

$$\left.\begin{aligned} E^i &= e^{-jk_1 z} \iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j\psi(x,y,z;k_1)}\, du\,dv \\ E^r &= e^{jk_1 z^r} R e^{-jk_1 z_1} \iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j\psi(x^r,y^r,-z^r+z_1;k_1)}\, du\,dv \\ E^t &= e^{-jk_2 z^t} T e^{-jk_1 z_1} \iint_{-\infty}^{\infty} f^i(u,v)\, e^{j\psi(x^t,y^t,z^t+\eta z_1;k_2)}\, du\,dv \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

が得られる。前節と同様に、入射波のスペクトル関数が次式で与えられる場合を考える。

$$f^i(u,v) = \frac{S^2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}S^2(u^2+v^2)} \tag{4.19}$$

上式を (4.18) に代入すると次の各式が得られる。

$$E^i = e^{-jk_1 z} \frac{S}{w^i} e^{-\frac{i}{2}p^i \rho_i^2} e^{j\arg p^i} \tag{4.20}$$

$$\left.\begin{aligned} p^i &\equiv \frac{1}{(w^i)^2} + \frac{jk_1}{R^i} \\ w^i &= w^i(z) \equiv S\sqrt{1+\left(\frac{z}{k_1 S^2}\right)^2} \\ R^i &= R^i(z) \equiv z\left[1+\left(\frac{k_1 S^2}{z}\right)^2\right] \\ \rho_i &\equiv \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

$$E^r = e^{jk_1 z^r} R e^{-jk_1 z_1} \frac{S}{w^r} e^{-\frac{1}{2}p_r^{r*}\rho_r^2} e^{-j\arg p^r} \tag{4.22}$$

$$\left.\begin{aligned} p^r &\equiv \frac{1}{(w^r)^2} + \frac{jk_1}{R^r} \\ w^r &= w^r(z^r) \equiv S\sqrt{1+\left(\frac{z^r-z_1}{k_1 S^2}\right)^2} \\ R^r &= R^r(z^r) \equiv (z^r-z_1)\left[1+\left(\frac{k_1 S^2}{z^r-z_1}\right)^2\right] \\ \rho_r &\equiv \sqrt{(x^r)^2+(y^r)^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

$$E^t = e^{-jk_2 z^t} T e^{-jk_1 z_1} \frac{S}{w^t} e^{-\frac{1}{2}p^t \rho_t^2} e^{j\arg p^t} \qquad (4.24)$$

$$\left.\begin{aligned} p^t &\equiv \frac{1}{(w^t)^2} + \frac{jk_2}{R^t} \\ w^t &= w^t(z^t) \equiv S\sqrt{1+\left(\frac{z^t+nz_1}{k_2 S^2}\right)^2} \\ R^t &= R^t(z^t) \equiv (z^t+nz_1)\left[1+\left(\frac{k_2 S^2}{z^t+nz_1}\right)^2\right] \\ \rho_t &\equiv \sqrt{(x^t)^2+(y^t)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4.25)$$

上に得られた結果より，入射波と反射波のスポットサイズは境界面で連続であるが透過波については近似をおこなったのでスポットサイズは連続でなく

$$\left.\begin{aligned} w^r(z^r|_{z=0}) &= w^i(z|_{z=0}) \\ w^t(z^t|_{z=0}) &\neq w^i(z|_{z=0}) \end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

である。それぞれの波について，点$(x,y,z)=(0,0,z_0)$，$(x^r, y^r, z^r)=(0,0,z_0^r)$，$(x^t, y^t, z^t)=(0,0,z_0^t)$，を通る等位相面は，$\arg p^{i,r,t}$ を無視すると次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} z &= z_0 - \frac{\rho_i^2}{2R^i(z)} \\ z^r &= z_0^r - \frac{\rho_r^2}{2R^r(z^r)} \\ z^t &= z_0^t - \frac{\rho_t^2}{2R^t(z^t)} \end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

$z=z_0=0$，$z^r=z_0^r=z_1$，$z^t=z_0^t=-nz_1$，加上式をみたすことから，入射波が，$z=0$，なる平面を等位相面としてもち，かつ，この位置で最小のスポットサイズ$S$をもつのに対応して，反射波，透過波はそれぞれ，$z^r=z_1$，$z^t=-nz_1$，なる平面を仮想的な等位相面としてもち，かつ，この位置で仮想的な最小のスポットサイズ$S$をもつ。なお，図6および，$\theta^r=\theta^i$，であることより，$z=0$，なる平面と$z^r=z_1$，なる平面とは，境界面，$Z=0$，に関して対称な位置にある。

最後に，入射電磁界のz成分が無視できるための条件を求めておく。(4.20)は入射電界のx成分であるから$E_x^i$と書くと(4.21)より

$$|E_x^i| = \frac{S}{w^i} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(w^i)^2}} \tag{4.28}$$

であり，(4.1)，(4.20)より，入射電界のz成分$E_z^i$については

$$|E_z^i| = \frac{1}{k_1}\left|\frac{\partial E_x^i}{\partial x}\right| = \frac{x}{k_1}|P^i||E_x^i| \quad , x>0$$

$$= \frac{S}{k_1}|P^i|\left(\frac{x}{w^i}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2(w^i)^2}} \tag{4.29}$$

である。$|E_x^i|$は，$(x,y)=(0,0)$，で最大値

$$|E_x^i|_{max} = \frac{S}{w^i} \tag{4.30}$$

をとり，$|E_z^i|$は，$(x,y)=(w^i,0)$，で最大値

$$|E_z^i|_{max} = \frac{S}{k_1}|P^i|\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{k w^i \sqrt{e}} \tag{4.31}$$

をとる。よって

$$\frac{|E_z^i|_{max}}{|E_x^i|_{max}} = \frac{1}{k_1 S\sqrt{e}} \tag{4.32}$$

が成り立つ。(4.1)，(4.8)より，入射磁界のy成分とy成分の最大値の比も上式で与えられるから，入射電磁界のz成分が無視できるための条件は

$$k_1 S \gg 1/\sqrt{e} = 0.60653 \tag{4.33}$$

である。

## §むすび

第1節で求めた直角座標系でのビーム波をもとに，第2節では，単一境界平面に垂直に入射したビーム波，特にガウス波の反射と透過について考察し，その結果，境界面でのスポットサイズの連続性，また，スポットサイズの変化率の不連続性，したがって等位相面の曲率半径の不連続性，などが明らかになった。第3節では誘電体平板に垂直に入射したビーム波の反射と透過について検討し，反射波，透過波および誘電体平板中の波が，単一境界平面による透過波の，第二の境界平面による多重反射波として表わせることを示した。第4節における，傾斜した単一境界平面による透過波についての考察は不十分であり，傾斜した誘電体平板による反射と透過とともに今後の課題である。なお，誘電体境界曲面によるビーム波の反射と透過については，最近の論文(5)でくわしく考察されている。

## 参考文献


(1) 赤尾，宮崎："ビーム波の異種媒質境界面における反射と透過"，信学全大，No. 425 (昭-41)

(2) J. A. Stratton："Electromagnetic Theory"，PP. 349～351，McGraw-Hill Book Co. (1951)

(3) F. Schwering："Reiterative Wave Beams of Rectangular Symmetry"，A.E.U.，Band 15，Heft 12，P. 555 (1961)

(4) 末松，吹抜："理想化されたガス光導波系の解析"，信学誌，48 10，P. 58 (昭-40)

(5) 赤尾，宮崎："誘電体境界曲面および誘電体レンズによるビーム波の反射と姿態変換"，信学誌，51-B，1，P. 25 (昭-43)

輻射科学研究会資料

# 静磁波の存在条件とその伝播実験

栗井郁雄　橋本武夫　池上淳一

1968年 11月29日

# 目　次

§1　静磁波の存在条件
〔1.〕静磁波とは何か　2
〔2.〕軸方向に磁化された円柱状試料中の静磁波　7
〔3.〕静磁波の存在条件　9

§2. 伝播実験　13
〔1.〕マウントの入力インピーダンス　14
〔2.〕挿入損失、遅延時間　17

はしがき

強磁性体に静磁場を印加してマイクロ波で励振すると静磁波(magnetostatic wave)が伝播するであろうということは1960年にFletcher, Kittelによって論じられ、1964年になってDamon, Van de Vaartにより実験的に確かめられた。この波は磁場の大きさとマイクロ波の周波数の関係をうまく選べば群速度が非常に小さくなり、数μSの遅延が容易に得られる。従来のフェライト材料では損失が大きすぎて、たとえ励振されても伝播中に減衰してしまう為全く観測される事がなかったのだが、最近共鳴半値巾が0.1oe程度に小さいフェリ磁性体YIG(Yttrium Iron Garnet)が開発されるに至って、Sバンドにおいて常温で1μS遅延あたり数db減衰のものが得られるようになった。

しかしマイクロ波から静磁波及びその逆変換の際の損失が計20db程度もある事が応用を妨げてきたので、我々は変換損失を小さくする事に努力を注ぎ一応の結果

を得た。それは結合用のアンテナに最適の長さが存在する事と，励振，受信用のマウントの構造についての二，三の現象論的法則性とである．

又静磁波が存在するのはYIGのような強磁性体だけであるのか，その他の媒質には存在し得ないのかという，静磁波の存在条件についての考察も行なっている．

以上の他に，この小稿の前1/3を用いて静磁波とは何か，電磁波とはどこが異なるのか，その主な性質は何かをできるだけわかり易くまとめてみた．

## §1 静磁波の存在条件

### [1] 静磁波とは何か

電磁波を表現するマクスウェルの方程式において

$$\mathrm{rot}\, H = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

とするとこれは静磁場*を表わす事になって，時間的に変化する波動については決して磁場の回転は零とならない。所がある条件が満たされると時間変化する電磁波の磁場の回転を限りなく零に近づける事ができて(1-1)式が近似的に成り立つ場合がある．

例えばゆっくり変動する電磁場中に置かれた小さい試料中のマクスウェル方程式の解は周知のように，第一近似として(1-1)式及び

$$\mathrm{div}\, B = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

によって解かれ，しかる後

$$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (1\text{-}3)$$

---

* 静磁波と静磁場の読み間違いを避けるため今後直流磁場と呼ぶ．

によって電場が決定される。このような電磁場は準定常的と呼ばれるもので、表題の静磁波もまさしく準定常的電磁場の一種である。では十分小さい試料中の電磁場と静磁波とは何処が違うかというと、静磁波という名が示すように波として伝播する点で、そのためにはある程度の大きさを持った空間ないし伝送線が必要となる。即ち静磁波とは準定常的に解くことのできる伝播する電磁波のモードの一つである。

以下、円形断面の無限に長いフェリ磁性体でできた伝送線を伝播する静磁波について説明しよう。この伝送線は軸方向に一様に磁化されているものとする。そのような波が存在するものと仮定して式(1-1)から出発すると、

$$H = -\mathrm{grad}\,\psi \tag{1-4}$$

とおく事ができる。磁化された強磁性体については、

$$B = \mu H = \begin{bmatrix} 1+\kappa & -j\nu & 0 \\ j\nu & 1+\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} H \tag{1-5}$$

$$\kappa = \frac{4\pi M_s H_i}{H_i^2 - (\omega/\gamma)^2}, \quad \nu = \frac{4\pi M_s (\omega/\gamma)}{H_i^2 - (\omega/\gamma)^2} \tag{1-6}$$

但し $H_i$；直流磁場の大きさ，$4\pi M_s$；試料の飽和磁化

という関係が成り立つから、

$$\mathrm{div}\,B = 0$$

は(1-4)，(1-5)によって

$$(1+\kappa)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1+\kappa)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \tag{1-7}$$

となる。解を円柱座標で表現すると

$$\psi = A J_n[jkr/(1+\kappa)^{\frac{1}{2}}]\, e^{ikz} e^{in\varphi} \quad r \le R \tag{1-8}$$

$n$は0及び正負の整数　$R$；試料の半径

もちろん試料の外部ではラプラスの方程式が成り立って

$$\psi = BH_n(jkr)\,e^{\cdots}\,e^{\cdots} \qquad r > R \qquad (1\text{-}9)$$

試料面において $\mathbb{H}$ の接線成分と $\mathbb{B}$ の法線成分が連続である事から次の特性方程式が得られる。

$$j(1+\kappa)^{\frac{1}{2}}\frac{J_n'}{J_n} = -1 - \frac{n\kappa}{kR} \qquad (1\text{-}10)$$

ここで $n=1$, $\omega \simeq \gamma H_i$ とすると (1-10)式は簡単化されて

$$J_0\left[\left(\frac{\omega-\gamma H_i}{2\pi\gamma M_s}\right)^{\frac{1}{2}} kR\right] = 0 \qquad (1\text{-}11)$$

となるから零次のベッセル関数の根を小さいものから順に $z_1, z_2 \cdots z_i$ とすると (1-11)式は

$$\omega = \gamma H_i + 2\pi\gamma M_s\left(\frac{z_i}{kR}\right)^2 \qquad (1\text{-}12)$$

と書けてここに静磁波の分散関係が求まった。(図1) 従って(1-12)式を満たすような解(1-8),(1-9)が存在する事になる。

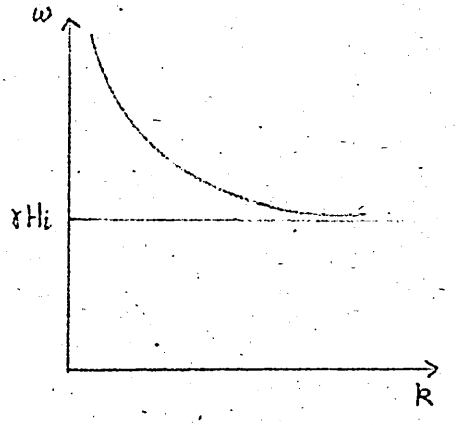



図1. 軸方向に磁化した試料中の静磁波の分散関係

上においては最初から静磁波が存在するものとして(1-1)式を仮定する所から出発した。次にそのように出発点から近似を入れる事なくマクスウェルの方程式の解を求め、それがどのような場合に静磁波を表わすことになるのか調べよう。勿論計算は非常に複雑になるが1954年にSuhlが行なったものから結果だけを引用する。$\mathbb{B}$ と $\mathbb{H}$ の関係が(1-5)で表わされるような媒質中の電磁波は謂わゆる混成波(Hybrid wave)となって、TE波、TM波の一次結合で表わす事ができない。軸方向に磁化された円柱形の試料内の電磁波としてSuhlの求めたものの中から磁界成分のみを書き出すと次のようになる。

$$H_r=\left[\frac{A_1(r)}{r}\frac{1}{\chi_1^2}\left\{1-\frac{1-\chi_1^2}{\lambda_1}F_n(\chi_1 r)\right\}-\frac{A_2(r)}{r}\frac{1}{\chi_2^2}\left\{1-\frac{1-\chi_2^2}{\lambda_2}F_n(\chi_2 r)\right\}\right]e^{jn\varphi}e^{-jkz}$$

$$H_\varphi=j\left[\frac{A_1(r)}{r}\frac{1}{\chi_2^2}\left\{F_n(\chi_1 r)-\frac{1-\chi_1^2}{\lambda_1}\right\}-\frac{A_2(r)}{r}\frac{1}{\chi_2^2}\left\{F_n(\chi_2 r)-\frac{1-\chi_2^2}{\lambda_2}\right\}\right]e^{jn\varphi}e^{-jkz}$$

$$H_z=-j\beta\left[\frac{1}{\lambda_1}A_1(r)-\frac{1}{\lambda_2}A_2(r)\right]e^{jn\varphi}e^{-jkz} \qquad (1-13)$$

但し $F_n(x)=\dfrac{xJ_n'(x)}{J_n(x)}$, $A_1(r)=\dfrac{J_n(\chi_1 r)}{J_n(\chi_1 R)}$, $A_2(r)=\dfrac{J_n(\chi_2 r)}{J_n(\chi_2 R)}$

$$\chi_{1,2}^2=\frac{1-\lambda_{1,2}^2}{1-\delta\lambda_{1,2}}, \quad \lambda_{1,2}^2+\frac{k(1-k^2/(1+k))+(\nu/k)^2(1+k)}{\nu/k}\lambda_{1,2}-k^2=0 \qquad (1-14)$$

(1-13)において $n=1$ とおいてかつ円柱の半径 $R$ を限りなく小さくして行くと

$$H_r\to\frac{\chi_1}{\lambda_1}\frac{J_1'\left(\frac{z_i}{R}r\right)}{J_1(z_i)}, \quad H_\varphi\to\frac{j}{r\lambda_1}\frac{J_1\left(\frac{z_i}{R}r\right)}{J_1(z_i)} \quad H_z\to-\frac{j\beta}{\lambda_1}\frac{J_1\left(\frac{z_i}{R}r\right)}{J_1(z_i)}$$

となり、 $\dfrac{1}{\lambda_1}\dfrac{J_1\left(\frac{z_i}{R}r\right)}{J_1(z_i)}=\psi$

とおくと $H=-\mathrm{grad}\,\psi$

と書けるので $\mathrm{rot}\,H=0$

が成り立つ事になる。又上の条件の下で(1-14)を変形して行くと(1-12)式に到達するので(1-12)なる分散関係を持つ静磁波は円柱の半径が十分小さい時にのみ存在する事がわかった。

次に少し別の角度から検討してみよう。再びマクスウェルの方程式に戻って、媒質の導電率が非常に小さいものとすると、

$$\mathrm{rot}\,H=\frac{\partial D}{\partial t} \qquad (1-15)$$

$$\mathrm{rot}\,E=-\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (1-16)$$

となるが各ベクトルの大きさのみに注目するものとすれば(1-16)式より

$$E \sim \frac{\mu\omega}{k} H \qquad (1\text{-}17)$$

従って

$$\frac{\partial D}{\partial t} \sim \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{k} H \qquad (1\text{-}18)$$

しかるに

$$|\mathrm{rot}\, H| \sim kH \qquad (1\text{-}19)$$

であるから，もし

$$|k| \gg \sqrt{\varepsilon\mu\omega^2} \qquad (1\text{-}20)$$

であれば(1-15)式の $\partial D/\partial t$ は左辺に比べて小さいので無視できて

$$\mathrm{rot}\, H \simeq 0$$

となる.* それゆえ(1-20)式の満たされる事がその波が静磁波であるための必要条件であるという事ができよう.

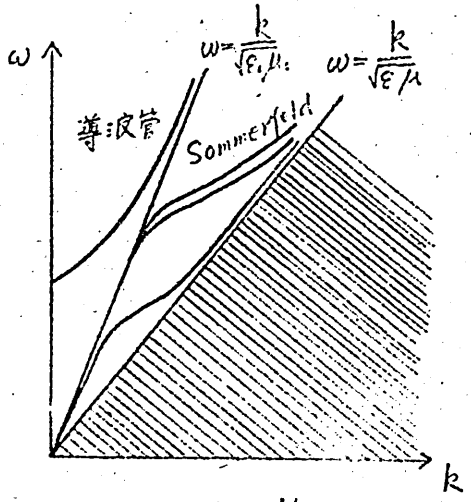



図2 円筒導波管及び Sommerfeld line の分散曲線

これは図2において斜線の部分，それもずっと右側に分散曲線が存在するというのに等しい．参考のために通常の円形導波管及び Sommerfeld の誘電体線路の代表的なモードに対する分散曲線を画いてある．図1から明らかなように軸方向に磁化された円柱状磁性体中の静磁波の分散曲線は限りなく斜線部の右側へのびて行く．

---

* 異方性媒質の場合 $\mu$ ないし $\varepsilon$ はテンソルになるがその各成分 $\varepsilon'$, $\mu'$ に対して(1-20)式の成り立つ事が必要である．

[2] 軸方向に磁化された円柱状試料中の静磁波

(1-12)式から群速度を計算すると

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = -\frac{2\pi R}{(2\pi M)^{\frac{1}{2}} z_i} \left(\frac{\omega}{\gamma} - H_i\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (2\text{-}1)$$

kが実数となる $\omega/\gamma \geq H_i$ の時にのみ波は伝播し，$\omega/\gamma \simeq H_i$ のときは群速度は0に近づくので遅延線として応用できる事がわかる．

試料に一様な直流磁場を加えても反磁場のため内部磁場の強さは図3(a)のように大きく変化する．従って波数kも大巾に変化し図3(a)のような磁場と周波数の関係であれば，端面付近で $10^{0}_{(1/cm)}$ のオーダーであるのに対し，試料の中心付近では $10^{3}$ 程度まで増加する．(図3(c)参照)

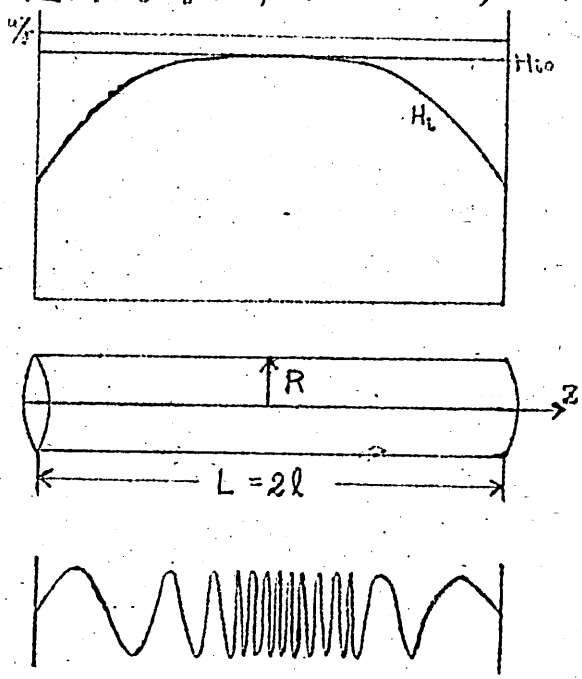



図3 円柱状試料

(a) 内部磁場分布

(b) 試料の形状

(c) 解の様子

外部からマイクロ波で励振するとマイクロ波の波数は $10^{-1}$ のオーダーであるので端面付近の結合度が最も大きく，そこから生じた静磁波は中心における $H_i$ が $\omega/\gamma$ より小さければ中心を通過してもう一つの端面まで伝播する事になる．伝播時間は

$$T = 2l\int_0^1 \frac{d\zeta}{v_g(H)} \qquad (2-2)$$

で表わされる．ここに $\zeta = z/l$ （図3(b)参照）

Tに対する寄与はほとんど試料の中央部分で行なわれるので(2-2)の積分においてHiを中心付近においてだけ正しくζの二次まで展開して差しつかえない．その結果

$$T = \frac{2\pi(1+\rho^2)}{\gamma\rho^2\sqrt{3}} \frac{1}{\omega/\gamma - H_{i0}} \qquad (2-3)$$

但し $\rho = R/l$，$H_{i0}$；中心における直流磁場の強さ

$H_{i0}$は加えた磁場とほとんど同じように増減するから(2-3)式から明らかなように遅延時間は周波数と，印加直流磁場$H_0$を変える事によって可変となる．我々の用いた試料について実際の値を代入して(2-3)式を図示すると図4のようになり非常に小さな磁場変化で遅延時間を大きく変動させ得る事がわかる．しかし横軸の変数として周波数が入っているから分散性が大きく遅延素子としては使いにくいと思われる．それゆえむしろ分散性を逆用してパルス整形などに用いる方がより賢明であろう．又Tは試料の大きさによらず直径と全長との比$\rho$にのみ関係するという面白い性質を持っている．大きな遅延時間を得るのに何ら長い試料は必要とせず，例えば1cmの長さのもので20μSの遅延を得た報告もある．

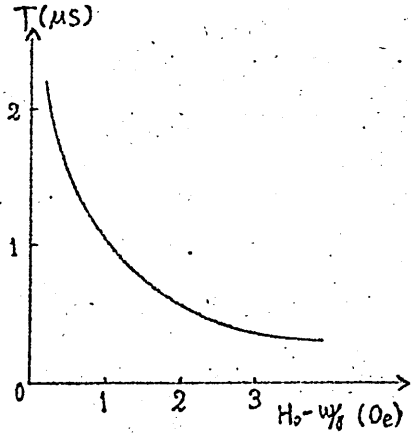


図4 磁場，周波数と遅延時間

次に静磁波の磁界分布について述べよう．最低次モード$n=1$と次のモード$n=0$をとり(1-8)式のΨを用いて(1-4)式によって

$H$を求めて磁力線を図示すると図5の如くなる。試料の外壁を金属でおおった場合と，空間中に置いた場合とでは磁力線の分布も分散関係も殆んど変らない。図5は前者の場合に相当する。又，等方媒質中を通る普通の電磁波と違ってnの正負で縮退していないため，例えば$n=1$と$-1$とは全く異なったモードである。

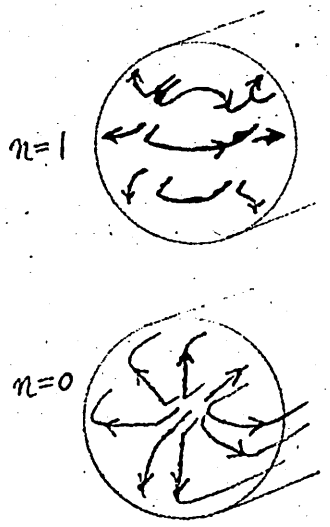


図5 静磁波の磁界分布

なお試料の形は円柱状に限らず角柱，円板などについても静磁波は観測されている。

## [3] 静磁波の存在条件

(1-20)式はどのような場合に満たされるのであろうか。即ちどのような性質を持った媒質を用いれば静磁波が伝播するのか述べよう。

I. 直流磁場を加えていない媒質

一般に透磁率はテンソルで，対称な実数行列で表わせるから必ずそれを対角化する実数のユニタリー行列が存在する。そしてこの対角化は座標軸の回転に等しいので，新しい座標系を$(x, y, z)$で表わすことにしよう。磁化$M$と磁場の間には

$$M = \begin{bmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{bmatrix} H \qquad (3-1)$$

の関係が成り立つから，静磁波が存在するものとして

$$H = -\mathrm{grad}\,\psi$$

と仮定し(1-2)式を変形すると

$$\nabla^2\psi + \mathrm{div}\,M = 0$$

$$\therefore (1+\chi_1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1+\chi_2)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + (1+\chi_3)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

を得る. $1+\chi_1, 1+\chi_2, 1+\chi_3$ は常に正であるから

$$\psi \propto e^{i k\cdot r}$$

として $k_x, k_y, k_z$ のうちの1つ又は2つが虚数になれば(3-2)式の満たされる可能性が生じる. 波動の伝播方向をz方向とすれば $k_z$ は実数でなければならないので $k_x, k_y$ の片方又は両方が虚数にならねばならない. x又はy方向に解が発散しないためにx, yに垂直な境界面が存在しそれに沿って伝播する波が許される解である. そしてその解が境界条件を満たすかどうかも検討されねばならない. 境界の向う側が真空であれば満たすべき条件はHの接線成分とBの法線成分の連続で金属であればBの法線成分が0という条件のみになるがここではより複雑な前者の場合について述べる. 境界の向う側ではラプラスの式, こちら側では(3-2)式が成り立つのでポテンシャルψは境界面に垂直な方向については面から両側に距離rとともに単調に減少するような関数になる. [図6]

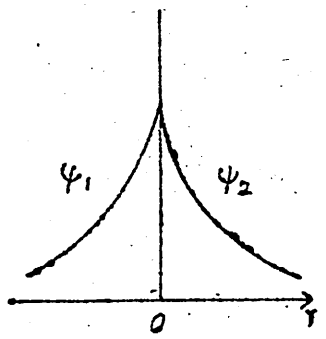


図6. 静磁ポテンシャル

Hの接線成分はrについての微分を含まないがBの法線成分はそれを含む. 所がψ1とψ2のrについての微分は符号が反対なので両方の境界条件を満たすような解は存在しない. 金属境界の場合も簡単に証明する事ができる.

## II. 直流磁場を加えられた媒質

簡単のため, もともと等方な磁性材料に磁場を加えて異方的

になった物質について考える。(もともと異方的なものは解析が困難であるが原理的には同じ結論が出せると思われる)。
透磁率テンソルの成分は複素数であるが、テンソルはエルミーケアンであるので必ずユニタリー行列で対角化できるがその成分は複素数である。従って新しい座標系は回転座標系となり境界条件を入れる場合に非常に複雑になるのでこの場合は対角化を行なわないで話を進める。直流磁場印加方向をz軸に選ぶと一般に次の関係が成り立つ。*

$$B=\begin{bmatrix} a & jb & 0 \\ -jb & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} H \qquad (3\text{-}3)$$

Iと同じように静磁波が存在するものとして波動方程式を求めると非対角項は消え去り(3-2)と同じ形式の方程式が得られる。

$$(1+a)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(1+a)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0 \qquad (3\text{-}4)$$

このような媒質においては印加磁場の大きさに応じて1+aが負になるので次の二つの場合を考えねばならない。
① $1+a>0$　Iと同じく $k_x$ $k_y$ の片方又は両方が虚数であればよい。磁場をかけていない1との相違点は(3-3)式に見られる通り透磁率テンソルに非対角項が存在する事である。
Bの法線成分はHの法線成分のみならず接線成分との一次結合なのでIでは両立し得なかった二つの境界条件が成り立ち得るようになり解の存在する場合がある。(Surface mode)。

---

* 誘電体に直流磁場を加えるとDとEの間に似たような関係が成り立つので以下の議論はそのまま"静電波"の存在条件に対応づけられる。

② $1+a<0$. $k_x, k_y$ 共に実数であってよい. 試料内部においては振動的な解の存在が許され, 外部では減衰的な解となるので $\psi$ の値自体とその微係数は試料の内外で同符号となり得て境界条件が満たされる. 前節で述べた"軸方向に磁化された円柱状試料中の静磁波"はこのモードである. ①に対して Volume mode と名付けられる.
又この場合は $k_x, k_y, k_z$ のすべてが実数なので試料が無限に大きくてもよい. 即ち平面波と考えられるモードが存在する.

以上から明らかな如く静磁波は異方性媒質一般に存在するものではなく, 直流磁場を印加された媒質にのみ存在する事がわかった.

## §2 伝播実験

静磁波を何らかの目的に用いる場合に，現在最も大きな障害となっているのはその減衰度の大きい事である。伝播中の減衰はもっぱら試料そのものの質に依存しているのに対し，電磁波から静磁波及びその逆変換の損失は回路的に解決され得る問題である。そこで我々は図7のようなマウントを作り電磁波を最も能率よくマウントに送り込むこと，最も効率高くYIGに結合させる事の二点に分けて考え，前者についてはマウントを伝送線の特性インピーダンスに整合

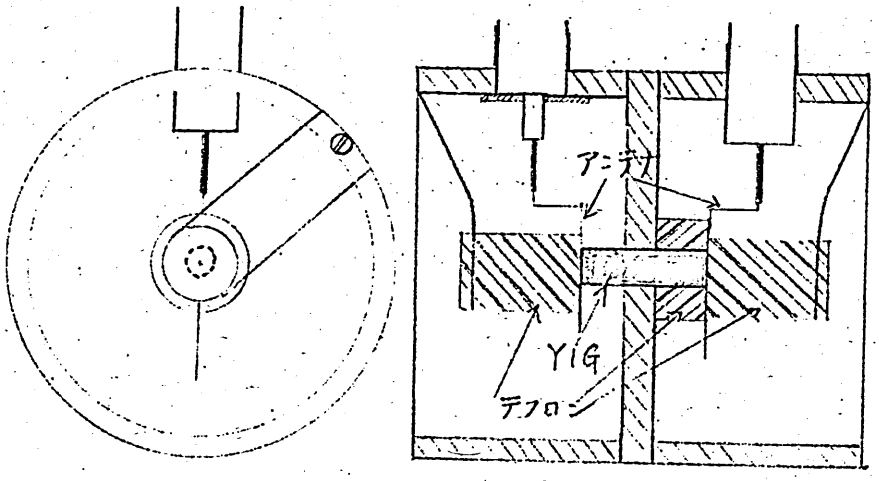



図7 静磁波励振受信用マウント

させること，後者については問題とする静磁波のモードが最もうまく励振されるようにアンテナの形状を工夫するという方針で進んだ。なおこれ以外に磁場に対する遅延時間の関係，伝播損失の周波数依存性なども測定したので最後に述べる。

実験を行なう場合，入力側と出力側の分離された透過形の方が反射形より扱い易いのはいうまでもないので，円柱状のYIGにおいてその一端から励振し他端で受信する方式を選んだ。試料は長さ1cm，直径3mm，$4\pi M_s$は1750 Oe，$\Delta H_0$は5GHzにおいて0.4 Oeで，測定はすべて室温で行なった。

## [I] マウントの入力インピーダンス

### 1) マウントの構造

マウントは図7のような形状の真鍮容器である. YIGを直流磁場と正しい角度をなすように固定し, 入力側から出力側アンテナへYIGを通らず直接伝わるもれの電波がないように密閉式になっている. 同軸線路を直接マウント内に挿入固定し中心導体を適当な長さだけ露出させその先端に 0.1~0.2 mm 直径の銅線を半田づけしてアンテナとしている.

### 2) マウントインピーダンスの測定と考察

図8の測定回路を用いて入力側, 出力側のインピーダンスを測定する, ここでいうマウントインピーダンスは入, 出力用の同軸ケーブル(共を約50 cmの長さ)のコネクターから見たインピーダンスである.

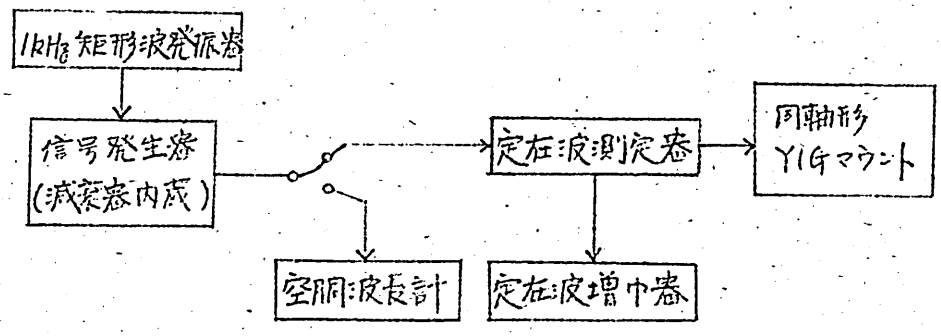



図8 マウントインピーダンスの測定回路

マウントを小形にする必要から使用した同軸線路は比較的細く, Sバンド以上では損失線路と考えねばならないので解析をめんどうなものとしている.

(a) 同軸線の外部導体をマウントに半田づけした場合(図9参照)のインピーダンスがスミス図においてほぼアンテナの長さに応じて円を描く(図10参照)のは, アンテナ

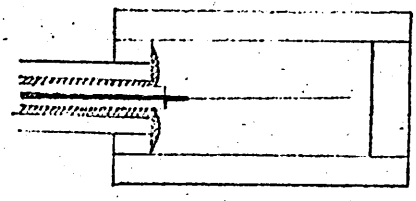


図9 外部導体をマウントに半田づけした場合

が同軸線の中心導体の役割を果している事を示す.

(b) マウント及び同軸線路が無損失であれば, アンテナ長を変えてもリアクタンス分の変化なのでマウントインピーダンスはスミスチャートの最外周を回るはずであるが図10ではかなり内側を回っている. これは同軸線の損失が原因と考えてうまく説明される[附録1]

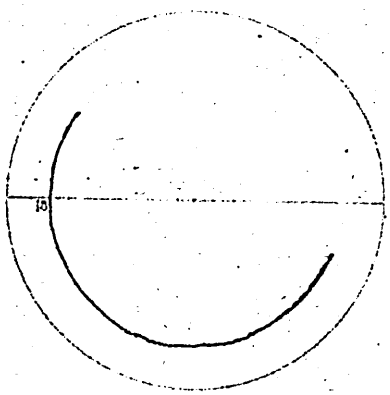


図10 アンテナ長を変えた時のマウントインピーダンスの変化(1)

(c) 図7に示したマウントの右側の部分のように同軸線の外部導体をマウント部から浮かせた状態にしておくと反射係数が1近くになる場合がある.[図11] しかしその原因はアンテナからマウント内に放射されたマイクロ波が今度はマウントを外部導体, 同軸の外部導体をアンテナとして外部に放射されるためと考えられる. 事実, 同軸線路に沿って強い電磁界分布が観測された.

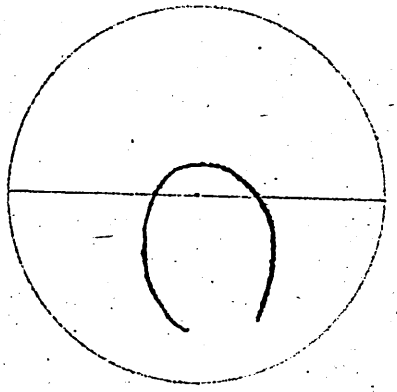


図11 アンテナ長を変えた時のマウントインピーダンスの変化(2)

(d) YIGを挿入した場合, アンテナの長さ次第でインピーダンスが挿入しない場合と異なってくる. これはアンテナ長が適当な値の時にマイクロ波電力がYIGに消費される事を示している.

(e) 以上要するにマウント部は線路としての役割を果しているに過ぎないからアンテナからYIGへの結合をいかにうまくやるかが

問題となってくる.

## [2] 挿入損失*, 遅延時間

1) 測定方法

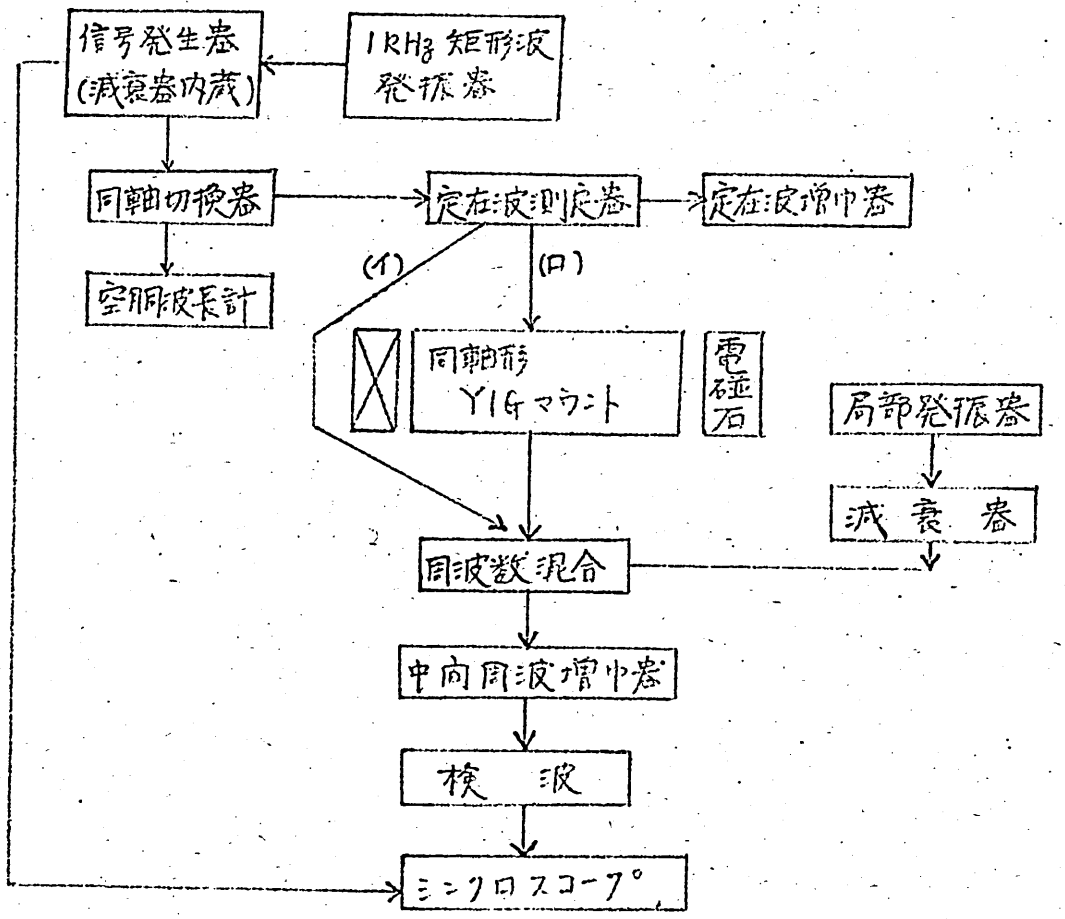



図12. 挿入損失. 遅延時間の測定回路

測定回路は図12の通りである.

挿入損失の測定は, YIGマウント回路を通さずに信号発生器のパルス変調された高周波出力をそのまま混合検波した時(イ)の

---

* 挿入損失とは 電磁波↔静磁波の変換損失(入出力における和)と静磁波の伝播損失の和である.

出力を基準とする．この時の信号発生器の減衰量をa dBとする．次にYIGマウントを通した場合(ロ) SGの減衰量を調整する事によって出力をもとの基準の値に一致させその時の減衰量を読みとる．(b dB) a-b dBを挿入損失とする．

伝播時間はSGからの同期パルスで掃引させ上同様YIGマウントを通した場合と通さない場合の時間のずれをスコープ画上で測定する．

2) 測定結果と考察

(a) 前節(c)で述べた所の外部導体をマウントから浮かせた形式で励振しても効率が良くなるという積極的な理由はないのであるが入出力側とも外部導体をマウントに接続したものより片方を離した方が挿入損失が数dB減少するという結果を得た．

(b) 挿入損失のアンテナ長に対する依存性を2，4，6 GHzに対して調べた結果を図13に示す．

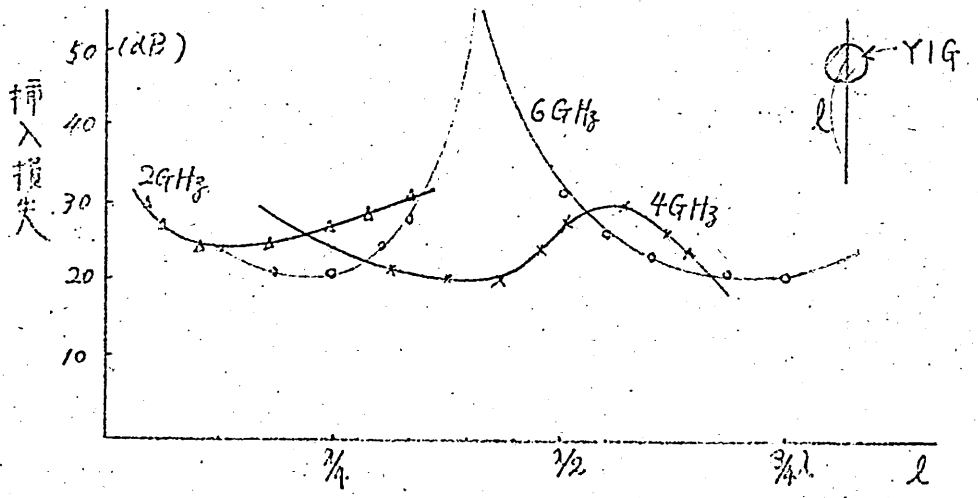



図13 アンテナ長による挿入損失の変化

6 GHzにおいては予想される通りlが1/4の時に損失は最小になっているが他の周波数では必ずしもそうなっていない．これはむしろ当然と言える結果で我々の用いたような閉じた金属容器内で電磁波の模様は複雑を極めているだろうと思われるからである．

しかしとに角YIGにアンテナが接触する所で電流が最大すなわち磁界が最大になるようにアンテナ長を選ぶ事によって相当な挿入損失の減少が期待される事が判明した.

(c) 図14に遅延時間ー挿入損失特性を示す. 遅延時間が0の時の値が変換損失を表わすのであるが実測できなかったので測定値からの外挿を行なっている. その結果2,4,6 GHzで夫々16.2, 12, 12 dBである. 従って各周波数で最適な励振を行なうためにはマウントの夫々に適した大きさがあると思われる. しかし, その周波数に対する共振器となるような形と大きさにしようとすると非実用的な大きさになってしまうので実際上はできない.

(d) 理論的には伝播損失は次式で与えられる. [附録2]

$$L \simeq 2.2 \times \frac{}{} \Delta H_k T \quad [dB] \qquad (4\text{-}1)$$

Tは遅延時間, $\Delta H_k$は試料の磁気共鳴半値巾である. 式(4-1)から図14は直線になるべきであるが先の方で曲るのは, Tの大きい所では測定の方法上, 電力を多くYIGに入れるため飽和の効果が表われたからであろう. T=1μSを越すと約1mWの電力で励振するか, それ以下から飽和が観測されたという報告は数件ある.(7) 又, $\Delta H_k$は周波数に比例するので図14の周波数による傾きの変化も説明がつく.

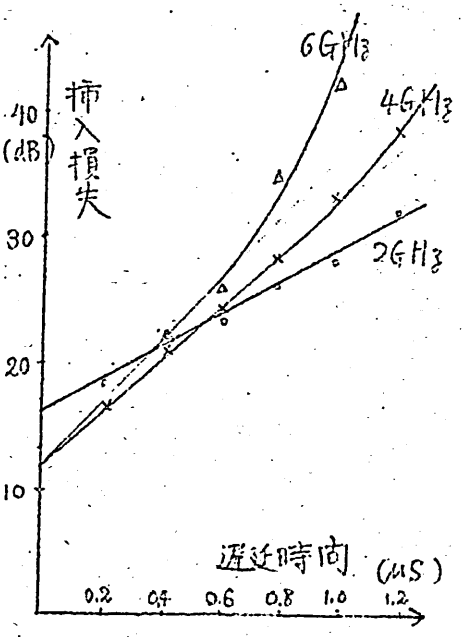
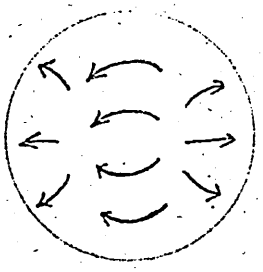


図14 遅延時間ー挿入損失特性

伝播損失はこのように試料によって決まってしまうので回路的にどうこうという事はできない. しかし試料を冷却すれば(例えば液体ヘリウムで冷やせば) $\Delta H_k$が1/10くらいになると報告されている.(8)

(e) アンテナの形状についての工夫

YIGの端面においていかに図5のn=1モードと同じ磁界分布をアンテナによって作り出すか、又いかにそれを大きな値にするかが問題となるのであって前者のためには線状アンテナを用いて来たので





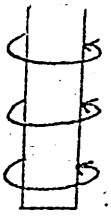
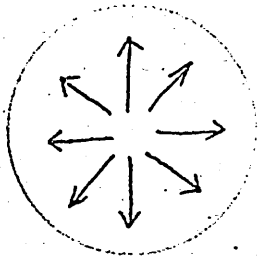


図5 n=1モード(再掲) 図15a 線状アンテナの磁界分布 b 板状アンテナ

あるが適当な巾す板状アンテナでもうまく励振受信されるのではないかと思われる。しかし今の所変換損失は30dBより減っていない。

又図16のようなループアンテナによってn=0モードを励振しようとする試みもループ製作上の困難さから変換損失30dBにとどまり、所期の結果が得られていない。



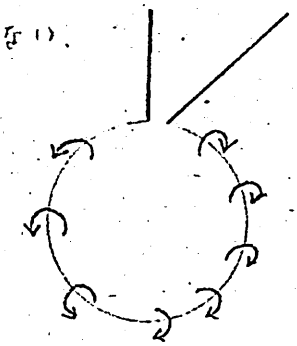


図5 n=0モード(再掲) 図16 ループアンテナの磁界分布

(f) アンテナの太さについての考察

磁界の強さはアンテナ断面が円の場合軸からの距離に反比例するからアンテナをYIG端面に密着して励振受信すると細いアンテナの方がよい事になる。そこでr=0.2, 0.4, 0.6 mmについて測定したが一定の傾向は出なかった。静磁波への変換が試料表面のみならず内部でも起っているためと思われる。

(9) 印加磁場－遅延時間特性

各周波数において理論値と大体一致する。右図においては2GHzのものを画いた。

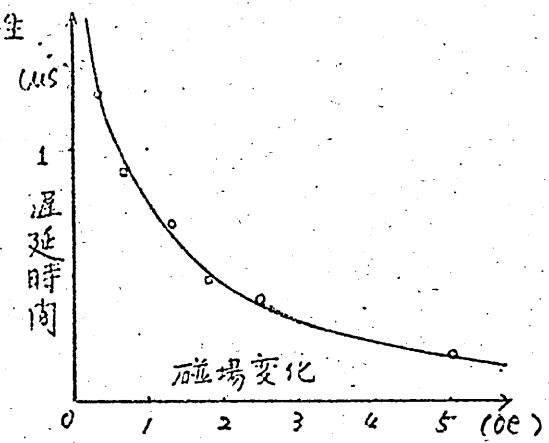



図17 印加磁場－遅延時間特性

まとめ

励振，受信用アンテナの最適長さを見出し，マウントの構造に工夫をする事により従来20dB程度であった変換損失を12dB程度まで減らす事に成功した。

これまでの検討はすべて円柱状試料の端面における磁界分布についてであったので，軸方向の分布についての検討が残された問題である。

謝辞

有益な御討論，御検討を頂いた本学工学部，小倉久直講師，中島将光助教授，及び実験に協力願った学生鐘ヶ江敏行君に深謝する。

## 附録1　図10の説明

YIGマウントは損失線路の終端にリアクタンスをつないだものであるとする。[ここではYIGに消費される電力は無視する]
附図1においてRにおける反射係数の絶対値は

$$|S_R| = \left|\frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c}\right| \simeq \left|\frac{jX - R_c}{jX + R_c}\right| = 1$$

そしてLにおける反射係数は

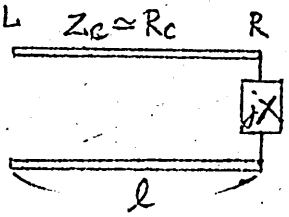
$$S_L = S_R e^{-2\gamma l} = |S_R| e^{-2\alpha l} e^{j(\theta_R - 2\beta l)}$$

であって定在波比は

$$\rho_L = \frac{1+|S_L|}{1-|S_L|} = \frac{1+e^{-2\alpha l}}{1-e^{-2\alpha l}}$$

となるはずである.

附図1. マウントの等価回路




我々の用いた5D2V同軸線の4GHzにおける減衰定数αは0.85dB/mであり, 1mの同軸線については

$$|S_L| = e^{-2\alpha l} \simeq 0.82$$

従って　　$\rho_L \simeq 10$

それゆえ実測値と大体一致している事がわかる.

## 附録2. 式(4-1)の導出

YIGの損失を考慮すると分散関係式(1-12)において

$$k \to k + ik' \quad , \quad \omega \to \omega + i\gamma\frac{\Delta H_k}{2}$$

とおきかえれば良い. 従って

$$\frac{\omega}{\gamma} + i\frac{\Delta H_k}{2} = H_i + 2\pi M_s\left[\frac{\pi i}{(k+ik')R}\right]^2$$

を得る. この式を実数部と虚数部に分けて

$$\Delta H = B\frac{k^2 - k'^2}{(k^2+k'^2)^2}$$

$$\frac{\Delta H_k}{2} = B\frac{-2kk'}{(k^2+k'^2)^2}$$

但し　$\Delta H = \frac{\omega}{\gamma} - H_i$　　$B = 2\pi M_c \left(\frac{r_1}{R}\right)^2$

これらから $k$ を計算すると

$$k = -\sqrt{c}\,(\lambda^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda^2+1} - \lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

但し　$\lambda = \frac{2\Delta H}{\Delta H_k}$ ,　$c = \frac{B}{\Delta H_k}$

又 $k$ について解いて群速度 $d\omega/dk$ を計算すると

$$v_g = -\frac{\gamma \Delta H_k}{2\sqrt{c}}(\lambda^2+1)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda^2+1} - \lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda^2+1} - 2\lambda\right)^{-1}$$

遅延時間を余り大きくとらない場合には $\lambda \gg 1$ であるから

$$k \simeq -\sqrt{c}\left(\frac{1}{2\lambda^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{v_g} \simeq -\frac{2\sqrt{c}}{\gamma \Delta H_k}\left(\frac{2}{\lambda^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$k$ は場所の関数であるから静磁波の伝播損失は $k$ を試料の端から端まで積分する事によって得られる.

$$L = 10 \log e \times 2l \int_0^1 k(\zeta)\, d\zeta \quad [dB]$$

$$= 10 \log e \cdot \frac{\gamma \Delta H_k}{2} \times 2l \times \int_0^1 \frac{\sqrt{B}}{\gamma \Delta H_k^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2}{\lambda^3}\right)^{\frac{1}{2}} d\zeta$$

遅延時間と同様に $1/v_g$ を積分して

$$T = 2l \int_0^1 \frac{1}{v_g}\, d\zeta = 2l \int_0^1 \frac{\sqrt{B}}{\gamma \Delta H_k^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2}{\lambda^3}\right)^{\frac{1}{2}} d\zeta \quad *$$

であるから

$$L = 10(\log e)\,\frac{\gamma \Delta H_k}{2}\, T \quad [dB]$$

従って伝播損失は dB で測って共鳴の半値巾と遅延時間に比例する事が結論された。

---

* 積分を実行すれば式 (2-3) を得る.

## 参考文献


(1) "Consideration on the Propagation and Generation of Magnetostatic Waves and Spin Waves"
P.C. Fletcher, C. Kittel Phys. Rev. 120 1960 P2004~6

(2) "Dispersion of Long Wavelength Spin Waves from Pulse-echo Experiments"
R.W. Damon, H. van de Vaart Phys Rev Lett. 12 1964 P583~5

(3) 例えば "Microwave Ferrites and Ferrimagnetics"
B. Lax, K.J. Button McGraw-Hill Co. 1962 P150

(4) "Topics in Guided-Wave Propagation Through Gyromagnetic Media Part-1 The Completely Filled Cylindrical Guide" H. Suhl, L.R. Walker
BSTJ 1954 P579~639

(5) "Propagation of Magnetostatic Spin Waves at Microwave Frequencies II Rods" R.W. Damon H. Van de Vaart JAP 37 1966 P2445~50

(6) "Theory of Magnetostatic Modes in Long, Axially Magnetized Cylinders" R.I. Joseph E. Schlömann JAP 32 1961 P1001~5

(7) 例えば "Spin-Wave Propagation and the Magnetoelastic Interaction in YIG" J.R. Eshback
J.A.P. 34 1963 P1303

(8) 例えば "Generation of Spin Waves in Nonuniform Magnetic Fields with Application to Magnetic Delay Lines" E. Schlömann, R.I. Joseph, T. Kohane
Proc IEEE 53 1965 P1501

輻射科学研究会 資料

# 周波数逓倍器におけるFM歪の考察

岩田 忠
中島 將光
池上 淳一
（京都大学 工学部）

1968年 11月 29日

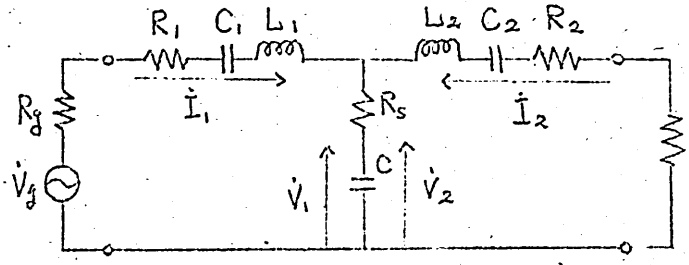
# 周波数逓倍器におけるFM歪の考察

## 1. はしがき

近年無損失な非線形素子（パラクタ）を用いた高能率な逓倍器が開発され、マイクロ波電力源、特に中継装置の固体電子化のための局発電力源として応用されている。これらは一定周波数での応用であるが、周波数変調信号にも逓倍を応用すれば、回路の構成上、有利になることが報告されている。[1] しかしFM波の逓倍は新らしい技術ではなく、アームストロングの周波数変調方式[2]以来の問題である。FM技術が多重通信に用いられるに及んで、線形伝送回路のFM歪等は詳しく検討され多くの研究がなされた。これに反して非線形回路である逓倍器より生ずるFM歪に関しての研究は殆んどない。従来この問題は逓倍器の同調回路等の線形部分と直接周波数逓倍に与かる非線形部分が分離できるものとして考えられているようである。瞬時的に動作する非線形部分が完全に分離できるならば、この部分からFM歪の発生はないので、線形回路のみのFM歪を調べればよい。しかし実際の回路では非線形部分は線形部分と密接に関連して複雑な動作をする。これは逓倍器のみならず、非線形性を応用する、変調器、復調器、振巾制限器などにもそのままあてはまることである。また元来線形であるべき、クライストロン、進行波管増巾器にも非線形性が伴ない、近時、伝送回線の品質が改善されるに従って、この種の問題がAM-PM変換という形でとり上げられている。AM-PM変換という概念は線形回路に非線形性が作用すると、入力信号の振巾変化が準定常的に出力位相変化として表われるということである。FMの変調指数が大きく準定常状態とみなせる場合はこの概念を用いて簡単にFM歪を論じることができよう。しかしこの問題をもう少し厳密に考えるとAM-PM変換は同一のAM周波数から同一のPM（FM）周波数に変換されるものだけではないので、AM-PM変換係

数自身入力振巾の関数となる。更に変換係数が周波数の関数となる場合もあると考えられるが、この場合はもはや、準定常状態とはみなせなくなりこの方法をそのまま推し進めることは無理である。

本文は、FM信号の通信に関し前論文[3]に引き続き一般的なFM歪を求めたものである。前論文では電流励振共振形通信器の基礎的な関係式を求め準定常状態とみなせる場合の歪を求めている。特にAM-PM変換なる概念は用いていないが、通信器の伝達関数から、位相を求める方法をとったので当然この効果も含まれている[4]。本文では最初に基本動作を簡単にまとめた。そして一般的なFM歪を求めるために入出力信号を側帯波に分解する方法を試みた。この方法は物理的にわかりやすいが考慮すべき側帯波の数が多く従って計算すべき行列の階数が高くなるので厳密な計算は困難となる。したがって簡単な考察を行なう程度にとめ次のような方法をとった。即ち信号を側帯波に分解せず出力信号を入力信号と同じFM位相項を持つ形に表現し、非線形理論でよく用いられるハーモニックバランス法によく似た方法で計算し求める歪そのものは小さいことを利用して近似を行なう。この方法は一般的形式にまとめることは難かしいが、回路の線形、非線形にかかわらず計算できる点がすぐれている。電流励振形通信器に関する歪を種々の場合についてこの方法によって解き検討を行なっている。この方法によって従来の非線形回路によるAM-PM変換の理論を、もっと厳密に検討するのも興味あることであろう。




$R_g$ ：電源の内部抵抗
$R_\ell$ ：負荷抵抗
C ：非線形容量
$R_s$ ： 結合抵抗

図 2.1 電流励振形周波数逓倍回路

## 2. 電流励振共振形二逓倍回路

図 2.1 の逓倍回路の動作を簡単にまとめる。電源 $R_g$ と負荷 $R_\ell$ を除いた部分のインピーダンス行列を $(\dot{z}_{11}, \dot{z}_{12}, \dot{z}_{21}, \dot{z}_{22})$ とすると

$$\left.\begin{aligned}
\dot{z}_{11} &= R_1 + R_s + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{S_1}{j\omega} + \frac{3S_3}{j\omega}\left(\left|\frac{\dot{I}_1}{j\omega}\right|^2 + 2\left|\frac{\dot{I}_2}{j2\omega}\right|^2\right) \\
&= (R_g + R_1 + R_s)\cdot(1 + j2\delta_1 Q_1) - R_g \\
\dot{z}_{22} &= R_2 + R_s + j2\omega L_2 + \frac{1}{j2\omega C_2} + \frac{S_2}{j2\omega} + \frac{3S_3}{j2\omega}\left(2\left|\frac{\dot{I}_1}{j\omega}\right|^2 + \left|\frac{\dot{I}_2}{j2\omega}\right|^2\right) \\
&= (R_\ell + R_2 + R_s)\cdot(1 + j2\delta_2 Q_2) - R_\ell \\
\dot{z}_{12} &= -\dot{z}_{21}^{*}, \quad \dot{z}_{21} = \frac{\dot{I}_1}{j\omega}\cdot\frac{S_2}{j\omega}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

ここにおいて $\quad 2\delta_1 = \dfrac{\omega}{\omega_1} - \dfrac{\omega_1}{\omega}, \quad 2\delta_2 = \dfrac{2\omega}{2\omega_2} - \dfrac{2\omega_2}{2\omega} \qquad (2.2)$

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt{\frac{S_1 + 1/C_1}{L_1}}\cdot(1+\varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 = \frac{3L_1 S_3}{2(S_1 + 1/C_1)^2}\left(|\dot{I}_1|^2 + \frac{1}{2}|\dot{I}_2|^2\right) \\
2\omega_2 &= \sqrt{\frac{S_1 + 1/C_2}{L_2}}(1+\varepsilon_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{6L_2 S_3}{(S_1 + 1/C_2)^2}\left(2|\dot{I}_1|^2 + \frac{1}{4}|\dot{I}_2|^2\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

$$Q_1 = \omega_1 L_1/(R_g + R_1 + R_s), \quad Q_2 = 2\omega_2 L_2/(R_\ell + R_2 + R_s) \qquad (2.4)$$

である。ここに $S_1$, $S_2$, $S_3$ はバラクタのバイアス電荷 $Q_0$ における エラスタンス 係数である。［(4.1)式参照］

電源有能電力 $P_{av}$ を指示する励振パラメータ

$$Q_p = |\dot{Q}_p|, \quad \dot{Q}_p = \frac{\dot{z}_{21}}{\sqrt{(R_g + R_1 + R_s)\cdot(R_\ell + R_2 + R_s)}} \qquad (2.5)$$

を導入すると、搬送波周波数 $\omega_c$ におけるパラメータ $\theta_{P_0}^2$ と $P_{av}$ との関係は

$$\frac{P_{av}}{P_m} = \frac{1}{4} Q_{P_0}^2 (1 + \theta_{P_0}^2)^2 \qquad (2.6)$$

で与えられる。ここに $P_m$ は図2.1の通信器の能率が最大となるときの電源固有電力を表す。有能通信能率 $\eta_{av}$ は

$$\eta_{av} = \frac{R_g \cdot R_e}{(R_g + R_1 + R_c)(R_e + R_2 + R_c)} \left| \frac{2Q_P}{(1 + j2\delta_1 Q_1)(1 + j2\delta_2 Q_2) + Q_P^2} \right|^2 \qquad (2.7)$$

と表わされ、両共振回路の同調点が合致 ($\delta_1 = \delta_2$) している時、

$$Q_{P_0}^2 \gtrless \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{Q_2}{Q_1}\right) \qquad (2.8)$$

に従って単峰、平坦、双峰特性となる。

入出力間の伝達関数は、(2.7)式の平方根（絶対値記号内はそのままの形で外へ出す）で与えられ、入力側へ換算した伝達関数の位相特性は

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4}(\mathrm{sgn}\,\delta_2 - 3) + \frac{1}{2}\tan^{-1} 2\delta_2 Q_2 - \tan^{-1} \frac{2(\delta_1 Q_1 + \delta_2 Q_2)}{1 + Q_P^2 - 4\delta_1 \delta_2 Q_1 Q_2} \qquad (2.9)$$

である。これまで準定常状態のFM歪を求めたのが前論文の結果であり $Q_P^2$ 従って入力信号の振巾変化をも考慮されているのでいわゆるAM-PM変換の効果も含まれている。

## 3. 変調指数が小さい場合のFM歪

前の結果は変調指数が大きく準定常状態とみなせる場合に適用されるが、変調指数が小さい場合は、他の方法で計算する必要がある。この節では、標準的とみられる方法即ち側帯波に分解する方法を考察しよう。変調指数

$$\beta = \omega_d / \omega_m \qquad (3.1)$$

$\omega_d$：周波数変移、$\omega_m$：変調周波数

なるFM波は.

$$\dot{S} = \tilde{S}\, e^{j\{\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t + \theta)\}}$$
$$= \tilde{S}\, e^{j\omega_c t} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu(\beta)\, e^{j\nu(\omega_m t + \theta)} \qquad (3.2)$$

とあらわされる。厳密には無限個の側帯波を考慮しなければならないが、変調指数$\beta$が小さいときは、ベッセル関数は

$$J_\nu(\beta) \approx \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^\nu \qquad (3.3)$$

とかかれ高次の項は省略できるようになる。ところで非線形容量に関する、FM変調をうけている $i$, $v$, $q$ は周波数成分 $\omega_c$ 及び $\omega_m$ に関する二重フーリエ級数に表現される。

$$q = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \dot{Q}_{a\alpha}\, e^{j(a\omega_c + \alpha\omega_m)t}, \quad \dot{Q}_{-a-\alpha} = \dot{Q}_{a\alpha}^{*} \qquad (3.4)$$

非線形容量は、(4.1)式によって表わされるから電圧 $v$ 及び、電荷 $q$ の二重フーリエ級数表示 (3.4) を用いると、フーリエ係数間の関係として.

$$\dot{V}_{cr} = S_1 \dot{Q}_{cr} + S_2 \sum_{a} \sum_{\alpha} \dot{Q}_{a\alpha} \dot{Q}_{c-a,\gamma-\alpha} + \cdots \qquad (3.5)$$

を得るが、二逓倍の場合 $S_2$ まで考慮することにすれば、上式は

$$V_{1\cdot} = S_1 Q_{1\cdot} + 2 S_2 (Q)^t Q_{2\cdot}$$
$$V_{2\cdot} = S_2 (Q)\, Q_{1\cdot} + S_1 Q_{2\cdot} \qquad (3.6)$$

なる行列形式にまとめることができる。ここに $V_{1\cdot}$, $Q_{2\cdot}$ 等は.

$$V_{1\cdot} = \begin{bmatrix} \vdots \\ V_{1-3} \\ V_{1-2} \\ V_{1-1} \\ V_{10} \\ V_{11} \\ V_{12} \\ V_{13} \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad Q_{2\cdot} = \begin{bmatrix} \vdots \\ Q_{2-3} \\ Q_{2-2} \\ Q_{2-1} \\ Q_{20} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \\ Q_{23} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

なる列ベクトルを示し（Q）は行列

$$(Q)=\begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ Q_{10} & Q_{1-1} & Q_{1-2} & Q_{1-3} & \cdots & \cdots & \\ Q_{11} & Q_{10} & Q_{1-1} & Q_{1-2} & Q_{1-3} & \cdots & \\ Q_{12} & Q_{11} & Q_{10} & Q_{1-1} & Q_{1-2} & Q_{1-3} & \cdots \\ Q_{13} & Q_{12} & Q_{11} & Q_{10} & Q_{1-1} & Q_{1-2} & Q_{1-3} \\ \vdots & Q_{13} & Q_{12} & Q_{11} & Q_{10} & Q_{1-1} & Q_{1-2} \\ \vdots & \vdots & Q_{13} & Q_{12} & Q_{11} & Q_{10} & Q_{1-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & Q_{13} & Q_{12} & Q_{11} & Q_{10} \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (3,8)$$

を表す。また十印はエルミート共役行列であることを意味する。

図 2.1 の回路において

$$I_{\mu\cdot}=(j\mu\omega)Q_{\mu\cdot}$$

$$=j\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mu\omega_c-2\omega_m & & & & \\ & & \mu\omega_c-\omega_m & & & \\ & & & \mu\omega_c & & \\ & & & & \mu\omega_c+\omega_m & \\ & & & & & \mu\omega_c+2\omega_m \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} Q_{\mu\cdot} \qquad (3,9)$$

$$(Z_\mu)=\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & Z'_{\mu\mu}(\delta_{\mu-2}) & & & & \\ & & Z'_{\mu\mu}(\delta_{\mu-1}) & & & \\ & & & Z'_{\mu\mu}(\delta_{\mu 0}) & & \\ & & & & Z'_{\mu\mu}(\delta_{\mu 1}) & \\ & & & & & Z'_{\mu\mu}(\delta_{\mu 2}) \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (3,10)$$

$$2\delta_{\mu\nu}=\frac{\mu\omega_c+\nu\omega_m}{\mu\omega_c}-\frac{\mu\omega_c}{\mu\omega_c+\nu\omega_m} \qquad (3,11)$$

ただし、 $Z'_{11}=\dot{Z}_{11}+R_g$ 、 $Z'_{22}=\dot{Z}_{22}+R_e$

なる表式を用いると

$$V_{g\cdot}=\left\{(Z_1)-2\cdot S_2^2(Q)^+(j2\omega)^{-1}(Z_2)^{-1}(Q)(j\omega)^{-1}\right\}I_{1\cdot} \qquad (3,12)$$

および

$$\dot{I}_2 = -(Z_2)^{-1} S_2(Q)(j\omega)^{-1} I_1. \tag{3.13}$$

を得る。

今簡単のため、信号の小さい場合［(Q)の各項が小さい］を考えて、(3.12)式の第二項を無視し、第三側帯波まで考慮すると

$$\dot{I}_{2-3} = \frac{S_2}{R_{t1}^2 R_{t2}(1+j2\delta_{2-3}Q_2)} \left\{ \frac{2\dot{V}_{g0}\dot{V}_{g-3}}{\omega_c(\omega_c-3\omega_m)(1+j2\delta_{1-3}Q_1)(1+j2\delta_{10}Q_1)} + \frac{2\dot{V}_{g-1}\dot{V}_{g-2}}{(\omega_c-\omega_m)(\omega_c-2\omega_m)(1+j2\delta_{1-2}Q_1)(1+j2\delta_{1-1}Q_1)} \right\} \tag{3.14}$$

$$\dot{I}_{2-2} = \frac{S_2}{R_{t1}^2 R_{t2}(1+j2\delta_{2-2}Q_2)} \left\{ \frac{2\dot{V}_{g1}\dot{V}_{g-3}}{(\omega_c+\omega_m)(\omega_c-3\omega_m)(1+j2\delta_{1-3}Q_1)(1+j2\delta_{11}Q_1)} + \frac{2\dot{V}_{g0}\dot{V}_{g-2}}{\omega_c(\omega_c-2\omega_m)(1+j2\delta_{1-2}Q_1)(1+j2\delta_{10}Q_1)} + \frac{\dot{V}_{g-1}^2}{(\omega_c-\omega_m)^2(1+j2\delta_{1-1}Q_1)^2} \right\} \tag{3.15}$$

$$\dot{I}_{2-1} = \frac{S_2}{R_{t1}^2 R_{t2}(1+j2\delta_{2-1}Q_2)} \left\{ \frac{2\dot{V}_{g2}\dot{V}_{g-3}}{(\omega_c-3\omega_m)(\omega_c+2\omega_m)(1+j2\delta_{1-3}Q_1)(1+j2\delta_{12}Q_1)} + \frac{2\dot{V}_{g1}\dot{V}_{g-2}}{(\omega_c-2\omega_m)(\omega_c+\omega_m)(1+j2\delta_{1-2}Q_1)(1+j2\delta_{11}Q_1)} + \frac{2\dot{V}_{g0}\dot{V}_{g-1}}{(\omega_c-\omega_m)\omega_c(1+j2\delta_{1-1}Q_1)(1+j2\delta_{10}Q_1)} \right\} \tag{3.16}$$

$$\dot{I}_{20} = \frac{-S_2}{R_{t1}^2 R_{t2}(1+j2\delta_{20}Q_2)} \left\{ \frac{2\dot{V}_{g3}\dot{V}_{g-3}}{(\omega_c-3\omega_m)(\omega_c+3\omega_m)(1+j2\delta_{1-3}Q_1)(1+j2\delta_{13}Q_1)} + \frac{2\dot{V}_{g2}\dot{V}_{g-2}}{(\omega_c-2\omega_m)(\omega_c+2\omega_m)(1+j2\delta_{1-2}Q_1)(1+j2\delta_{12}Q_1)} + \frac{2\dot{V}_{g1}\dot{V}_{g-1}}{(\omega_c-\omega_m)(\omega_c+\omega_m)(1+j2\delta_{1-1}Q_1)(1+j2\delta_{11}Q_1)} + \frac{\dot{V}_{g0}^2}{\omega_c^2(1+j2\delta_{20}Q_1)^2} \right\} \tag{3.17}$$

なる出力電流を得る。$\dot{I}_{21}$、$\dot{I}_{22}$、$\dot{I}_{23}$ は、(3.14)～(3.16)式よりの類推で

容易に求められる。ここに

$$R_{t_1} = R_g + R_1 + R_s \quad , \quad R_{t_2} = R_2 + R_2 + R_s \qquad (3.18)$$

これらの式より、出力信号は図3.1に示すように入力側帯波の種々の結合からなっていることがわかる。

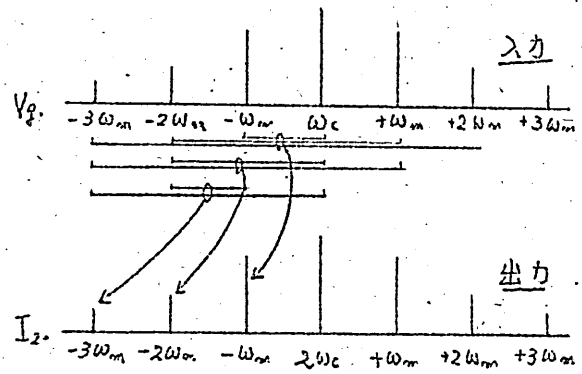



図3.1 入出力波側帯波の関係

以上の式を附録Iに従って計算すれば各高調波歪が求められるが、これは形式的にはよくまとまっているが計算が尨大になるので余り実用的ではない。したがって詳細な歪の検討は次節による方法にゆずり、変調指数が非常に小さい場合の概要を調べてみよう。変調指数が小さいときは、(3.3)式によって高次の側帯波は小さくなるので搬送波の近傍の二つの側帯波のみを考えてよいとみなされる。しかしこれは信号波の基本周波数に対していえることであって、高次の高調波歪に対しては誤差が大きくなるが、歪のオーダーを知るという意味でこの近似を用いることにしよう。その代り上で無視した(3.12)式の第二項を考えに入れ、入力信号が必ずしも小さくないとして出力信号を求めると

$$I_{2_0} = \frac{Q_{P_0}}{\sqrt{R_{t_1} R_{t_2}}} \left[ \begin{array}{c} \dfrac{2\dot{V}_{g-1}}{(1-j2\delta_m Q_1)(1-j\delta_m Q_2)+Q_{P_0}^2} \\ \dfrac{\dot{V}_{g_0}}{1+Q_{P_0}^2} \\ \dfrac{2\dot{V}_{g1}}{(1+j2\delta_m Q_1)(1+j\delta_m Q_2)+Q_{P_0}^2} \end{array} \right] \qquad (3.19)$$

ここに $\dot{V}_{g_0}$ は実数とし

$$\delta_{\mu\nu} \approx \frac{\nu\omega_m}{\mu\omega_c} = \frac{\nu}{\mu}\delta_m \qquad (3.20)$$

なる近似を用いている。入力信号として、

$$V_{g.} = V_{g0} \begin{bmatrix} J_{-1}(\beta) \\ J_0(\beta) \\ J_1(\beta) \end{bmatrix} \qquad (3.21)$$

を入れたときの出力信号 (3.19) 内の第三高調波歪を附録Ⅰに従って求めると

$$K_3 = \left| \frac{1 + Q\rho_0^2}{(1+j2\delta_m Q_1)(1+j\delta_m Q_2) + Q\rho_0^2} \right|^2 \beta^2 \qquad (3.22)$$

を得る。(3.20) 式のように周波数特性の対称性を仮定したので、第二高調波歪は表われない。(3.22) 式の物理的意味を考えてみる。FM信号は一般に (3.2) 式で表わされるが、$\nu = 0, \pm 1$ のみの項をとって (3.19) 式の出力電流を

$$\mathcal{S}' e^{j2\omega_c t} \sum_{\nu=-1}^{1}{}' J_\nu(\beta') e^{j\nu\omega_m t}$$

$$= \mathcal{S}' e^{j2\omega_c t} \{ J_0(\beta') + j2 J_1(\beta') \sin\omega_m t \}$$

とおけば

$$\frac{J_1(\beta')}{J_0(\beta')} = \frac{\dot{I}_{21}}{\dot{I}_{20}} = \frac{2(1+Q\rho_0^2)}{(1+j2\delta_m Q_1)(1+j\delta_m Q_2)+Q\rho_0^2} \cdot \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}$$

が得られる。ここに $\beta'$ は出力信号の等価変調指数である。$\beta$ 及び $\beta'$ が小さいとき、(3.3) 式によって

$$\beta' = \frac{2(1+Q\rho_0^2)}{(1+j2\delta_m Q_1)(1+j\delta_m Q_2)+Q\rho_0^2} \beta \qquad (3.23)$$

とかける*。これは変調周波数 $\omega_m = \delta_m \omega_c$ によって変化する $\beta$ の周波数特性を表わしている。この関係は図 3.2 のような等価回路で表わすことができる。電圧増巾度 2 は逓倍によって変調指数が2倍されることを表し二段の CR 低域沪波器は逓倍器共振回路の Q による高域減衰を

---

* 変調指数が小さいとき (3.2) 式において

$$J_\nu(\beta) e^{j\nu(\omega_m t + \varphi)} \approx \frac{1}{\nu!} \left(\frac{1}{2}\beta e^{j\varphi}\right)^\nu e^{j\nu\omega_m t}$$

とかけるので便宜的に $\beta$ の複素表示が許される。

意味する。これらの定数の間には

$$\omega_c(C_1R_1+C_2R_2+C_2R_1) = \frac{2Q_1+Q_2}{1+Qp_0^2}$$

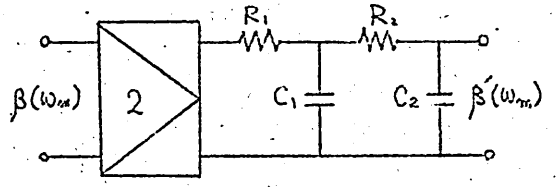



図3.2 伝達関数の等価回路

$$\omega_c^2 C_1C_2R_1R_2 = \frac{2Q_1Q_2}{1+Qp_0^2}$$

なる関係がある。(3.23)式及び(I.10)式を見ると(3.22)式は逓倍器によって等価的な変調指数が変化したために生じた歪を表していることがわかる。実際的には、ここに無視した高次側帯波が存在するので、歪はもっと少なく、(3.22)式は最大限の見積りを与えているとみられる。

## 4. 摂動的な方法による歪の考察

前節において示したように周波数逓倍器の歪を側帯波を用いて計算しようとしても、きわめて複雑になってしまい、実際問題としては不可能と考えられるくらいである。したがって本節では、それとは全く異なった立場から考察を行なうことにする。

(1). 同調のずれていない場合の考察

ここでは、理想的階段接合ダイオードを用いた図2.1に示される二逓倍回路で、一次側、二次側の同調回路が搬送周波数$\omega_c$、$2\omega_c$にそれぞれ完全にあっている場合を問題にする。

バラクタの両端の電圧$v$(拡がり抵抗はのぞいたもの)と電荷$q$の間には、次のような関係がある。

$$v = S_1q + S_2q^2 + S_3q^3 + \cdots \qquad (4.1)$$

理想的な階段接合ダイオードでは$S_3$以上の項は零になる。ここで電荷$q$を

$$q = \dot{Q}_1 e^{j\omega_c t} + \dot{Q}_1^* e^{-j\omega_c t} + \dot{Q}_2 e^{j2\omega_c t} + \dot{Q}_2^* e^{-j2\omega_c t} \qquad (4.2)$$

のようにおくことができる。ただし$\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$は、まだ時間関数であり、そ

の周波数スペクトラムは $\omega_c$ に比べて充分小さい範囲におさまっている。したがって(4.2)式を(4.1)式に代入して $S_2$ の項からでるものを考えれば、$\omega_c, 2\omega_c$ の近傍の周波数スペクトラムを持つものとして $2S_2 \dot{Q}_1^* \dot{Q}_2 e^{j\omega_c t}$、$S_2 \dot{Q}_1^2 e^{j2\omega_c t}$ をそれぞれ得ることがわかる。

ところで電荷は電流の積分で与えられるが、(3.2)式のゼロく変調周波数が一個の場合についてこれを一旦側帯波にわけて考えると

$$\dot{Q}_1 e^{j\omega_c t} = \int^t \dot{I}_1 e^{j\omega_c t} dt$$

$$= \int^t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_m e^{j(\omega_c + n\omega_m)t} dt$$

$$= \frac{1}{j\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n\delta_m} e^{j(\omega_c + n\omega_m)t}$$

$$= \frac{1}{j\omega_c} e^{j\omega_c t} \left\{ 1 - \frac{1}{j\omega_c}\frac{d}{dt} + \frac{1}{(j\omega_c)^2}\frac{d^2}{dt^2} + \cdots \right\} \dot{I}_1 \quad (4.3)$$

を得るが、第二項以下には分母に $\omega_c$ がついており、微分演算子からは $\omega_m$ のオーダーのものしかでてこないので、第二項以下は小さい。しかし第二項には $j$ がついているので、これは異った振舞をするので(非対称性を示す)、これだけ残して他は無視することができる。

同調がとれている時の単一同調回路のインピーダンスが

$$R\cdot(1 + j2\delta Q - j\delta^2 Q)$$

のようにあらわされ*ることに注意すれば、(2.1)、(4.3)式及び附録IIを考慮して、次のように回路方程式を得る。

$$\dot{V}_2 = R_{t1}\left(1 + \frac{2Q_1}{\omega_c}\frac{d}{dt} + j\frac{Q_1}{\omega_c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)\dot{I}_1$$

$$+ \frac{S_2}{\omega_c^2}\left(1 + j\frac{1}{\omega_c}\frac{d}{dt}\right)^* \dot{I}_1^* \cdot \left(1 + j\frac{1}{2\omega_c}\frac{d}{dt}\right)\dot{I}_2 \quad (4.4)$$

$$0 = -\frac{S_2}{\omega_c^2}\left\{\left(1 + j\frac{1}{\omega_c}\frac{d}{dt}\right)\dot{I}_1\right\}^2$$

---

* ただし $\delta = (\omega - \omega_c)/\omega_c$ で (2.2) 式とは定義がちがう。

$$+R_{t_2}\left(1+\frac{2Q_2}{2\omega_c}\frac{d}{dt}+j\frac{Q_2}{(2\omega_c)^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)\dot{I}_2 \qquad (4.5)$$

ここでは歪がきわめて小さい場合を問題にしているため

$$\dot{I}_1=\tilde{I}_1(1+\dot{x}_1)\,e^{j\beta\sin\omega_m t} \qquad (4.6)$$

$$\dot{I}_2=\tilde{I}_2(1+\dot{x}_2)\,e^{j2\beta\sin\omega_m t}$$

のようにおく。$\dot{V}_g$についても同様におき文のかわりに$\dot{g}$をおく。ただし$\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$は微少量の交流成分で、$\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$は直流量である。$\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$と歪の関係は附録Ⅲによって示されるが、それを用いて歪を求めることができるのである。(4.6)式を(4.4), (4.5)式に代入して

$$\tilde{V}_g(1+\dot{g})\fallingdotseq R_{t_1}\tilde{I}_1\Big\{1+\dot{x}_1+\frac{2Q_1}{\omega_c}\dot{x}_1'+j2\delta_m Q_1\beta(1+\dot{x}_1)\cos\omega_m t$$

$$+j\frac{Q_1}{\omega_c^2}\dot{x}_1''-2\delta_m Q_1\beta\frac{1}{\omega_c}\dot{x}_1'\cos\omega_m t+\delta_m^2\theta_1\beta(1+\dot{x}_1)\sin\omega_m t$$

$$-j\delta_m^2 Q_1\beta^2(1+\dot{x}_1)\cdot\cos^2\omega_m t\Big\}+\frac{\omega_2}{\omega_c^2}\tilde{I}_1^*\tilde{I}_2\Big\{1+\dot{x}_1^*+\dot{x}_2+\dot{x}_1^*\dot{x}_2$$

$$+j\frac{1}{2\omega_c}(1+\dot{x}_1^*)\dot{x}_2'-2\delta_m\beta(1+\dot{x}_1^*+\dot{x}_2+\dot{x}_1^*\dot{x}_2)\cos\omega_m t$$

$$-j\frac{1}{\omega_c}\dot{x}_1^{*\prime}(1+\dot{x}_2)\Big\} \qquad (4.7)$$

$$0\fallingdotseq-\frac{\omega_2}{\omega_c^2}\tilde{I}_1^2\Big\{1+2\dot{x}_1+\dot{x}_1^2+j\frac{2}{\omega_c}(1+\dot{x}_1)\dot{x}_1'-2\delta_m\beta(1+2\dot{x}_1$$

$$+\dot{x}_1^2)\cos\omega_m t\Big\}+R_{t_2}\tilde{I}_2\Big\{1+\dot{x}_2+\frac{Q_2}{\omega_c}\dot{x}_2'+j\delta_m Q_2\beta(1+\dot{x}_2)$$

$$\times\cos\omega_m t+j\frac{Q_2}{4\omega_c^2}\dot{x}_2''-\delta_m Q_2\beta\frac{1}{\omega_c}\dot{x}_2'\cos\omega_m t+\frac{1}{2}\delta_m^2 Q_2\beta$$

$$\times(1+\dot{x}_2)\sin\omega_m t-j\delta_m^2 Q_2\beta^2(1+\dot{x}_2)\cos^2\omega_m t\Big\} \qquad (4.8)$$

ただし右肩のダッシュは時間微分をあらわす。またここで符号を用いてないのは、(4.4), (4.5)式の非線形性を示す項を計算する時、微分演算を通じてでてくるもの同志の積を無視したためである。それは、それ

らについているjが積をとったことにより実数になってしまうから、それらのものは対称性をあらわすにすぎず、そうなれば$\delta_m^2$がかかっているだけ小さいから無視しうるのである。これは実際に計算を行なって$\delta_m$が小さいことに注意すればすぐわかることである。

(4.8)式において、$\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{j}$が微少な交流分であり、その結合によって生じる直流分は1に比べて十分小さいとすると

$$\dot{V}_g = R_{t_1}\dot{I}_1 + \frac{\delta_2}{\omega_c^2}\dot{I}_1^*\dot{I}_2 \qquad (4.9)$$

$$0 = -\frac{\delta_2}{\omega_c^2}\dot{I}_1^2 + R_{t_2}\dot{I}_2 \qquad (4.10)$$

を得るが、これは下門信号でない単一周波数のものを、完全に同調をとって二通信する時の回路方程式と一致しており、したがって先に行なった解析[3]をそのまま利用しうることがわかる。

ここで$\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{j}$を次のように実数部と虚数部にわける。

$$\dot{x}_1 = \xi_1 + j\eta_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = \xi_2 + j\eta_2 \quad , \quad \dot{j} = \varepsilon + j\zeta \qquad (4.11)$$

これを(4.7), (4.8)式に代入し実数部、虚数部をわけてかけば

$$(1+Q_{t_1}^2)\varepsilon = \xi_1 + \frac{2Q_1}{\omega_c}\xi_1' - 2\delta_m Q_1\beta\eta_1\cos\omega_m t - \frac{Q_1}{\omega_c^2}\eta_1'' - 2\delta_m Q_1\beta \times \frac{1}{\omega_c}\xi_1'\cos\omega_m t + \delta_m^2 Q_1\beta(1+\xi_1)\sin\omega_m t + \delta_m^2 Q_1\beta^2\eta_1\cos^2\omega_m t + Q_{t_2}^2\left\{\xi_1 + \xi_2 + \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - \frac{1}{2\omega_c}(\eta_2' + \xi_1\eta_2' - \xi_2'\eta_1) - 2\delta_m\beta(1+\xi_1+\xi_2+\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\cos\omega_m t + \frac{1}{\omega_c}(-\eta_1' + \xi_1'\eta_2 - \xi_2\eta_1')\right\} \qquad (4.12)$$

$$0 = -\left\{2\xi_1 + \xi_1^2 - \eta_1^2 - \frac{2}{\omega_c}\eta_1' - \frac{2}{\omega_c}(\xi_1\eta_1' + \xi_1'\eta_1) - 2\delta_m\beta(1+2\xi_1+\xi_1^2-\eta_1^2)\cos\omega_m t\right\} + \xi_2 + \frac{Q_2}{\omega_c}\xi_2' - 2\delta_m Q_2\beta\eta_2\cos\omega_m t - \frac{Q_2}{4\omega_c^2} \times \eta_2'' - \delta_m Q_2\beta\frac{1}{\omega_c}\xi_2'\cos\omega_m t + \frac{1}{2}\delta_m^2 Q_2\beta(1+\xi_2)\sin\omega_m t + \delta_m^2 Q_2\beta^2\eta_2\cos^2\omega_m t \qquad (4.13)$$

$$(1+Q_{p_0}^2)\zeta = \eta_1 \quad \frac{2Q_1}{\omega_c}\eta_1' + 2\delta_m Q_1\beta(1+\xi_1)\cos\omega_m t + \frac{Q_1}{\omega_c^2}\xi_1'' - 2\delta_m Q_1\beta$$

$$\times\frac{1}{\omega_c}\eta_1'\cos\omega_m t + \delta_m^2 Q_1\beta\eta_1\sin\omega_m t - \delta_m^2 Q_1\beta^2(1+\xi_1)\cos^2\omega_m t$$

$$+ Q_{p_0}^2\Big\{-\eta_1+\eta_2-\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1+\frac{1}{2\omega_c}(\xi_2'+\xi_1\xi_2'+\eta_1\eta_2') - 2\delta_m\beta$$

$$\times(-\eta_1+\eta_2+\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\cos\omega_m t - \frac{1}{\omega_c}(\xi_1+\xi_1'\xi_2+\eta_1'\eta_2)\Big\} \tag{4.14}$$

$$0 = -\Big\{2\eta_1+2\xi_1\eta_1+\frac{2}{\omega_c}(\xi_1'+\xi_1\xi_1'-\eta_1\eta_1') - 2\delta_m\beta(2\eta_1+2\xi_1\eta_1)$$

$$\times\cos\omega_m t\Big\} + \eta_2 + \frac{Q_2}{\omega_c}\eta_2' + 2\delta_m Q_2\beta(1+\xi_2)\cos\omega_m t + \frac{Q_2}{4\omega_c^2}\xi_2''$$

$$-\delta_m Q_2\beta\frac{1}{\omega_c}\eta_2'\cos\omega_m t + \frac{1}{2}\delta_m^2 Q_2\beta\eta_2\sin\omega_m t$$

$$-\delta_m^2 Q_2\beta^2(1+\xi_2)\cos^2\omega_m t \tag{4.15}$$

が得られる。ここにおいて $Q_{p_0}^2$ は (2.5) 式によって与えられる。

これで一応、歪の基本式が得られたわけでこれをとけばよいのであるが、ここでは次のような近似を行なうことにする。すなわち $\zeta$ は時間関数であり、$\omega_m$ に関し、基本波、高調波を多く含んでいて、上式に代入すると、それらの各成分が結合して、結合する波の和もしくは差の周波数にあたる結合波を生ずる。ここですべての結合が周波数の和のみから生じるものを和波、一つでも差の周波数が入るものを差波と呼ぶことにきめれば、差波の大きさは和波の大きさに比べて小さく無視し得るというのが、ここでの近似である。この近似は適当なものであって、例えば、第三高調波と基本波成分が結合して生じた第二高調波と基本波同志の結合によって生じた第二高調波を比較してみる。高次高調波ほど小さいという明らかな事実を考えに入れる時、第二高調波のオーダーは、基本波同志の結合から生じたものと同じで、基本波を一次と考えると二次のオーダーになり、一般に第 $n$ 高調波は $n$ 次となるので、第三高調波と基本波から生じたものは四次のオーダーになる。すなわち一般的に差波によるものは和波によるものより二次以上小さいものになるから、無

視することが許されるのである。このように差波を無視して和波のオーダーでの計算をすれば計算がきわめて簡単になる。もしも計算の精度が悪い時にはここで得られた解を (4.12)～(4.15) 式に代入して逐次近似で求めることもできるがかなりめんどうなことになると思われる。しかし実際問題としてそのような必要はまずないものと考えられる。すなわちそのような時は高次歪が減衰しにくい場合であり実際的なものではないからである。

さらに以下の計算をするに当って、次の事実に注意をはらう必要があるであろう。すなわち回路の非対称性から生じる $\xi_1, \xi_2$ の奇数次高調波 $\eta_1, \eta_2$ の偶数次高調波成分はともに対応する $\eta_1, \eta_2$ の奇数次高調波、$\xi_1, \xi_2$ の偶数次高調波成分より小さいということである。このことは直感的に納得のいくことであり、(4.3) 式において非対称性をあらわす項には分母に $\omega_c$ が余分についていることからもわかる。この点については、後の計算結果からも証明されるであろう。

上述のごとくここでは和波のオーダーの近似を行なうのであるから、附録IVにより複素表示をして計算をすることが許されるから

$$\xi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\Xi}_{kn} e^{jn\omega_m t} \quad , \quad \eta_k = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}_{kn} e^{jn\omega_m t} \qquad (4.16)$$
$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{E}_n e^{jn\omega_m t} \quad , \quad \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{Z}_n e^{jn\omega_m t}$$

のようにおく。左辺が実数で右辺が複素数で一見具合が悪いようであるが、右辺にはもう一つこれの共役な項がついているのを不必要だから書いていないだけのことであり、これでかまわない。

(4.16) 式を (4.12)～(4.15) 式に代入して ハーモニックバランスを行なえばよいわけである。まず基本波については

$$(1+Q_{p_0}^2)\dot{E}_1 = (1+Q_{p_0}^2 + j2\delta_m Q_1)\dot{\Xi}_{11} + Q_{p_0}^2 \dot{\Xi}_{21} + \delta_m^2 Q_1 \dot{H}_{11} - j\frac{1}{2}\delta_m^2 Q_1 \beta$$
$$- Q_{p_0}^2 \left(j\frac{1}{2}\delta_m \dot{H}_{21} + j\delta_m \dot{H}_{11} + \delta_m \beta\right) \qquad (4.17)$$
$$0 = -2\dot{\Xi}_{11} + (1+j\delta_m Q_2)\dot{\Xi}_{21} + \frac{1}{4}\delta_m^2 Q_2 \dot{H}_{21} - j\frac{1}{4}\delta_m^2 Q_2 \beta + j2\delta_m \dot{H}_{11}$$

$$+\delta_m\beta \qquad (4.18)$$

$$(1+Q_{P_0}^2)\dot{Z}_1=(1-Q_{P_0}^2+j2\delta_m Q_1)\dot{H}_{11}+Q_{P_0}^2\dot{H}_{21}+\delta_m Q_1\beta \qquad (4.19)$$

$$0=-2\dot{H}_{11}+(1+j\delta_m Q_2)\dot{H}_{21}+\delta_m Q_2\beta \qquad (4.20)$$

が得られる。(4.19)．(4.20)式の右辺には(4.17)．(4.18)式に対応する項が，もっと多くついているのであるが，先に述べた注意のように $\dot{\Xi}_{11}$，$\dot{\Xi}_{21}$ は小さいから無視した。

次に第二高調波については．

$$(1+Q_{P_0}^2)\dot{E}_2=(1+Q_{P_0}^2+j4\delta_m Q_1)\dot{\Xi}_{12}+Q_{P_0}^2\dot{\Xi}_{22}-\delta_m Q_1\beta\dot{H}_{11}+Q_{P_0}^2\dot{H}_{11}\dot{H}_{21} \qquad (4.21)$$

$$0=-2\dot{\Xi}_{12}+(1+j2\delta_m Q_2)\dot{\Xi}_{22}-\delta_m Q_2\beta\dot{H}_{21}+\dot{H}_{11}^2 \qquad (4.22)$$

$$(1+Q_{P_0}^2)\dot{Z}_2=(1-Q_{P_0}^2+j4\delta_m Q_2)\dot{H}_{12}+Q_{P_0}^2\dot{H}_{22}+\delta_m Q_1\beta\dot{\Xi}_{11}-4\delta_m^2 Q_1\dot{\Xi}_{12}$$
$$-j\delta_m^2 Q_1\beta\dot{H}_{11}-j\frac{1}{3}\delta_m^2 Q_1\beta\dot{H}_{11}-\frac{1}{2}\delta_m^2 Q_1\beta^2+Q_{P_0}^2\{\dot{\Xi}_{11}\dot{H}_{21}-\dot{\Xi}_{21}\dot{H}_{11}$$
$$+j\delta_m\dot{\Xi}_{22}-\delta_m\beta(-\dot{H}_{11}+\dot{H}_{21})-j\delta_m(2\dot{\Xi}_{12}+\frac{1}{2}\dot{H}_{11}\dot{H}_{21})\} \qquad (4.23)$$

$$0=-2\dot{H}_{12}+(1+j2\delta_m Q_2)\dot{H}_{22}+\delta_m Q_2\beta\dot{\Xi}_{21}-\delta_m^2 Q_2\dot{\Xi}_{22}-j\frac{1}{2}\delta_m^2 Q_2\beta\dot{H}_{21}$$
$$-j\frac{1}{4}\delta_m^2 Q_2\beta\dot{H}_{21}-\frac{1}{4}\delta_m^2 Q_2\beta^2-\{2\dot{\Xi}_{11}\dot{H}_{11}+j2\delta_m(2\dot{\Xi}_{12}-\dot{H}_{11}^2)\cdots 2\delta_m\beta\dot{H}_{11}\} \qquad (4.24)$$

の各式が得られる。次に第三高調波については，現在関係があるのは歪だけであってAM分には感心がないから附録Ⅲを考慮して $\dot{H}_{13}$，$\dot{H}_{23}$ を求める式だけをかかげる。

$$(1+Q_{P_0}^2)\dot{Z}_3=(1-Q_{P_0}^2+j6\delta_m Q_1)\dot{H}_{13}+Q_{P_0}^2\dot{H}_{23}+\delta_m Q_1\beta\dot{\Xi}_{12}$$
$$+Q_{P_0}^2(-\dot{H}_{11}\dot{\Xi}_{22}+\dot{H}_{21}\dot{\Xi}_{12}) \qquad (4.25)$$

$$0=-2\dot{H}_{13}+(1+j3\delta_m Q_2)\dot{H}_{23}+\delta_m Q_2\beta\dot{\Xi}_{22}-2\dot{H}_{11}\dot{\Xi}_{12} \qquad (4.26)$$

これらの式を導出する時に用いた近似は $Q_1$，$Q_2$ が10の時．$\dot{\Xi}_{11}$

など非対称性によって生じる項は $H_{11}$ など対称性によって生じる項の約 $\frac{1}{10}$ 位と考えられるから、それらの結合を無視したことによる誤差はたかだか数%程度と考えられ、この程度の誤差はたいして問題にならないであろう。それよりもこの近似によって連立四元一次方程式を解くかわりに、それらが分離した形の連立二元方程式を解くだけでよくなった事の方がはるかに良いと考えられる。したがってここでの近似から生ずる誤差が何かの理由で問題になる時には (4.19), (4.20) 式等を完全な形で表わしなおして、そこに、ここで得られた解を代入して、すなわち逐次近似法によって補正を行なえば、誤差のほとんど入っていない解が求められることができる。

(4.17) ~ (4.26) 式によれば、低次の高調波から順次、高次の高調波が求められていくことがわかる。これらを解くことはあまり簡単であるとはいい難いものであるが、準定常状態の場合には、比較的簡単に、求めることができる。準定常状態とは、$\delta_m$ が極めて小さい場合に対応し (4.17) ~ (4.26) 式で $\beta$ の個数以上に $\delta_m$ がついている項をすべて無視しうる時である。その他の場合はこれらの式を解いて解けないことはないのであるがあまりにも結果が煩雑になるので、数値的にいくつかの場合を考察するのが適当であると思う。

上述のごとく準定常状態とみなせる時には、解析的な解を求めることができて、結局、第二高調波歪率 $K_2$, 第三高調波歪率 $K_3$ は

$$K_2=\frac{\delta_m^2\beta}{2(1+3Q_{f_0}^2)(1+Q_{f_0}^2)}\left\{(2-10Q_{f_0}^2)Q_1+(1-14Q_{f_0}^2-3Q_{f_0}^4)Q_2\right\} \tag{4.27}$$

$$K_3=\frac{\delta_m^3\beta^2}{(1+3Q_{f_0}^2)(1+Q_{f_0}^2)^3}\left\{2Q_1^3-(12Q_{f_0}^2+6Q_{f_0}^4)Q_1^2Q_2\right.$$
$$\left.+(-6Q_{f_0}^2+6Q_{f_0}^4+6Q_{f_0}^6)Q_1Q_2^2+(1-4Q_{f_0}^6-3Q_{f_0}^8)Q_2^3\right\} \tag{4.28}$$

ちなみに $Q_{f_0}^2$ を零とおくと、これは励振がほとんど行なわれていない事を意味するのであるがその時 (4.27), (4.28) 式は

$$K_2=\frac{1}{2}\delta_m^2\beta(2Q_1+Q_2) \tag{4.29}$$

$$K_3 = \delta_m^3 \beta^2 (2Q_1^3 + Q_2^3) \qquad (4.30)$$

のようにかけることがわかる。これは $Q_{p_0}^2$ が小さいとして、従来の方法によって得た結果[3]と同じであり、これらの式によると $Q_{p_0}^2$ が小さい間には、一見 $Q_1$ の小さい方が有利にみえるわけである。

$Q_{p_0}^2$ が大きくなってくれはもはや (4.27), (4.28) 式のままではよくわからないので、これをグラフにあらわしてその様子をみてみる。その結果は図4.1によって与えられる。ただしここで横軸としては $Q_{p_0}^2$ のかわりに (2.6) 式で与えられる規格化された電力を用いてある。このグラフは、$Q_1$ と $Q_2$ が等しい時をとってそれを規準とし、それから $Q_1$ を二倍にした場合、$Q_2$ を二倍にした場合が計算されている。その時たて軸の $B_2$, $B_3$ と歪率 $K_2$, $K_3$ との間には

$$K_2 = B_2 \delta_m^2 Q\beta \qquad (4.31)$$

$$K_3 = B_3 \delta_m^3 Q\beta \qquad (4.32)$$

ただし $Q = \min(Q_1, Q_2)$

の関係がある。これによれば $Q_1$ が小さい方が有利であると言うことができないであろう。図4.1.a ではっきりと $Q_1$ か $Q_2$ のどちらかが大きくなるならば $Q_1$ の大きい方が、歪に対し有利であることがわかるし、図4.1.b でも実用的な範囲すなわち横軸が0.3～1のあたりでは、$Q_1$ と $Q_2$ のどちらが大きくても大差がないという結論しか得られない。(4.27) 式では、$Q_{p_0}^2$, $Q_{p_0}^3$ の係数が $Q_1$ のものより $Q_2$ のものの方が大きいから $Q_{p_0}^2$ が大きくなってくれば $Q_2$ の方がよくきいてくることがわかる。

ここでAM-PM変換について考えるために $\dot{E}_2$ を考えると、$\Xi_{12}$, $\Xi_{22}$ はたしかにその影響をうけることがわかるが (4.23), (4.24) 式を見れば $\Xi_{12}$, $\Xi_{22}$ のついている項には、$\delta_m$ がかかっており、準定常的には、$\dot{E}_2$ が $\dot{H}_{12}$, $\dot{H}_{22}$ に入ってくるようなことはないことがわかる。したがってここで考えているような非対称性からは準定常的には、AM-PM変換がおこっていないということができる。

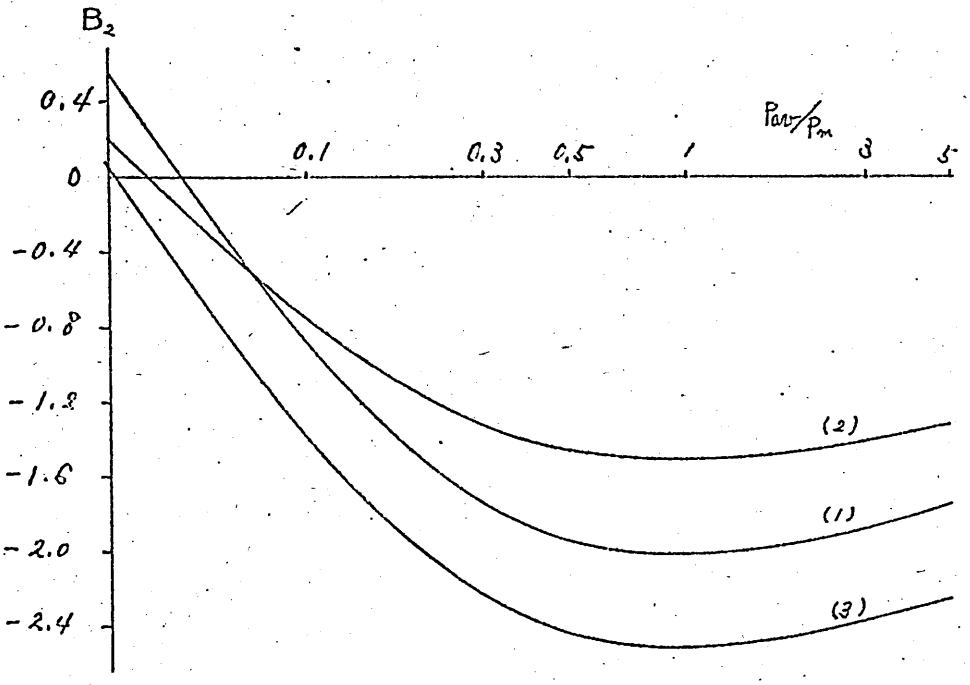



図4.1.a 二次歪係数（準定常状態の場合）

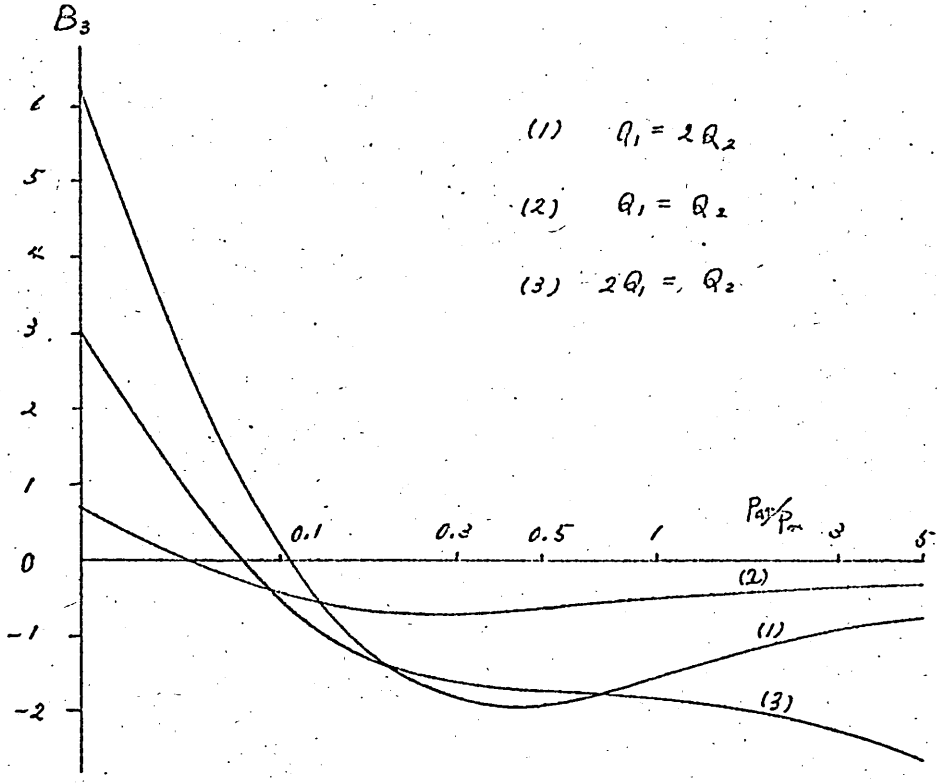
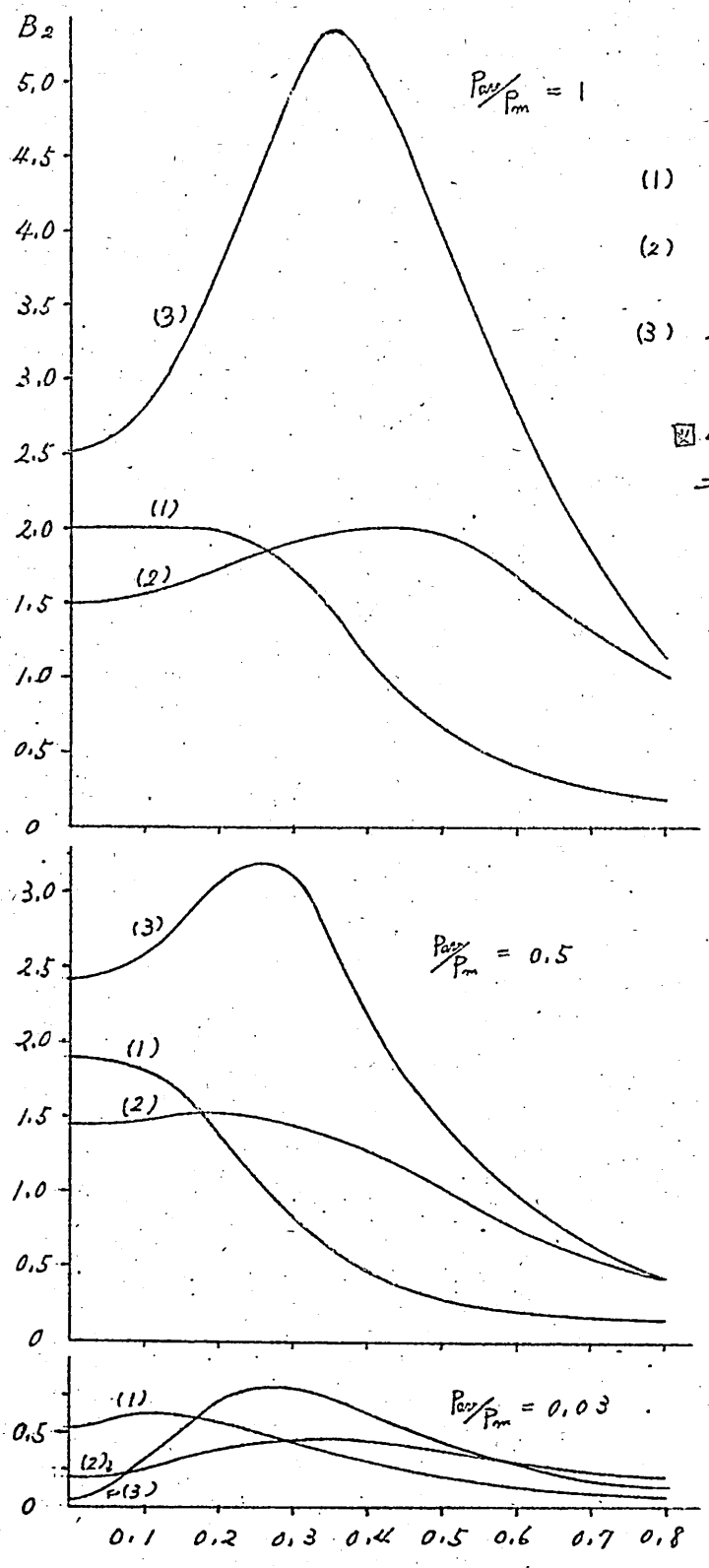



図4.1.b 三次歪係数（準定常状態の場合）




(1) $Q_1 = 2Q_2$

(2) $Q_1 = Q_2$

(3) $2Q_1 = Q_2$

図4.2
二次歪係数

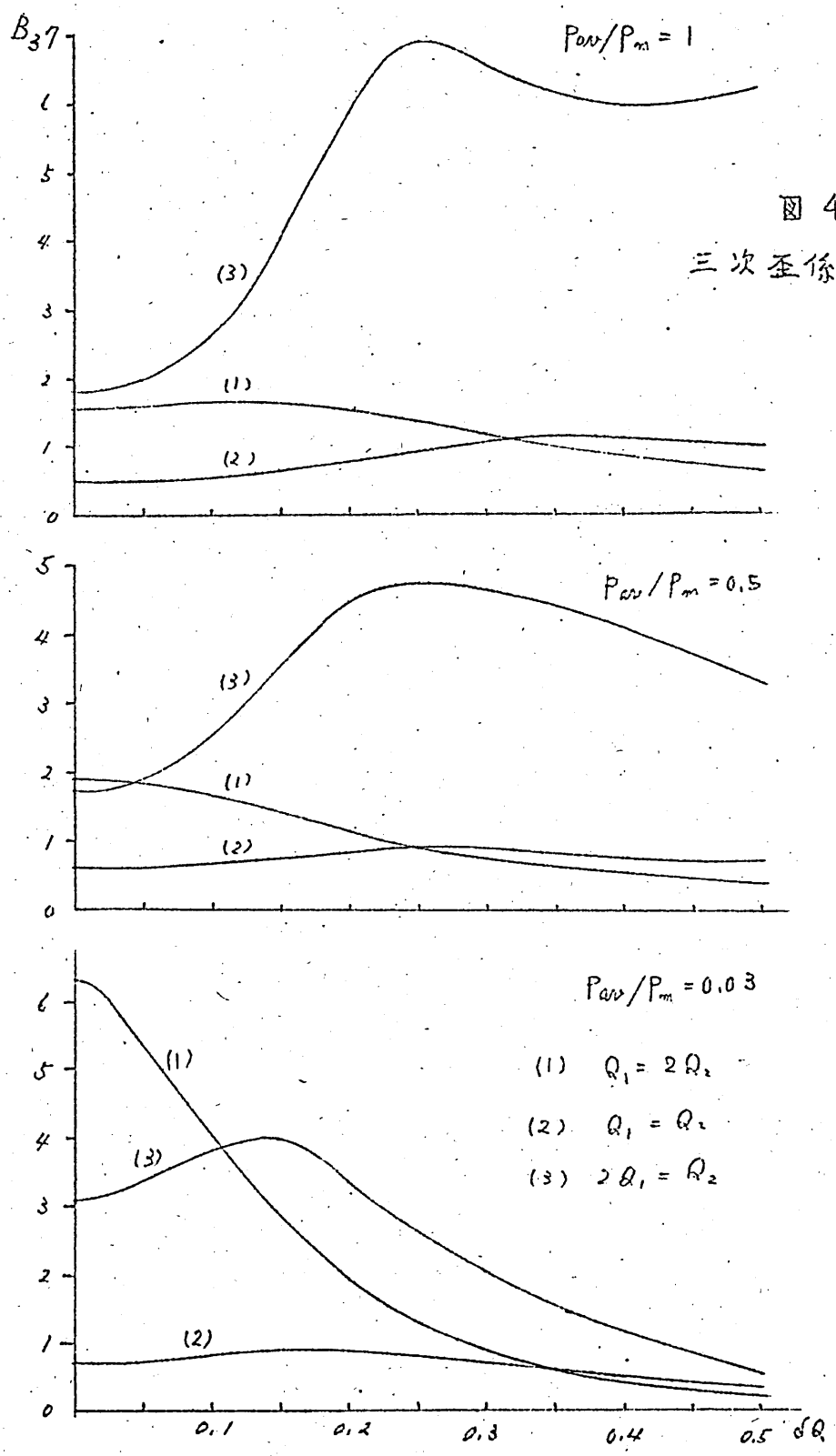

$B_{37}$
$P_{av}/P_m = 1$
(3)
(1)
(2)
$P_{av}/P_m = 0.5$
(3)
(1)
(2)
$P_{av}/P_m = 0.03$
(1) $Q_1 = 2Q_2$
(2) $Q_1 = Q_2$
(3) $2Q_1 = Q_2$
(1)
(3)
(2)
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\delta Q$

图 4.3
三次歪係数

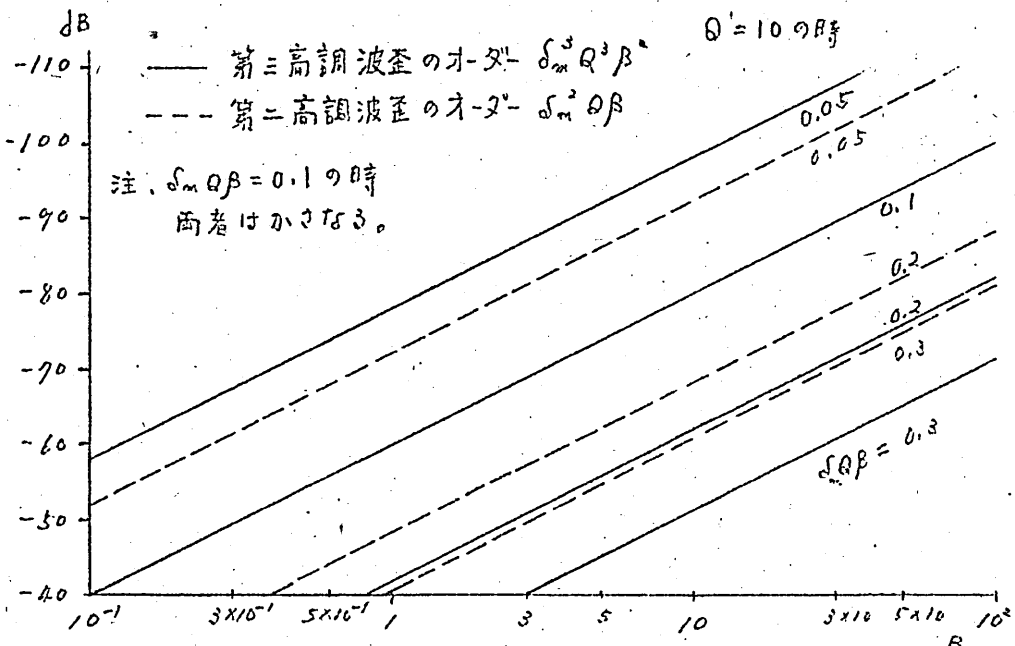



図 4.4. 歪のオーダー

次に準定常状態以外の場合を考えることにする。この場合は先述のごとく数値的に計算した結果をグラフによって考察する。(2.6)式によって与えられる正規化された電力をパラメーターにえらび、横軸としては $\delta_m Q$ をとる。これは変調周波数を横軸にとったことを意味する。第二高調波歪、第三高調波歪についてそれぞれ図4.2, 図4.3に与えられ、たて軸の $B_2$, $B_3$ は (4.31), (4.32)式で歪との関係が示されている。これらを計算するには、先程と同様、$Q_1$ と $Q_2$ が等しい場合を基準にとり、$Q_1$, $Q_2$ をそれぞれ二倍にした場合を求めた。基準の Q は 10 と 20 に選んで計算を行なったが、たて軸、横軸を上記のように適当に正規化すれば、ほとんどグラフがかさなってしまうので、Q を 10 にした場合のもののみをかかげたが実用的な Q の値に関しては、これを用いてさしつかえない。

ところでこれらのグラフによれば、準定常状態の場合には、それほど顕著な差の生じてこなかった $Q_1$ と $Q_2$ の比が大きな問題になってくることがわかるであろう。$Q_1$ の大きな場合には、$\delta_m$ が大きくなるに従って歪率が急激に小さくなっていくことがわかる。$Q_1$ と $Q_2$ が等しい時には

比較的平坦で、真中でもり上った曲線をえがく。逆に$Q_1$が小さく$Q_2$が大きい場合には歪率は一度大きくもり上ってその後減衰をしていく。$Q_1$が大きい場合には$Q_1$と$Q_2$が等しい場合よりも小さい歪を持つことがあり得ることになっている。$\delta_m\beta$の値として0.5位まで使うものとすれば、一般的に$Q_2$の大きいほど右肩上りの特性に移っていくものと考えることができるであろう。したがって伝送線路の他の部分の特性とのかねあいで、なるべく歪が一様になるように、くふうをするなど適当な操作をほどこす時の、簡単な目安としてこの事を利用することができるであろう。

$Q_1$と$Q_2$の比をかえた場合の図2.1と同じ二遅延回路の帯域巾はすでに計算されている。[1] その結果によると$Q_1/Q_2$, $Q_2/Q_1$が2である二つの場合を比較すると、前者の方は$Q_1$と$Q_2$が等しい場合に比べて半分近く帯域巾が小さくなっているのに、後者では大した差がみられないという結果が得られている。すなわち$Q_1$の方が帯域巾にきびしく、きくことがわかるが、これは、上で述べた事と矛盾しているかのように見えるが実はそうではない。すなわちFM歪を生ずる原因はもちろん振巾特性によるものもあるがそのおもなものは位相特性の方である。したがって帯域巾が広くなっても位相特性の非線形性が増したのでは何にもならないことがわかる。というよりもむしろFM伝送路においては振巾特性の帯域巾を問題にすること自体、疑問に思われるもので、この点AM信号の場合と大きく異なる。

これまでに得られた結果を見れば第二高調波歪、第三高調波歪のオーダーがそれぞれ$\delta_m^2\beta$, $\delta_m^3Q^3\beta^3$で定まることがわかるのであるが、前者は後者と比較する時Qの次数が一次低いが、これは前者が伝送特性の非対称性から生じた微少量だからである。同様に第四高調波歪、第五高調波歪のオーダーは$\delta_m^4Q^3\beta^3$, $\delta_m^5Q^5\beta^5$で与えられる。差波のオーダーは二つ上の調波のオーダー以上であるから、誤差の程度は$(\delta_m\beta)^2$であることもわかる。ところで$\delta_m^2\beta$, $\delta_m^3Q^3\beta^3$の値が知れれば都合のよいことは明らかであるからそれを与えるグラフを図4.4に

手える。パラメーターとしては $\delta_m Q\beta$ の値を選んであるが、これは周波数偏移をパラメーターにとったものに等価である。Qの値は標準的に10を選んだがQがかわれば、実線はそのままで破線のみが上下する。Qの値が二倍になれば、6dB上に半分になれば6dB下にかわる。このグラフから第二高調波歪が問題になるのは、歪が小さくなってきた時であることがわかるが、$\delta_m^2 Q\beta$ と $\delta_m^2 Q^3\beta^3$ を比較すると歪を小さくするために、$\delta_m, Q, \beta$ のいずれを小さくしても第二高調波歪の方がそれらの次数が低いため全体の値が小さくなりにくく第三高調波歪より大きくなってしまうのである。

先述のごとく差波から生じる歪のオーダーは $(\delta_m Q\beta)^2$ だけ小さくなっているから図4.4は、このような計算方法の精度を示しているとも、みなしうるであろう。$\delta_m Q\beta$ の値を一定に保てば、すなわち誤差の程度を一定に保つには、$\beta$ が大きい程、歪が小さくなければならないことがわかる。これはここでの計算にかぎったことではなく、$\beta$ が大きくなれば高次歪が減衰しにくくなることに対応する。従って準定常状態を考える時には、さらに高次の高調波、及び差波も考える必要があるであろう。

最後に、ここで得られた準定常状態の結果は、前論文[8]において、従来の方法で求めた結果と完全に一致した事をのべておく。これは、準定常状態の場合には単一の周波数が変化すると考えることが許されるためである。

## (2) 同調がずれている場合

前項では、同調が完全に合っている場合を考えたのであるがここでは同調のずれている場合を問題にする。同調がずれることの意味は、新たに非対称性が生じたことと等価であるから、その振舞を調べるためには前項で考えた非対称性のない方がわかりやすいのでもともとある非対称性を無視して考えることにする。

同調回路のインピーダンスが

$$R(1+j2\Delta Q+j2\delta Q) \quad ; \quad 2\Delta=\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c}$$

$\omega_0$：中心周波数

となることを考えれば、回路の方程式は

$$\dot{V}_g = R_{t1}\left(1+j2\Delta_1 Q_1+\frac{2Q_1}{\omega_c}\frac{d}{dt}\right)\dot{I}_1+\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\dot{I}_1^*\dot{I}_2 \qquad (4.33)$$

$$0 = -\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\dot{I}_1^2+R_{t2}\left(1+j2\Delta_2 Q_2+\frac{Q_2}{\omega_c}\frac{d}{dt}\right)\dot{I}_2 \qquad (4.34)$$

を得る。ここで $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{V}_g$ に (4.6) 式の変換をほどこせば

$$\tilde{V}_g(1+\dot{g}) = R_{t1}\tilde{I}_1\left\{(1+j2\Delta_1 Q_1)(1+\dot{x}_1)+\frac{2Q_1}{\omega_c}\dot{x}_1'+j2\delta_m Q_1\beta \times(1+\dot{x}_1)\cos\omega_m t\right\}+\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\tilde{I}_1^*\tilde{I}_2(1+\dot{x}_1^*)(1+\dot{x}_2) \qquad (4.35)$$

$$0 = -\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\tilde{I}_1^2(1+\dot{x}_1)^2+R_{t2}\tilde{I}_2\left\{(1+j2\Delta_2 Q_2)(1+\dot{x}_2)+\frac{Q_2}{\omega_c}\dot{x}_2'+j2\delta_m Q_2\beta(1+\dot{x}_2)\cos\omega_m t\right\} \qquad (4.36)$$

を得ることができる。これより前項と同様、差波を無視して計算を行なうが、まず直流分に関しては次式のようになる。

$$\tilde{V}_g = R_{t1}\tilde{I}_1(1+j2\Delta_1 Q_1)+\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\tilde{I}_1^*\tilde{I}_2 \qquad (4.37)$$

$$0 = -\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\tilde{I}_1^2+R_{t2}\tilde{I}_2(1+j2\Delta_2 Q_2) \qquad (4.38)$$

(4.37) 式の第二項は (4.38) 式を考えれば

$$\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\tilde{I}_1^*\tilde{I}_2=\left(\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\right)^2\frac{|\tilde{I}_1|^2\cdot\tilde{I}_1}{R_{t2}}\cdot\frac{1}{1+j2\Delta_2 Q_2} \qquad (4.39)$$

となるから、前項に対応して $Q_{p2}^2$ なる量を次のように定義する。

$$\left(\frac{\mathcal{M}_2}{\omega_c^2}\tilde{I}_1^*\cdot\tilde{I}_2\right)/R_{t1}\tilde{I}_1=\frac{\mathcal{M}_2^2}{\omega_c^4}\cdot\frac{|\tilde{I}_1|^2}{R_{t1}R_{t2}}\cdot\frac{1}{1+(2\Delta_2 Q_2)^2}\cdot(1-j2\Delta_2 Q_2)$$

$$= Q_{p2}^2\cdot(1-j2\Delta_2 Q_2) \qquad (4.40)$$

(4.40) 式に注意して (4.37), (4.38) 式を (4.35), (4.36) 式に

代入すれば

$$\left\{1+j2\Delta_1 Q_1+Q_{f2}^2(1-j2\Delta_2 Q_2)\right\}\dot{g}=(1+j2\Delta_1 Q_1)\dot{x}_1+\frac{2Q_1}{\omega_c}\dot{x}_1'$$

$$+j2\delta_m Q_1\beta(1+\dot{x}_1)\cos\omega_m t+Q_{f2}^2(1-j2\Delta_2 Q_2)(\dot{x}_1^*+\dot{x}_2+\dot{x}_1^*\dot{x}_2) \quad (4.41)$$

$$0=-(1+j2\Delta_2 Q_2)(2\dot{x}_1+\dot{x}_1^2)+(1+j2\Delta_2 Q_2)\dot{x}_2$$

$$+\frac{Q_2}{\omega_c}\dot{x}_2'+j2\delta_m Q_2\beta(1+\dot{x}_2)\cos\omega_m t \quad (4.42)$$

のように差に関する基礎方程式が得られる。$\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{g}$ を(4.11)式のようにおいて、(4.41), (4.42)式を実部、虚部にわけておき、それに(4.16)式を代入して調波別にあらわせば、

$$0=(1+Q_{f1}^2+j2\delta_m Q_1)\dot{\Xi}_{11}+Q_{f2}^2\dot{\Xi}_{21}-d_1\dot{H}_{11}+Q_{f2}^2 d_2(-\dot{H}_{11}+\dot{H}_{21}) \quad (4.43)$$

$$0=-2\dot{\Xi}_{11}+(1+j\delta_m Q_2)\dot{\Xi}_{21}-d_2\dot{H}_{21}+d_2 2\dot{H}_{11} \quad (4.44)$$

$$0=(1-Q_{f2}^2+j2\delta_m Q_1)\dot{H}_{11}+Q_{f2}^2\dot{H}_{21}+\delta_m Q_1\beta+d_1\dot{\Xi}_{11}$$

$$-Q_{f2}^2 d_2(\dot{\Xi}_{11}+\dot{\Xi}_{21}) \quad (4.45)$$

$$0=-2\dot{H}_{11}+(1+j\delta_m Q_2)\dot{H}_{21}+\delta_m Q_2\beta-d_2 2\dot{\Xi}_{11}+d_2\dot{\Xi}_{21} \quad (4.46)$$

$$(1+Q_{f2}^2)\dot{E}_2=(1+Q_{f2}^2+j4\delta_m Q_1)\dot{\Xi}_{12}+Q_{f2}^2\dot{\Xi}_{22}-\delta_m Q_1\beta\dot{H}_{11}$$

$$+Q_{f2}^2(\dot{\Xi}_{11}\dot{\Xi}_{21}+\dot{H}_{11}\dot{H}_{21})-d_1\dot{H}_{12}+Q_{f2}^2 d_2(-\dot{H}_{12}+\dot{H}_{22}-\dot{H}_{11}$$

$$\times\dot{\Xi}_{21}+\dot{H}_{21}\cdot\dot{\Xi}_{11}) \quad (4.47)$$

$$0=-2\dot{\Xi}_{12}+(1+j2\delta_m Q_2)\dot{\Xi}_{22}-\delta_m Q_2\beta\dot{H}_{21}-(\dot{\Xi}_{11}^2-\dot{H}_{11}^2)$$

$$-d_2\dot{H}_{22}+d_2(2\dot{H}_{12}+2\dot{\Xi}_{11}\cdot\dot{H}_{11}) \quad (4.48)$$

$$(d_1-Q_{f2}^2 d_2)\dot{E}_2=(1-Q_{f2}^2+j4\delta_m Q_1)\dot{H}_{12}+Q_{f2}^2\dot{H}_{22}+\delta_m Q_1\beta\cdot\dot{\Xi}_{11}$$

$$+Q_{p2}^2\cdot(-\dot{H}_{11}\dot{\Xi}_{21}+\dot{H}_{21}\dot{\Xi}_{11})+d_1\dot{\Xi}_{12}-Q_{p2}^2 d_2(\dot{\Xi}_{12}+\dot{\Xi}_{22}$$
$$+\dot{\Xi}_{11}\dot{\Xi}_{21}+\dot{H}_{11}\cdot\dot{H}_{21}) \qquad (4.49)$$

$$0=-2\dot{H}_{12}+(1+j2\delta_m Q_2)\dot{H}_{22}+\delta_m Q_2\beta\dot{\Xi}_{21}-2\dot{\Xi}_{11}\dot{H}_{11}$$
$$-d_2(2\dot{\Xi}_{12}+\dot{\Xi}_{11}^2-\dot{H}_{11}^2)+d_2\dot{\Xi}_{22} \qquad (4.50)$$

$$0=(1-Q_{p2}^2+j6\delta_m Q_2)\dot{H}_{13}+Q_{p2}^2\dot{H}_{23}+\delta_m Q_1\beta\dot{\Xi}_{12}+Q_{p2}^2(-\dot{H}_{11}\dot{\Xi}_{22}$$
$$-\dot{H}_{12}\dot{\Xi}_{21}+\dot{H}_{21}\dot{\Xi}_{12}+\dot{H}_{22}\dot{\Xi}_{11})+d_1\dot{\Xi}_{13}-Q_{p2}^2 d_2(\dot{\Xi}_{12}+\dot{\Xi}_{21}$$
$$+\dot{\Xi}_{11}\dot{\Xi}_{22}+\dot{\Xi}_{12}\dot{\Xi}_{21}+\dot{H}_{11}\dot{H}_{22}+\dot{H}_{12}\dot{H}_{21}) \qquad (4.51)$$

$$0=-2\dot{H}_{13}+(1+j3\delta_m Q_2)\dot{H}_{23}+\delta_m Q_2\beta\dot{\Xi}_{22}-(2\dot{\Xi}_{11}\dot{H}_{12}+2\dot{\Xi}_{12}\dot{H}_{11})$$
$$-d_2(2\dot{\Xi}_{13}+2\dot{\Xi}_{11}\dot{\Xi}_{12}-2\dot{H}_{11}\dot{H}_{12})+d_2\dot{\Xi}_{23} \qquad (4.52)$$

ただしこれらの式を求める時簡単のため

$$d_1=2\Delta_1 Q_1 \quad 、\quad d_2=2\Delta_2 Q_2$$

とおきさらに、$g$としては第二高調波のAM分だけを考えた。

(4.43)～(4.52)式を順次用いれば、非同調時の歪を求めることができる。これらの式を見れば、各調波別に連立四元一次方程式を解かねばならないことがわかるが、それはめんどうであるから、次のような近似を用いることにする。すなわち一次二次回路の同調がほとんどよく合っていて、$d_1$, $d_2$の値が小さいとするのである。このようにしても大よその目安を得ることはできるであろう。(4.43), (4.44)式を見れば、$\dot{\Xi}_{11}$, $\dot{\Xi}_{21}$は同調のずれを媒介にして$\dot{H}_{11}$, $\dot{H}_{21}$から生じている事がわかるが、これは前者が非対称性により生ずる項であり、(4.43), (4.44)式からわかるように、同調のずれ以外の非対称成分を考えていないため$d_1$, $d_2$をともに零にした場合、零になってしまうということに対応する。上の式からわかるように同調のずれは、対称性による

ものと非対称性によるものを結合させる役目をするから、いわゆるAM-PM変換の原因になることがわかる。ところで上述のごとく $d_1, d_2$ が小さい場合には、$\Xi_{11}, \Xi_{21}$ のオーダーは $H_{11}, H_{21}$ のオーダーに比べて、$d_1$ $d_2$ だけ小さくなることがわかるが、(4.45), (4.46) 式によれば再び $\Xi_{11}, \Xi_{21}$ が $H_{11}, H_{21}$ を生じる原因になっており、この原因による項は結局 $d_1, d_2$ に関して二次のオーダーだけ小さくなるから、無視できることになる。そうなれば (4.43) ～ (4.46) 式は、二組の連立二元方程式なってしまう。以下の式についてもほとんど同様の考えにより、連立二元の方程式を解けばよくなる。このような仮定のもとに (4.43) ～ (4.52) 式を解くのであるが準定常状態と考えられる時には、次のような結果を得ることができる。

$$K_2 = \frac{2\delta_m^2\beta}{(1+Q_{f_2}^2)^3(1+3Q_{f_0}^2)}\Big[d_1\{2Q_1^2-(8Q_{f_2}^2+4Q_{f_2}^4)\cdot Q_1\cdot Q_2 + (-2Q_{f_2}^2+2Q_{f_2}^4+2Q_{f_2}^6)Q_2^2\} + d_2\{-(4Q_{f_2}^2+2Q_{f_2}^4)\times Q_1^2+(-4Q_{f_0}^2+4Q_{f_0}^4+4Q_{f_0}^6)Q_1Q_2+(1-4Q_{f_2}^2-3Q_{f_0}^2)Q_2^2\}\Big] \tag{4.53}$$

これは、第二高調波歪を求めたものであるが、第三高調波歪については、ここで行った近似の範囲では、(4.45) 式で $Q_{f_0}^2$ のかわりに、$Q_{f_2}^2$ をおいたものに等しい。このように $d_1, d_2$ は歪に対して線形な振舞いをする。(4.53) 式において、動作点がきまれば $Q_{f_2}^2$ がほとんどきまり、それに応じて $K_2$ を零とする $d_1$ と $d_2$ の比がきまるが、$d_1$ と $d_2$ は、正の値も負の値も容易にとり得るので $K_2$ を零とすることも可能である。(4.53) 式からわかるように $K_2$ のオーダーは $\delta_m^2 Q^2 \beta d$ で与えられることがわかる。ただし $Q, d$ はそれぞれ $Q_1, Q_2, d_1, d_2$ を代表させたものである。したがって前項の $K_2$ とは、$Q\cdot d$ がかかっている分だけ異っているのであるがこの値は次のような意味を持っている。すなわち $d$ は、同調回路の半値巾に対する同調のずれの割合いを表すもので 10% もくるうことはまずないと考えられるが、その時で $Q$ を掛

準的に10にとると、$Qd$の値は1となり前節の非対称性からでてくるものと同じオーダーをとることになる。

(4.53)式のままではみにくいのでこれをグラフにあらわせば、図4.5、図4.6のようになる。たて軸の$B_2'$と第二高調波歪率の間には

$$K_2 = B_2' \delta_m^2 Q^2 \beta d \quad , \quad Q = \min(Q_1, Q_2) \qquad (4.54)$$

の関係がある。準定常状態の場合には(4.53)式からわかるように$d_1$からでるものと$d_2$からでるものが同相であり、$d_1$と$d_2$が適当な関係をもてば$K_2 = 0$となることがある。その比は当然のことながら$Q\beta_2$の関数となっているが、図4.5からわかるように$Q_1$と$Q_2$が等しい時では実用的と思われる範囲においては$d_1 \simeq -d_2$の関係が成立する時にほぼうまく打消し合う事がわかるであろう。又$Q_1$と$Q_2$の関係については$Q_1$が大きい場合と$Q_2$が大きい場合を比較すれば、図4.6より実用的な範囲では$Q_1$が大きくなった方が有利であるといえるであろう。

以上準定常状態の場合を考察したのであるが、次にそうでない場合を考えることにする。この場合も同調のずれが小さいとして、(4.43)～(4.52)式を解くのであるが、その結果はきわめて複雑になるので、グラフで与えることにする。その結果は図4.7になる。パラメーターの$Q\beta_2$は0.7に選んで$d_1$と$d_2$の両方にわけて計算を行なった。たて軸の$B_2'$はやはり(4.54)式の関係で歪率と結びつけられる。これよりわかるように、$d_1$がずれた場合と$d_2$がずれた場合では、歪率に対する影響がかなり異っており、変調周波数に対応する$\delta_m Q$を横軸にとると前者では右下り、後者では右上りの傾向があることがわかる。$2Q_1 = Q_2$のグラフでは、両者とも一たん盛上っているが$d_1$の方が早く減衰している。すなわちこれは図4.2、4.3からわかるように$Q_2$が大きくなった事によるもので$d_1$の影響は右下りと考えた方が適当であろう。さらにその絶対値についても図4.7からわかるように$d_2$の方が大きい値を示すことがわかる。したがって歪の点からは、一次側よりも二次側の同

調をよりきびしく合わる必要があろう。

ところで $d_1$ と $d_2$ を適当に選べば、準定常状態の場合には、両者からでる歪を打消しあわせる事は先に述べたが、変調周波数が大きくなってくると、もはや成立しなくなることが図4.7からわかるであろう。すなわち準定常状態以外の場合には、$d_1$, $d_2$ からでる歪の位相がそろわないことからもわかるが、絶対値そのものが大きく変っている。従って広帯域の変調周波数に対して常に歪を打ち消そうとしても無理である。

次に $Q_1$ と $Q_2$ の関係についてであるが、この場合にも、$Q_2$ を大きくすると歪が大きくなってしまい都合の悪いことになることがわかるがこれは、前項で得られている結果と同じである。したがってこれまでに得られている総ての結果を考えてみると、一次回路と二次回路の結合がある程度実用的な範囲になれば、一次より二次の同調回路の方が歪によくきくことがわかる。

最後にAM-PM変換について考えておく。従来、非線形回路については、その複雑さのせいか、準定常的な考察しかなされておらず、AM-PM変換という扱い方がなされているのみであった。しかし、実際にはそのような扱いがどれぐらい正しいものであるかという検討がなされたことはない。ここでは (4.47)~(4.50)式に従って、$\dot{E}_2$ すなわち、信号中のAM分の振舞いを厳密に求めてみる。まず最初に準定常状態の場合には、$\dot{E}_2$ の $K_2$ に対する影響は

$$K_2 \simeq \frac{8 Q_{f_2}^2}{(1+Q_{f_2}^2)(1+3Q_{f_2}^2)} (d_1 + d_2) \dot{E}_2 \qquad (4.55)$$

である。線形回路の場合には考えられなかった準定常状態におけるAM-PM変換がこのように存在するのである。この点に通信器の非線形性が表われている。$Q_{f_2}^2$ が零にきわめて近くなると、(4.55)式からわかるように、$K_2$ は零になっていく。このことは結合が極めて小さい状態では、二次回路の影響が一次回路に入らないため、一次回路

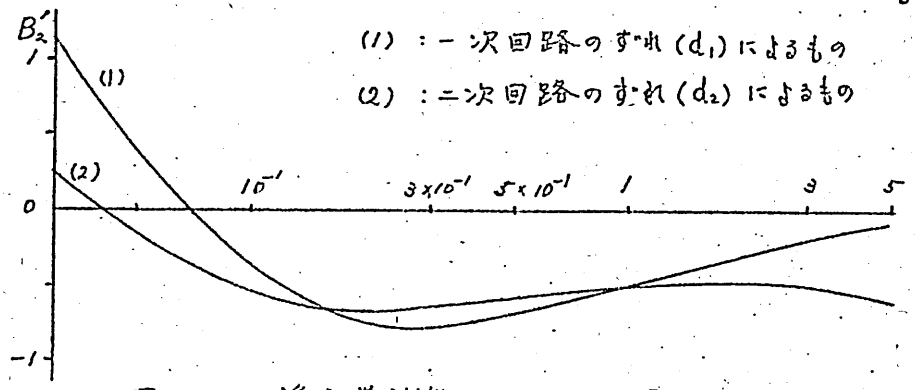



図 4.5　準定常状態 ($Q_1 = Q_2$ の場合)

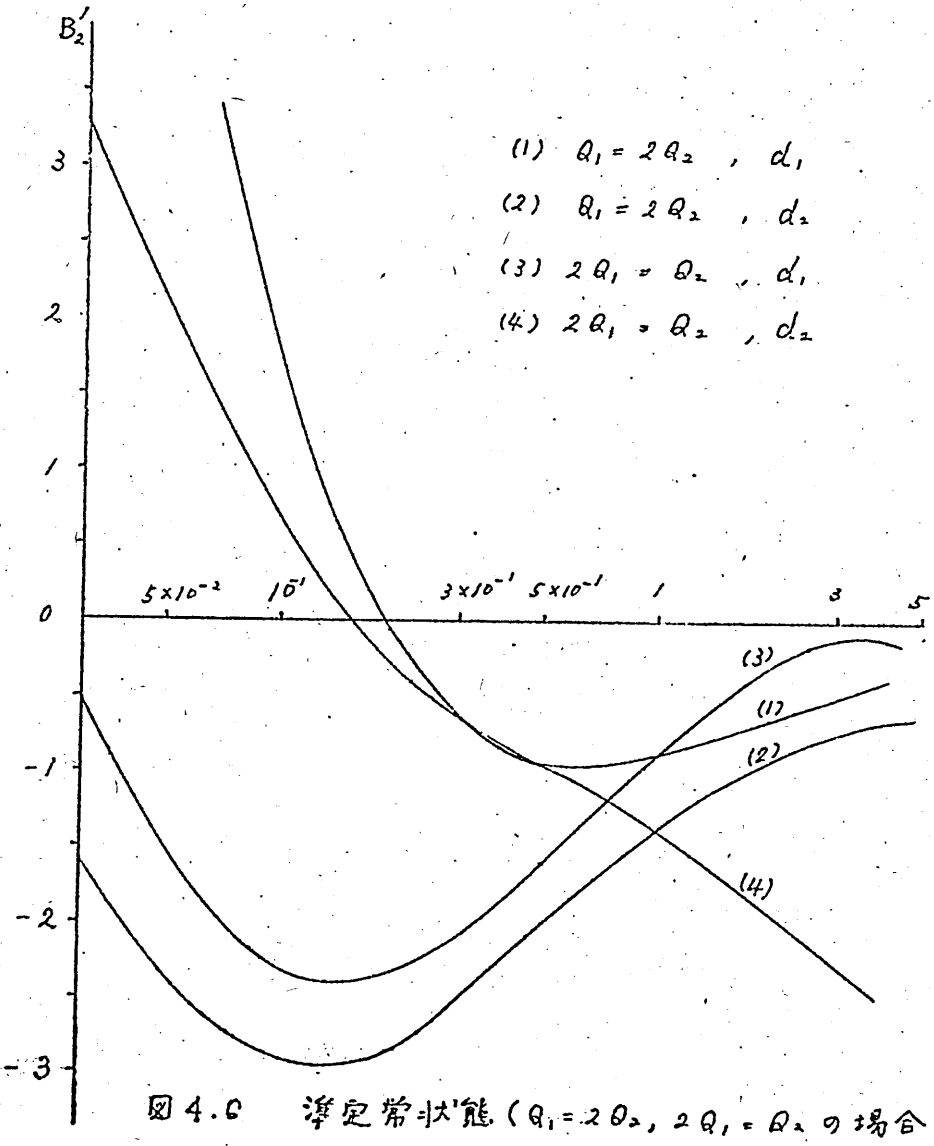



図 4.6　準定常状態 ($Q_1 = 2Q_2$, $2Q_1 = Q_2$ の場合)

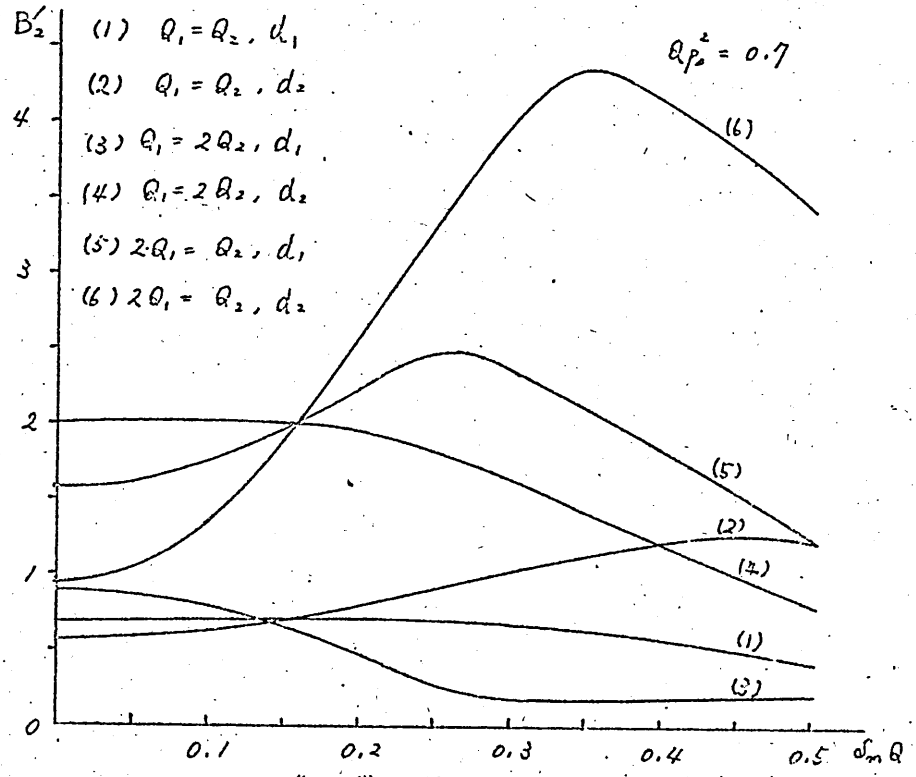



図 4.7　準定常状態以外の二次歪係数

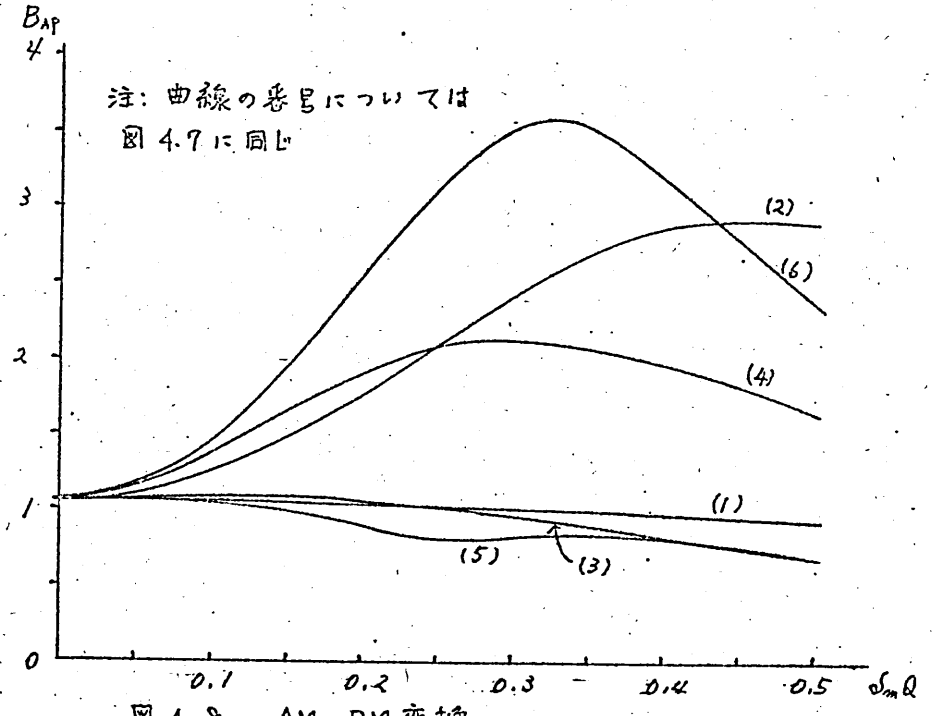



図 4.8　AM-PM 変換

は線形回路として働き、AM-PM変換がおこらず、二次回路でも一次回路から二乗特性を通じて生じたものが二次の同調回路で歪められるだけであるから、線形回路であり、準定常的なAM-PM変換が起らない、いいかえれば、非線形回路と線形回路が分離された事により準定常的なAM-PM変換がおこらないことを意味するのである。

(4.47)～(4.50)式を準定常状態以外の場合に解いた結果は、図4.8によって与えられる。それによれば一次回路のずれによるものでは、変調周波数が変化しても、あまり変化しないようであるが、二次回路の場合には、相当大きな値まで上ることがわかる。したがって、この回路を従来のAM-PM変換という方法で扱ったとしても、相当大きな誤差を残すことは明らかである。ここにおいてもQ₁とQ₂には先程までと同様Q₁が大きい方が有利であるという結論が得られることもグラフより明らかな事と思われる。なお図4.8のたて軸の$B_{AP}$と第二高調波歪率の関係は、次式によって与えられる。

$$K_2 = B_{AP}\, d\cdot \dot{E}_2 / \beta \qquad (4.56)$$

## (3) 理想的階段接合ダイオード以外の場合について

これまでは、バラクタが、理想的な階段接合をしているものとしてダイオードの両端の電圧と電荷の関係を表す(4.1)式において、$S_3$以上の項を零とした計算を行なってきた。しかしながら実際のものでは、必ずしも、そのように理想的なものではなく、$S_3$以上の項も残ってくるであろう。そこでここでは、そのうちの一つである$S_3$が入った場合を考察してその振舞いを調べてみる事にする。なお、さらに高次の項は、かなり小さくなるものとして考えないことにする。

(2.1)式によれば、この場合の線形回路は次のような伝達関数を持つ。

$$R_{t1} + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{S_1}{j\omega} + \left(\left|\frac{I_1}{j\omega}\right|^2 + 2\left|\frac{I_2}{j2\omega}\right|^2\right)\frac{3S_3}{j\omega} \qquad (4.57)$$

これは一次側のものについて書いたものであるが、二次側のものについても全く同様に求め得る。このようにしてみれば $S_2$ の項がどのような作用をするかは明らかで (4.57) 式の最後の項のカッコの中が実数で入力電力に関する項でしかも全体は虚数であるからこれは電力に応じて同調の周波数がずれる事を意味する。ここでカッコの中の $\omega$ を $\omega_c$ とおきかえる。これは (4.3) 式における第二項以下の微分演算子を無視した事を意味する。それらの中には非対称性を示すものも入っていて無視できないかも知れないが、現在のように $S_2$ の振舞いを調べる目的のためには、全く必要ないものであることが以下の考察からもわかるであろう。$|\dot{I}_1|^2$, $|\dot{I}_2|^2$ が与えられるとすると同調のとれる条件は

$$\omega_c L_1 - \frac{1}{\omega_c C_1} - \frac{S_1}{\omega_c} - \frac{3S_3}{\omega_c^3}\left(|\dot{I}_1|^2 + \frac{1}{2}|\dot{I}_2|^2\right) = 0 \qquad (4.58)$$

で与えられ、最後の項がついているだけ同調の位置がずれているわけである。(4.58) 式を (4.57) 式に代入し $\omega = \omega_c(1+\delta)$ とおけば

$$R_{L1} + j\left\{\omega_c L + \frac{1}{\omega_c}\left(S_1 + \frac{1}{C_1}\right)\right\}\delta$$
$$+ j\frac{3S_3}{\omega_c^3}\left\{(2\xi_1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)|\dot{I}_1|^2 + \frac{1}{2}(2\xi_2 + \xi_2^2 + \eta_2^2)|\dot{I}_2|^2\right\}\delta \qquad (4.59)$$

を得る。このうち $j\delta$ は $\frac{1}{\omega_c}\frac{d}{dt}$ なる微分演算子をもっておきかえる事ができるから、これを用いて (4.4), (4.5) 式を書き改めて、再び計算を行なえばよいのであるが、ここでは定量的にではなく、振舞いだけを調べる事にしてそれらの式を改めて書くことは行なわない。

P.15 に述べた事実に注目すると (4.59) 式の第一項ないし第二項は、これまでの計算にもあらわれていたもので、ここから生ずる歪については改めて考察するまでもないであろう。(4.4), (4.5) 式を計算した時にも行なったが、それらの基本式は複素数の方程式で、実数部と虚数部にわけて連立方程式を解かねばならなかったのであるが、P.15 のことは、単に $\xi_1$, $\xi_2$, $\eta_1$, $\eta_2$ についてのみ言える事ではなく、実数部と虚数部にわけた方程式に

あらわれる各項についてもいえなければならない。もしそうでない項が一つでもあればξ1, ξ2, η1, η2についてもその様な事が言えなくなってしまう。そしてさらにそのことは、(4.4)、(4.5)式に当る式を書けば実数部、虚数部にそのままこの事実があてはまることを意味する。

次に第三項について考察を行なう。jsの微分演算を後ろのI1に作用させた場合得られるI1'については、これは第二項にあらわれてくるもので、上の事実が満足されていることは明らかである。ところで第三項に含まれる時間関数はすべて実数で上の事実を満足している。従って第三項全体について考えてみても実数部では偶数次高調波、虚数部では奇数次高調波が、残りのものに比べて大きい値をとることがわかる。従って第三項においてもこれまでの類則を破るような、結合のし方はしない事がわかる。

直感的に考えてみても、(4.58)式における最終項による同調のずれは大きいものでないと考えられるが、もしそうである場合には、(4.57)式における第二項と第三項を比較する時、第三項に特別の振舞いがないことがわかった以上、第三項は第二項に比して、無視する事を許されるであろう。AM-PM変換という言葉を用いた本文のすべての場合から明らかなように、実数部と虚数部を結合させるさせ方が、それぞれの大きいものをおたがいに相手側にはねこませる時、問題がおこるのである。

又S3については、電力の関数として同調周波数が変るため、AM-PM変換がおこると考えられるかも知れない[4]が、実際には、同調のずれ方が時間の関数となり、AM分は、それと結合して奇数番目だけ周波数のちがう調波におちてしまうから普通に言うAM-PM変換の原因とはなり得ないものである。

## 5. むすび

電流励振形通信器をモデルとして周波数変調波の通信の際生ずるFM歪について詳しく検討した。全体的な結果として生ずる歪のオーダーは、先に求めた準定常状態のそれで与えられる事、歪は通信器の振巾の周波数特性より位相のそれに強く依存すること、換言すれば、通信器をスタガー同調等によって双峰特性にしたりするより、一次、二次の同調を完全にとって単峰で位相特性を素直にする方がよい事が判った。さらに一次側の同調回路より二次側のものの方が歪にはよくきくことも明らかになったであろう。

従来非線形回路のFM歪としては、AM-PM変換なる概念を用いて調べられているにすぎず、これは準定常的と考えられる系に対してのみ適用されるものであることが明らかになったと思う。準定常的でない場合は線形回路でもAM-PM変換がおこる。(附録V参照)従って非線形回路が入った場合のFM歪についてはもっと一般的な方法が考えられなくてはならないであろう。

## 参考文献


(1) 岩井、宮川、八塚"新しい全固体マイクロ波中継装置の一提案とその実験"、信学論 Vol 51-B No.8 P.381~389 (昭43-10)

(2) E.H.Armstrong : IRE (Feb, 1936)

(3) 池上、中島、岩田"周波数特性を考慮した通信器の解析" 輻射科学研究会, 昭和43-7-26

(4) 渡辺"半導体ダイオードを用いた周波数通信回路のAM-PM変換係数の推定" 通研実用化報告 第16巻第7号 P.51~67 (昭42-7)

(5) 菅原 : FM無線工学 .日刊工業新聞社

# 附録 I　側帯波が知れている時の歪

周波数 $\omega_c+\nu\omega_m$ なる側帯波の振巾を $\dot{S}_\nu$ とすると それから合成される信号は

$$\dot{S}(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\dot{S}_\nu e^{j(\omega_c+\nu\omega_m)t}$$

$$=\sqrt{(Re\sum\dot{S}_\nu e^{j\nu\omega_m t})^2+(Im\sum\dot{S}_\nu e^{j\nu\omega_m t})^2}\cdot e^{j\omega_c t}$$

$$\times exp\left[j\tan^{-1}\frac{Im\sum\dot{S}_\nu e^{j\nu\omega_m t}}{Re\sum\dot{S}_\nu e^{j\nu\omega_m t}}\right], \qquad (I,1)$$

と表わされる。根号内は振巾を表し、指数関数内は位相を表す。この位相 $\varphi$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{Im\sum\dot{S}_\nu e^{j\nu\omega_m t}}{Re\sum\dot{S}_\nu e^{j\nu\omega_m t}}=\tan^{-1}(-j)\frac{\sum(\dot{S}_\nu-\dot{S}_\nu^*)e^{j\nu\omega_m t}}{\sum(\dot{S}_\nu+\dot{S}_\nu^*)e^{j\nu\omega_m t}} \qquad (I,2)$$

の中に変調信号とその歪成分が含まれている。従って一つの方法としては、これからフーリエ係数

$$\dot{\Phi}_h=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega_m t)e^{-jh\omega_m t}d\omega_m t。 \qquad (I,3)$$

を求め

$$\dot{K}_h=\frac{jh\omega_m\dot{\Phi}_h}{j\omega_m\dot{\Phi}_1}=\frac{h\dot{\Phi}_h}{\dot{\Phi}_1} \qquad (I,4)$$

として、h 調波歪を一般に求める事ができる。ここに $\dot{K}_h$ は複素数として、基本波に対する位相も同時に表現している。一般に用いられている歪率の定義は上式の絶対値をとることによって得られる。側帯波が多く複雑な形をして居れば（I,3）式のフーリエ変換を一般的に求める事はできないが最も簡単な場合、即ち二つの側帯波のみがある場合

$$\dot{S}_{-1}=J_{-1}(\beta)\ ,\quad \dot{S}_0=J_0(\beta)\ ,\quad \dot{S}_1=J_1(\beta) \qquad (I,5)$$

の歪を求めてみる。

$$\sum\dot{S}_\nu e^{j\nu\omega_m t}=J_0(\beta)+j2J_1(\beta)\sin\omega_m t \qquad (I,6)$$

であるから

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{2J_1(\beta)\sin\omega_m t}{J_0(\beta)}=2\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{a^{2\mu-1}\sin(2\mu-1)\omega_m t}{2\mu-1} \qquad (I,7)$$

ここに $$\frac{2J_1(\beta)}{J_0(\beta)} = \frac{2a}{1-a^2} \qquad (I.8)$$

(I.3)式より $$\Phi_h = -j\frac{a^{2\mu-1}}{2\mu-1}$$

$$\therefore K_h = \frac{h(-j)a^h/h}{-ja} = a^{h-1} = \left[\sqrt{1+\left\{\frac{J_0(\beta)}{2J_1(\beta)}\right\}^2} - \frac{J_0(\beta)}{2J_1(\beta)}\right]^{h-1} \qquad (I.9)$$

$$\approx \left[J_1(\beta)\right]^{h-1} \approx \left(\frac{\beta}{2}\right)^{h-1} : \beta\text{が小さいとき}\quad h:\text{odd} \qquad (I.10)$$

を得る。

側帯波が多くて(I.3)式が一般的に求められないときは、次のようにすれば(無限次の)連立方程式の解に帰着される。(I.2)を微分すれば、瞬時角周波数

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_m \frac{\sum(\nu-\mu)\dot{S}_\nu \dot{S}_\mu^* e^{j(\nu+\mu)\omega_m t}}{\sum 2\dot{S}_\nu \dot{S}_{-\mu}^* e^{j(\nu+\mu)\omega_m t}} \qquad (I.11)$$

が得られる。ここに総和記号は、$\nu$および$\mu$に関して$-\infty$より$+\infty$まで加え合せることを意味する。今これを

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \dot{\Omega}_\lambda e^{j\lambda\omega_m t} \qquad : \dot{\Omega}_{-\lambda} = \dot{\Omega}_\lambda^* \qquad (I.12)$$

に等しいとおくと

$$2\sum_\lambda \dot{\Omega}_\lambda e^{j\lambda\omega_m t} \sum_{\nu,\mu} \dot{S}_\nu \dot{S}_{-\mu}^* e^{j(\nu+\mu)\omega_m t} = \omega_m \sum_{\nu,\mu}(\nu-\mu)\dot{S}_\nu \dot{S}_{-\mu}^* e^{j(\nu+\mu)\omega_m t}$$

を得る。同じ時間変化の項を両辺比較すれば、$\dot{\Omega}_\lambda$に関する連立方程式

$$\sum_\lambda \dot{\Omega}_\lambda \sum_\nu \dot{S}_\nu \dot{S}_{\nu+\lambda-\mu}^* = \frac{\omega_m}{2}\sum_\nu (2\nu-\mu)\dot{S}_\nu \dot{S}_{\nu-\mu}^* \qquad (I.13)$$

を得る。これから$\dot{\Omega}_h$および$\dot{\Omega}_1$を解き

$$K_h = \frac{\dot{\Omega}_h}{\dot{\Omega}_1} \qquad (I.14)$$

によって歪率が求められる。

## 附録Ⅱ．伝送特性と線形作用素の関係について．

回路の中の線形な部分の伝達関数がわかれば、その部分は、次のように線形作用素におき換えて計算を行ないうる。即ち入力信号が、

$$\dot{S}_i(t)\, e^{j\omega_c t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}_n\, e^{j(\omega_c + n\omega_m)t} \qquad (\text{Ⅱ}.1)$$

のようにあらわされる時、伝達関数 $\dot{U}$ なる回路を通った出力は、

$$\dot{S}_0(t)\, e^{j\omega_c t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}_n\, \dot{U}(n\delta_m)\, e^{j(\omega_c + n\omega_m)t} \qquad (\text{Ⅱ},2)$$

のように求められる。もし $\dot{U}$ が次のように巾級数展開できるとすると

$$\dot{U}(\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\gamma}_k \delta^k \qquad : \dot{\gamma}_k \text{は展開係数}, \quad \delta = \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c} \qquad (\text{Ⅱ},3)$$

出力信号はこれを用いて

$$\dot{S}_0(t) e^{j\omega_c t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \dot{S}_n \dot{\gamma}_k (n\delta_m)^k e^{j(\omega_c + n\omega_m)t}$$

$$= e^{j\omega_c t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}_n \dot{\gamma}_k \frac{1}{(j\omega_c)^k} \frac{d^k}{dt^k} e^{jn\omega_m t}$$

$$= e^{j\omega_c t} \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\gamma}_k \frac{1}{(j\omega_c)^k} \frac{d^k}{dt^k} \dot{S}_i(t) \qquad (\text{Ⅱ},4)$$

$$\therefore \quad \dot{S}_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\gamma}_k \frac{1}{(j\omega_c)^k} \frac{d^k}{dt^k} \dot{S}_i(t) \qquad (\text{Ⅱ},5)$$

ここに表われてくる線形作用素は、(Ⅱ.5)式において、$\delta$ のかわりに、$\frac{1}{j\omega_c}\frac{d}{dt}$ なる微分演算をおいたものに等しいから結局、次のように言う事ができる。

- 伝送特性が巾級数に展開できる時には、$\delta$ の代りに $\frac{1}{j\omega_c}\frac{d}{dt}$ を置いた線形作用素を、入力信号から搬送波に相当する $e^{j\omega_c t}$ を取り去ったものに作用させれば、出力信号から $e^{j\omega_c t}$ をとりさったものが得られる。

この事は別にめずらしい事ではなく、$\dot{S}_i(t) = e^{j\int \gamma_\mu dt}$ とおけば

カーリンの方法[5]としてよく知られているものになる。

## 附録Ⅲ. $(1+\dot{\chi})e^{j\beta\sin\omega_m t}$ から歪を求める方法について

ここで行なう事は、次式で与えられるような $\theta_d$ と $a$ を求める事である。

$$(1+\dot{\chi})e^{j\beta\sin\omega_m t}=(1+a)e^{j(\beta\sin\omega_m t+\theta_d)} \qquad (Ⅲ.1)$$

$a$ と $\theta_d$ は共に時間関数であり、$a$ は振巾の脈動分、$\theta_d$ は歪を示す。(Ⅲ.1)式の両辺の対数をとり、実部、虚部を比較して

$$\log(1+a)=\mathrm{Re}\{\log(1+\dot{\chi})\} \qquad (Ⅲ.2)$$

$$\theta_d=\mathrm{Imag}\{\log(1+\dot{\chi})\} \qquad (Ⅲ.3)$$

を得る。ここで $\dot{\chi}$ を実部、虚部にわけて

$$\dot{\chi}=\xi+j\eta \qquad (Ⅲ.4)$$

とおき、(Ⅲ.2)、(Ⅲ.3)式になおし、それぞれの展開公式を利用すれば、

$$a\fallingdotseq\xi+\frac{1}{2}\eta^2-\frac{1}{2}\xi\eta \qquad (Ⅲ.5)$$

$$\theta_d\fallingdotseq\eta-\xi\eta+\xi^2\eta-\frac{1}{3}\eta^3 \qquad (Ⅲ.6)$$

を得る。和波のオーダーで計算するという近似を用いる場合には、附録Ⅳにより複素表示が許されるから、

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{A}_n e^{jn\omega_m t},\quad \theta_d=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{\Theta}_n e^{jn\omega_m t}$$
$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{\Xi}_n e^{jn\omega_m t},\quad \eta=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{H}_n e^{jn\omega_m t} \qquad (Ⅲ.7)$$

のようにおいて、(Ⅲ.5)、(Ⅲ.6)式に代入各調波別に等置すれば、

$$\dot{A}_1=\dot{\Xi}_1,\quad \dot{\Theta}_1=\dot{H}_1$$
$$\dot{A}_2=\dot{\Xi}_2+\frac{1}{2}\dot{H}_1^2,\quad \dot{\Theta}_2=\dot{H}_2-\dot{H}_1\dot{\Xi}_1 \qquad (Ⅲ.8)$$
$$\dot{A}_3=\dot{\Xi}_3+\dot{H}_1\dot{H}_2-\frac{1}{2}\dot{H}_1^2\dot{\Xi}_1,\quad \dot{\Theta}_3=\dot{H}_3-\dot{H}_2\dot{\Xi}_1-\dot{H}_1\dot{\Xi}_2+\dot{H}_1\dot{\Xi}_1^2-\frac{1}{3}\dot{H}_1^3$$

の各式を得る。これを用いれば実際の値は第n高調波に関しては

$$2\,Re\left(\dot{\Theta}_n e^{jn\omega_m t}\right) \qquad (\text{III}.9)$$

のように求め得る。

附録IV、和波のみに着目すると複素表示ができる理由.

線形な回路では問題がないが、二乗、三乗等非線形の項が入ってくれば、一般には複素表示は許されない。しかし計算をするに当って差波の項が小さくなって無視し得るような場合には、複素表示が許される。それは例えば、二乗の場合なら

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dot{X}_n e^{jn\omega t}+\dot{X}_n^* e^{-jn\omega t}\right\}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\dot{Y}_m e^{jm\omega t}+\dot{Y}_m^* e^{-jm\omega t}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{和波のみ}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\dot{X}_n\cdot\dot{Y}_m e^{j(n+m)\omega t}+\dot{X}_n^*\dot{Y}_m^* e^{-j(n+m)\omega t}\right\}$$

のようになるが、カッコ内の第二項は、第一項の共役複素数となっているから、第一項に関する式が満足されれば、自動的に第二項の方も満足されるのである。ところが第一項は、共役複素数をつけない普通の、複素表示から計算できる。従って非線形の項が入っていても、和波のみについては複素表示が許される。

## 附録V、線形回路におけるAM-PM変換

従来の概念では、AM-PM変換は非線形素子があってはじめて起るものと考えられている。[5] しかし準定常的でない場合は、線形回路でもAM-PM変換がおこる。ここでは、それについて簡単な考察をしてみよう。簡単のため、FMの変調指数が小さいときを考えると、AM波FM波はそれぞれ

AM: $$e^{j\omega_c t}(1+\beta\sin\omega_m t) \qquad (\text{V}.1)$$

FM: $$e^{j(\omega_c t+\beta\sin\omega_m t)} \fallingdotseq e^{j\omega_c t}(1+j\beta\sin\omega_m t) \qquad (\text{V}.2)$$

のように表す事ができる。(V.1)式のAM波が

$$\dot{G}(\omega) = |\dot{G}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \qquad (V.3)$$

なる線形伝送路を通った時の出力波は、(V.1)を側帯波にめけて

$$\dot{S}_o = \frac{A}{2}\dot{G}(\omega_c-\omega_m)e^{j(\omega_c-\omega_m)t} + \dot{G}(\omega_c)e^{j\omega_c t} + \frac{A}{2}\dot{G}(\omega_c+\omega_m)e^{j(\omega_c+\omega_m)t} \qquad (V.4)$$

今、振巾特性$|\dot{G}(\omega)|$及び位相特性$\varphi(\omega)$を$\omega_c$のまわりに、偶関数(even)と奇関数(odd)の和として表すと、

$$\dot{G}(\omega_c-\omega_m) = |\dot{G}(\omega_c-\omega_m)| e^{j\varphi(\omega_c-\omega_m)} = (G_e - G_o)e^{j(\varphi_e-\varphi_o)}$$
$$\dot{G}(\omega_c) = 1 \qquad : 基準化 \qquad (V.5)$$
$$\dot{G}(\omega_c+\omega_m) = |\dot{G}(\omega_c+\omega_m)| e^{j\varphi(\omega_c+\omega_m)} = (G_e+G_o)e^{j(\varphi_e+\varphi_o)}$$

のようにかけるので、(V.4)式に代入して整理すると

$$\dot{S}_o e^{j\omega_c t} = 1 + Re\{G_e\cos\varphi_e\cos(\omega_m t+\varphi_o) - G_o\sin\varphi_e\sin(\omega_m t+\varphi_o)\}$$
$$+ jRe\{G_e\sin\varphi_e\cos(\omega_m t+\varphi_o) + G_o\cos\varphi_e\sin(\omega_m t+\varphi_o)\} \qquad (V.6)$$

(V.1)；(V.2)式を参照すると、第二項がAM分第三項がFM分を表していることがわかる。従ってAM-PM変換係数は

$$\phi_1 = \sqrt{G_e^2\sin^2\varphi_e + G_o^2\cos^2\varphi_e} \qquad (V.7)$$

で与えられる。即ち振巾特性が対称、$G_o=0$，位相特性が反対称、$\varphi_e=0$のときは、$\phi_1=0$となり、この時に限りAM-PM変換は起らない。なお、位相の反対称分は変調信号の位相をずらせるように寄与する。

頒布研資料

# ガン発振器のＬＳＡ動作について

張年錫　松尾幸人

(大阪大学産研)

(於松下電器中研)

1968年11月29日

# ガン発振器のＬＳＡ動作について

張年錫　松尾幸人
（大阪大学産研）

## 1. 序言

ガン発振器はその動作姿態上から分類するとかなり多くの型に分れている．最初 Gunn[1] によって見出された，いわゆるガンモード（transit-time dipole mode）は親しみ易く理解が容易である．このモードによる発振は能率があまり大きくないという点がある．それはこのモード動作では試料中に高電界尻が発生して走行するが，この尻の全体の部分が負の抵抗領域（負の移動度領域）にないために起因する．そこで Copeland[2] はこの高電界尻を形成させない状態で系を動作さすような方法を考案した．すなわち1周期の間試料の中で空間電荷を適当に抑制させた状態の下で発振をさすモードで彼はＬＳＡモード（Limited Space charge Accumulation）と命名した．その後理論，実験の両面にわたってこのモード動作が検討され，かなり能率が高く，ガンモードよりも周波数上限が高いこと

がわかった．このＬＳＡモードによる実験結果としては10から100GHzの周波数でパルス出力４００KWのものが得られ[3]，Ｘバンドで２～３Ｗの ＣＷ出力を出している．このモードではガンモードのように試料の厚さに対する制限が厳しくなく，それが直接発振周波数に関係しないという利点がある．たとえば330と760μmのもので7.7GHzの周波数で350Wを得ている[4]．とくに能率に関しては Copland[5] や Bott, Hilsum[6] らによって詳しく計算されているが，Bott らはv-E特性に対する Butcher, Fawcett[7] らの結果を参考にして移動度μのいろいろな値について計算している．この値を9000cm²/v.sにしたとき能率が23%になることを示した．

こゝでは系をＬＳＡ動作させるための必要条件である1周期中の平均移動度が正でなければならないという，$\int_0^T \frac{dv}{dE} dt > 0$，ことに対して具体的にv-E特性を与え，いろいろなバイアスの下で計算した結果を述べるとともに，空間電荷の成長に関する制限について若干の考察を行う．

## 2. 解析

ＬＳＡ動作は電界に対して正負の移

濃度を含む試料で，もしつぎの不等式③を常に満足するならば，1周期にわたって正味の空間電荷の成長が連続的に大きくならないということからこの動作が可能であると云える．

$$\int_0^T \frac{\partial v}{\partial E}\,dt > 0 \qquad (1)$$

この条件は通常の状態からLSAモード動作へ移行するための完全な保證にはならない．それは担体$n_0$のじょう乱による系の不安定性や負性領域における過渡的なものに起因する不都合さのおこりうる可能性があるためであろう．だから少なくとも必要条件になりうる．(1)の計算は$\mu$の正負の場合について共に積分計算が容易に行なえるようにするためBoltzの用いたv-E特性と関数形が同じで，$\mu$が7000 cm²/V.s，定数が若干異なる場合である．電界や時間で各領域を表示すると(2)のようになる．

$$v(E) = \mu E, \quad 0 < E \leqq E_{th}, \quad 0 < t \leqq \tau \qquad (2a)$$

$$v(E) = a + \frac{b}{E} + cE, \quad E \geqq E_{th}, \quad \tau \leqq t \leqq T \qquad (2b)$$

こゝで

$$a = 2.41 \times 10^5 \ (\mathrm{cm/s})$$
$$b = 6.43 \times 10^{10} \ (\mathrm{V/s}) \qquad (3)$$

$$C = 1.50 \times 10^{2}\ cm^2/V \cdot s$$

なお $E_{th}$ は threshold 電界である．図1にこの計算に用いた(2)のv-E特性およびLSA動作時の高周波の様子を示す．

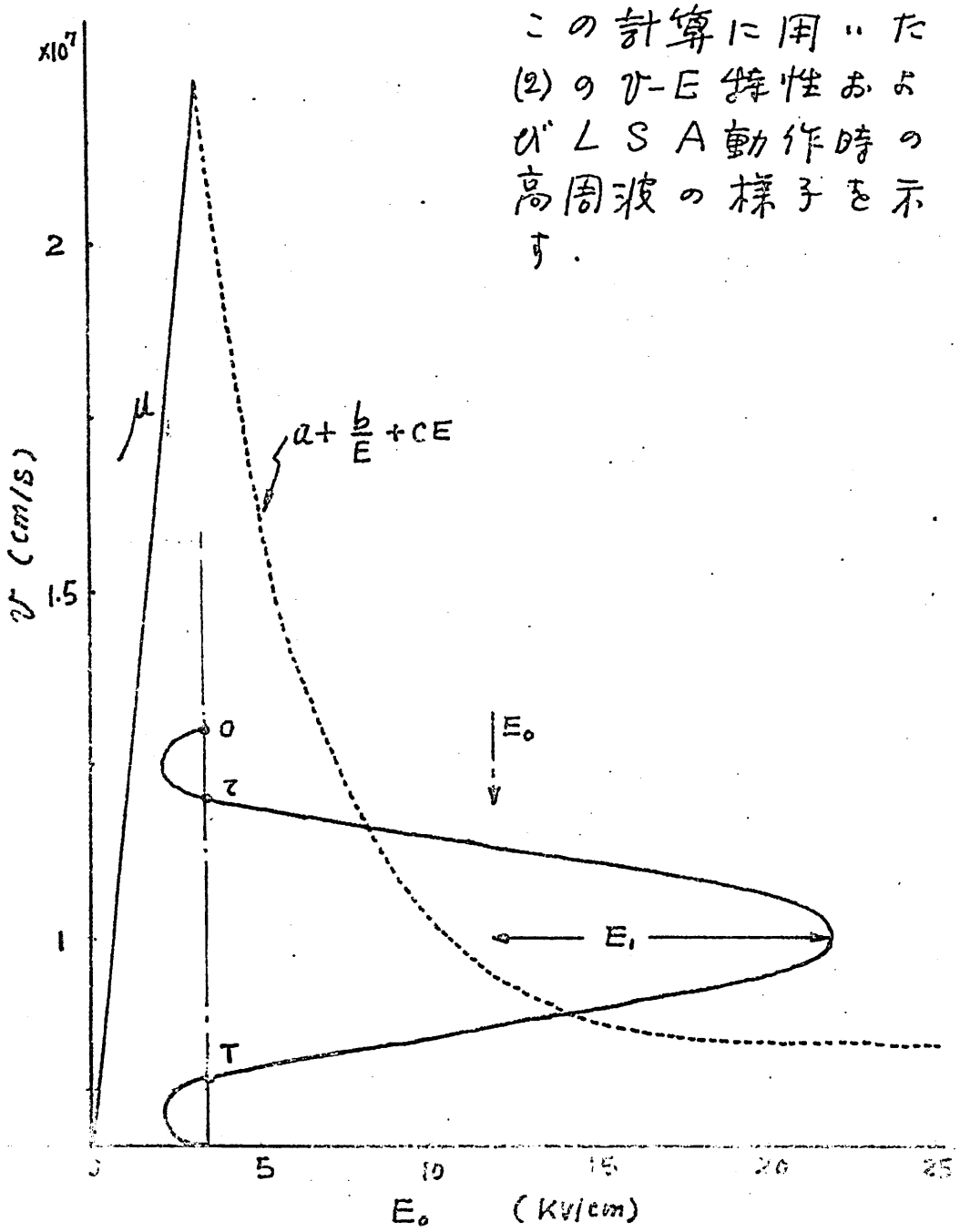



図 1.

試料に直流バイアス $E_0$ を加え高周波の電界 $E_1$ が重畳しているときの電界を(4)で与える．

$$E = E_0 + E_1 \sin \omega t \qquad (4)$$

図1では移動度の正，T－では負の領域に対応する時間を示す．(1)の積分は2つの領域にわけて計算する．各領域に対する移動度は

$$\frac{dv}{dE} = \mu, \quad 0 < E \leqq E_{th}, \quad 0 < t \leqq \tau \qquad (5)$$

$$\frac{dv}{dE} = c - \frac{b}{E^2}, \quad E \geqq E_{th}, \quad \tau \leqq t \leqq T \qquad (6)$$

正の領域に対する積分は(5)から

$$I_1 = \int_0^{\tau} \frac{dv}{dE} dt = \mu \tau \qquad (7)$$

一方負の領域に対しては次のようになる．

$$I_2 = \int_{\tau}^{T} \left(c - \frac{b}{E^2}\right) dt = c(T-\tau) - b \int_{\tau}^{T} \frac{dt}{(E_0 + E_1 \sin \omega t)^2}$$

$$= c(T-\tau) - \frac{b}{\omega} \left[ \frac{E_1 \cos \omega T}{(E_0^2 - E_1^2)(E_0 + E_1 \sin \omega T)} + \frac{2E_0}{(E_0^2 - E_1^2)^{3/2}} \tan^{-1} \left\{ \frac{(E_0 \tan \frac{\omega T}{2}) + E_1}{\sqrt{E_0^2 - E_1^2}} \right\} \right.$$

$$\left. - \frac{E_1 \cos \omega \tau}{(E_0^2 - E_1^2)(E_0 + E_1 \sin \omega \tau)} - \frac{2E_0}{(E_0^2 - E_1^2)^{3/2}} \tan^{-1} \left\{ \frac{(E_0 \tan \frac{\omega \tau}{2}) + E_1}{\sqrt{E_0^2 - E_1^2}} \right\} \right] \qquad (8)$$

上式はかなり複雑であるので見通しが悪い．そこで $\omega\tau \ll 1$ という仮定によって簡単化す

ることにしよう．

$$I_2 \doteqdot c(T-\tau) - \frac{b}{\omega}\left[\frac{E_1}{(E_0^2-E_1^2)}\left(\frac{1}{E_0}-\frac{1}{E_0+E_1\omega\tau}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2E_0}{(E_0^2-E_1^2)^{3/2}}\left\{\tan^{-1}\frac{E_1}{\sqrt{E_0^2-E_1^2}}-\tan^{-1}\frac{(E_0\omega\tau/2)+E_1}{\sqrt{E_0^2-E_1^2}}\right\}\right] \quad (9)$$

さらに周期Tに対するτの比をτ'とし，(7)と(9)から(10)をうる．

$$\mu\tau' + c(1-\tau') - \frac{b}{2\pi}\left[\frac{E_1}{(E_0^2-E_1^2)}\left(\frac{1}{E_0}-\frac{1}{E_0+E_1 2\pi\tau'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2E_0}{(E_0^2-E_1^2)^{3/2}}\left\{\tan^{-1}\frac{E_1}{\sqrt{E_0^2-E_1^2}}-\tan^{-1}\frac{E_0\pi\tau'+E_1}{\sqrt{E_0^2-E_1^2}}\right\}\right] > 0 \quad (10)$$

(10)でτ'が$E_0$, $E_1$によってどのように変化するかが問題である．解析的には求まりそうもないので計算機によって計算した結果を図2,3に示す．図2は$E_0$をパラメータにしたとき$E_1$に対するτ'の変化で$E_1$が$E_0-E_{th}$よりかなり大きくてもτ'はほとんど変化していないが，とくに$E_0$が4KV/cmのように$E_{th}$に近いときは$E_1$の増大とともにτ'は極端に大きくなる．図3は$E_0$に対するτ'の変化である．$E_0$が$E_{th}$付近ではτ'はかなり大きくなっているが12～16KV/cmでは変化がすくなく，この値も小さくなっている．τ'が小さいことはT-τの時間が1周期の間でτに比べて長いということから能率がよ

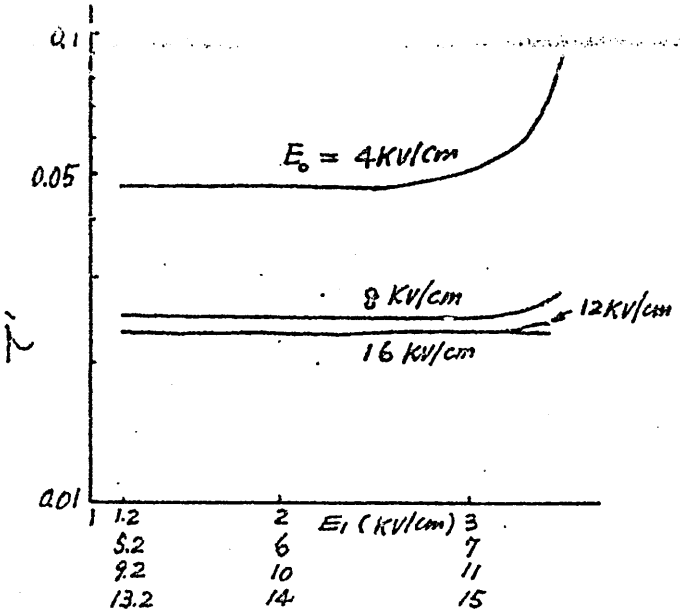



図 2

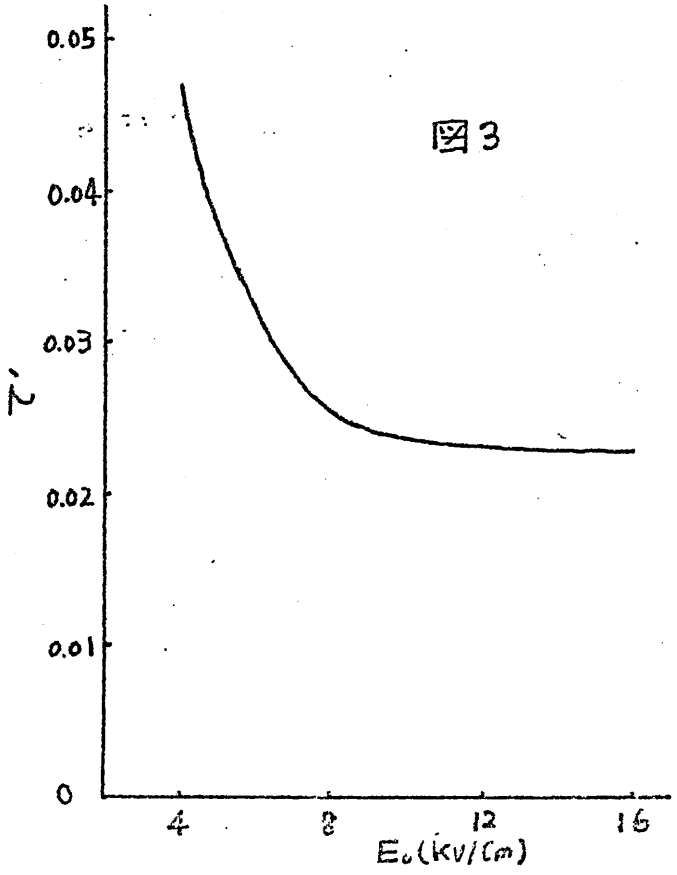



図3

くなることを示す．すなわち各周期にわたって負性領域に留まる時間が長いことを意味する．先に述べた計算[5,6]が示しているように能率の最大付近を示す$E_0$はいろいろな$n_0$に対してほゞ12〜20KV/cmの間にあることを考えると，われわれの計算結果はそれらのことを示しているといってよい．従来実験的には$E_0$は$E_{th}$の2倍以上とされているが以上の結果からすれ

は(1)の条件から期待されるLSA動作はE₀が2E_thより低くても動作する筈である．しかし能率が悪くなるためにそのようなE₀での実験報告がないのであろう．これらの考察ではLSA動作が試料の移動度のみに関係したものから結論されたことであって，E₀の最適な値に関する情報しか与えてないと云える．以上では周波数やn₀についての制限は現われてない．が周波数の上限はV-E特性の時間的な問題を仕走している two valley における電子の遷移現象の時間関係によって制限される．

つぎにLSAモード動作においてn₀や周波数の関係を調べるために，制御された空間電荷の増大係数に対する許容度を若干検討する．拡散電流を無視した試料中の電流について，nの空間的な変化が小さいとして，一次元の場合の電流連続に関する方程式[5]は

$$\frac{\partial ne}{\partial t} = -e\mu n \frac{\partial E}{\partial x} \qquad (11)$$

ポアソンの方程式は

$$\frac{\partial E}{\partial x} = (n-n_0)/\varepsilon = \sigma/\varepsilon \qquad (12)$$

こでσは空間電荷密度である．(12)を(11)

に代入して，σに関する微分方程式を⑩うる．

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -(\sigma^2 + n_0 e \sigma)\frac{\mu}{\varepsilon} \qquad (13)$$

(13)は容易に解けて

$$\sigma = \frac{\sigma_0 n_0 e \cdot \exp(-\mu n_0 e/\varepsilon)t}{n_0 e + \sigma_0(1-\exp(-\mu n_0 e/\varepsilon)t} \qquad (14)$$

$\sigma_0$は$t=0$のときのσである．簡単のために(14)の分母の第2項を$n_0 e$に対して小さいとして近似すると，

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-\mu n_0 e/\varepsilon)t \qquad (15)$$

(15)はμが正か負によってσが増大するか減衰することを示す式である．$\sigma(t)/\sigma(0) = G$とすると

$$G = \exp\frac{-n_0 e}{\varepsilon}\left[\int_0^T \frac{dv}{dE}dt\right] = \exp\frac{h}{h_G} \qquad (16)$$

こゝで，$h = n_0 lf$，$h_G = \left[\frac{-e}{\varepsilon T}\int_0^T \frac{dv}{dE}dt\right]^{-1}$とおいている．

(16)の$h_G$は積分の中の$dv/dE$の符号によって正負になる．負の場合は問題ないが，正のときはσは増大し系を高電界放電へと移行させることになる．増大の場合を$h_n$とすれば(17)のように書ける．

$$\exp\frac{h}{h_n} = \exp\frac{n_0 e}{\varepsilon}\left[\frac{1}{T}\int_t^T\left(\frac{dv}{dE}-c\right)dt\right] < \exp\alpha \qquad (17)$$

この，$h/h_n < \alpha$，$\alpha$がいくらになったときに高電界尻が生成されるのかが明白でない限り$n_0/f$に対する制限も厳密にはきまらない．Copelandは$dv/dE > 0$に対する$h_p = -e/\varepsilon_T [\int_0^T (dv/dE)dt]$と$h_n$からかなり任意性を含めた形で(18)を与えている．

$$2\times10^4 < \frac{n_0}{f} < 2\times10^5 \ s/cm^2 \qquad (18)$$

大見[8]らが指摘しているように(17)の関係から周波数の下限が決定されてよい筈である．しかしこの場合もαの厳密な値は次の式のようにv-E特性や$n_0/f$，εなどによってきまる複雑なものである．

$$\frac{n_0}{f}\frac{e}{\varepsilon}\left[\frac{b}{2\pi}\left\{\frac{E_1}{(E_0^2-E_1^2)}\left(\frac{1}{E_0}-\frac{1}{E_0+E_1 2\pi\tau'}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2E_0}{(E_0^2-E_1^2)^{3/2}}\left(\tan^{-1}\frac{E_1}{\sqrt{E_0^2-E_1^2}}-\tan^{-1}\frac{\pi E_0\tau'+E_1}{\sqrt{E_0^2-E_1^2}}\right)\right\}-c(1-\tau')\right]<\alpha \qquad (19)$$

(19)から$n_0$が与えられv-E特性が既知の場合は実験的にfがきまるから$n_0/f$の下限を求めることが出来る．しかしすでに述べた如く高電界尻の生成と空間電荷の成長に対する明確な関係がない限りαはきまらない．

## 3 結言

以上で述べて来たことはLSA動作

における必要条件[1]から得られるもの[11]として，V-E特性が与えられたとき，能率の観点から直流バイアス条件が得られ，その適値はほゞ12～20kV/cmの間にあり，これは他の理論結果ともあう．このことは従来LSA動作においてバイアス条件が明確でなかった点が明らかになったと考えられる．また空間電荷の生成，増大の関係から得られる結論は明確でなく，しいて云えば$n_0/f$の下限を与えるものとみてよい．さらに試料は全く均一なものとして考察しているが，$n_0$が空間的に変動している場合，$n_0L$条件を満足しないときは上のような問題だけでなく不安定性増大に関する他の面からの検討が必要であるように思われる．この点に関連して最近Thim[9]はさらに進めて試料がランダムな一次元のdopingじょう乱をもつ場合や局所的にinhomogeneityが存在するようなときは高電界層の発生をおさえることが困難であることを計算機による研究で示した．

## 文献

1) J. B. Gunn, IBM J., Vol. 8, 2, pp. 141/159, 1964.

2) J.A. Copeland, proc. IEEE. 54, 10, PP.1479, 1966

3) W.K. Kennedy and L.F. Eastman, proc. IEEE. NS. 3, PP.434/435, 1967.

4) W.K. Kennedy et al. ED-14, 9, PP.500/504, 1967.

5) J.A. Copeland, JAP. 38, 8, PP.3096/3101, 1967.

6) I.B. Bott and C. Hilsum, ED-14, PP.492/496, 1967.

7) P.N. Butcher and W. Fawcett, phys. Letts. 21, PP.489/490, 1966.

8) 大見他, 電子装置研究会資料 1968, 6, 27.

9) W.H. Thim, JAP. 39, 8, PP.3897/3804, 1968.

# 複合共振器単一モードレーザの結合変調

松尾幸人、小林哲郎、波々伯部圭佑
田治米徹、張吉夫

（大阪大学産業科学研究所）

昭和43年11月29日

（松下電器産業株式会社　中央研究所）

輻射科学研究会

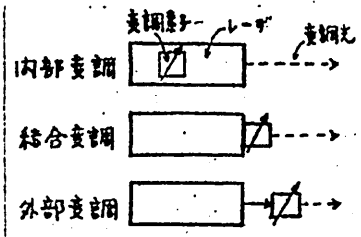
# 複合共振器単一モードレーザの結合変調

松尾幸人
小林哲郎
波々伯部圭佑
田治米徹
張吉夫
(大阪大学産業科学研究所)

## I はしがき

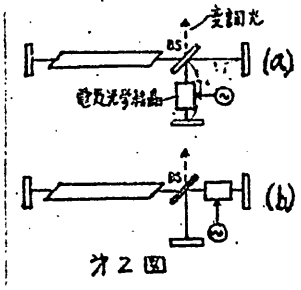
レーザ光の変調を考えるとき、その変調を行なう場所によって、これを分類すると第1図に示すように、通常の外部変調(レーザ光をレーザ発振器から一旦取り出して、外部で変調を行なうもの)、内部変調(レーザ発振器の内部で変調を行なうもの)、および、それらの中間的な方法である結合変調(レーザ発振器の結合部の結合度を変調するもの)とに分けることができる。これらのうち、ここで取り上げる結合変調は他のものに比して変調能率がよく、しかも広帯域な変調を行なえる点に特長があり、有効な変調法方として多くの研究者によって取り上げられている。[1),2),3)] 結合変調による変調能率の向上は、特にHe-Neレーザなどのごとく利得の小さいレーザで著しい。なぜならば、利得が小さいために外部への結合部の結合度は必然的に小さくなければならず、したがって、その小さな結合度を僅かに変動しても、外部への出力は大きく

変化するからである。云いかえれば、He-Neレーザなどの低利得レーザにおいては共振器内部パワーが外部パワーに比して桁ちがい(通常100倍程度)大きいために変調部(この場合、結合部であるが)を通して得られるパワーが大きくとれるからであるとも云える。



第1図

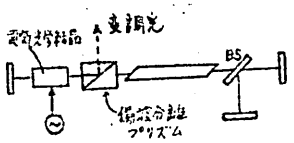
結合変調の変調帯域は、変調素子としての結合素子の帯域にもよるが、通常、多モード発振レーザの縦モード間隔よりは充分広くとれる。従って、その広帯域性を充分に利用するためには、発振レーザ出力が単一モードでなければならない。この点に関して、我々は以前に単一周波数レーザについての結合変調の方法を提案した。[4] その方法のあらましは第2図に示すごとく単一周波数化のために必要な複合共振器の複合鏡が、そのまま結合変調素子として用いられるものである。



第2図

この構成は、結合変調の変調素子として、従来用いられてきた電気光学結晶と、それによる偏波成分の変動を分離する偏波分離プリズムとの組合わせによるものとは異なり、変調素子が光共振器系を含むため、変調感度がさらに改善される点に特長があるが、帯域がその分だけ制限される点はやむを得ない。その後、このような単一周波数レーザの結合変調については Nachらが実験を行なっている。[5] Nachらの方法は第3図に示す如く、単一周波数化のための複合共振器

レーザに、結合変調素子として、従来の電気光学結晶—偏波分離プリズムの組合せを用いたものである。この方式は変調素子に光共振系を含まないため非常に広帯域にできる事が報告されている。



第3図

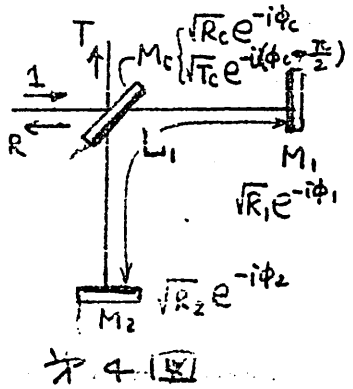
我々は、第2図(a)の方法について、比較的低い周波数ではあるが、実験を行ない、理論的予想とかなりよい一致を示す良好な結果を得たので、以下に報告する。

## II 理論的考察

### 1. 折れ曲がり形共振器

以下、第2図(a)の構成について考える。第2図(a)の右端にある3枚のミラーよりなる複合鏡は、共振器を形成しており、我々はこれを折れ曲がり共振器と呼んでいる。[4] この折れ曲がり共振器は、単一周波数を得るためのもの[2]であるが、いま、それが同時に、結合変調部を構成しているのである。

いま、各ミラーの振幅反射係数($\sqrt{R}e^{i\phi}$)、振幅透過係数($\sqrt{T}e^{-i\phi}$)を、第4図に示すようにとる。簡単な計算の結果、折れ曲がり共振器全体が呈する、合成パワー反射係数、$R$、および合成パワー透過係数$T$は、次式で与えられることがわかる。



第4図

$$R = R_{max}\left[1 + F\sin^2\theta\right]^{-1} \quad (1)$$

$$T = \left[T_{amini} + F(1-\Gamma)\sin^2\theta\right]\left[1 + F\sin^2\theta\right]^{-1} \quad (2)$$

ここで.

$$R_{max} = R_1 T_c^2 \left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\, R_c\right)^{-2} \quad (3)$$

$$F = 4R_c\sqrt{R_1 R_2}\left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\, R_c\right)^{-2} \quad (4)$$

$$T_{min} = R_c\left[1 - \sqrt{R_1 R_2}(1-\Gamma)\right]\left[1 - \sqrt{R_1 R_2}\, R_c\right]^{-2} \quad (5)$$

$$\Gamma = 1 - R_c - T_c \quad (6)$$

$$\theta = \omega L_1 / c + \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \phi_c \quad (7)$$

であり, $\omega$ は入射光の角周波数, $c$ は光速である。

2. 折れ曲がり共振器による(結合)変調.

折れ曲がり共振器1内に電気光学素子を挿入し, つぎのような位相変化を与えるものとする。

$$\delta\theta = \Delta\theta\cos(\nu t + \varphi) \quad (8)$$

ただし, $\nu$ は変調角周波数で, $\Delta\theta$ は振幅である。
(電気光学素子は, いま $M_c M_2$ 間に挿入することを考えているが, この素子の光に対する損失は, 便宜上 $R_2$ に含めればよい。) 折れ曲がり共振器の共振角周波数と変調角周波数 $\nu$ とのずれを $\delta\nu$ とおくと,

$$\delta\nu = \nu - n\frac{c\pi}{L_1} \quad (n: 整数) \quad (9)$$

もし,

$$|\delta\nu| < \left(\frac{c}{L_1}\right)\frac{1}{\sqrt{F}} \quad (10)$$

であるから

$$\Delta\theta \lesssim \left(\frac{\omega}{v}\right)\frac{1}{\sqrt{F}} \qquad (11)$$

なら，(7)のθは，(8)のδθだけ変動を受けていても．(1)，(2)は成り立ち，それらに応じて，反射係数，透過係数が変動を受けることになる。[4]

(8)の変調をかけたとき，(7)のθはつぎのようにかける。

$$\left.\begin{aligned} &\theta = m\pi + \theta_0 + \delta\theta \quad (m: \text{整数}) \\ &\text{ただし．} \quad |\theta_0| \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

したがって，(1)，(2)のθのかわりに，$(\theta_0+\delta\theta)$を考えればよい。

以上に考えた折れ曲がり共振器を第2図(a)のごとく，レーザの一方 ~~[illegible]~~ の端におき，レーザの外部への結合度を変調する．結合変調を考える。He-Neレーザのごとき，低利得レーザでは，発振領域では，$F\sin^2\theta \ll 1$であり，また通常 $F \gtrsim 1$であるので，

$$\left.\begin{aligned} &F\sin^2\theta = F\sin^2(\theta_0+\delta\theta) \simeq F(\theta_0+\delta\theta)^2 \ll 1 \\ &\text{ゆえに．} \quad |\theta_0| \ll 1, \quad \Delta\theta \ll 1 . \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

したがって，(1)，(2)は充分の近似で次式で表わされる。

$$R \cong R_{max}\left[\left\{1 - F\left(\theta_0^2 + \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)\right\} - 2F\theta_0\Delta\theta\cos(\nu t+\varphi) - \frac{1}{2}F\Delta\theta^2\cos 2(\nu t+\varphi)\right] \qquad (14)$$

$$T \cong \left\{T_{min} + F(1-\Gamma)\left(\theta_0^2 + \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)\right\} + 2F(1-\Gamma)\theta_0\cdot\Delta\theta\cos(\nu t+\varphi) + \frac{1}{2}F\Delta\theta^2(1-\Gamma)\cos 2(\nu t+\varphi) \qquad (15)$$

## 3 変調出力

変調の周期 $2\pi/\nu$ がレーザの共振器内での立ち上り時間に比して充分短かいときは，共振器内部のパワー $P_i$ は，変調によって変動を受けることはない。しかし，$P_i$ の値は，結合変調部の反射係数 $R$ の時間平均値 $R_{av}$ に影響される。$R_{av}$ は(14)より，

$$R_{av} = R_{max}\left[1 - F\left(\theta_0^2 + \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)\right] \qquad (16)$$

一方 $P_i$ が次式で表わされることはよく知られている。

(i) ドップラーリミットの媒質に対して

$$P_i = K\left[\left(\frac{G}{A+1-R_{av}}\right)^2 - 1\right] \qquad (17)$$

(ii) homogeneous broadening の媒質に対して

$$P_i = K\left[\frac{G}{A+1-R_{av}} - 1\right] \qquad (17')$$

ここで，$K$ は定数，$A$ は折れ曲がり共振器部以外でのレーザの1往復損失，$G$ は1往復の小信号レーザ利得である。

結合変調部からの出力パワー $P_o$ は，$P_i T$ であるが，これを変調周波成分と，2次高調波成分と直流成分とにわければ，

$$P_o = P_i T = P_{oav} + P_{ov}\cos(\nu t+\varphi) + P_{o2v}\cos 2(\nu t+\varphi) \qquad (18)$$

と表わすことができる。(15)式より，

出力パワー直流成分：$P_{oav} = P_i\left[T_{amin} + F(1-\Gamma)\left(\theta_0^2 + \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)\right]$ (19)

出力パワー変調波成分：

$$P_{0v} = P_i \cdot 2F(1-\Gamma)\theta_0\Delta\theta \qquad (20)$$

出力パワー2次高調波成分：

$$P_{02v} = P_i \cdot \frac{1}{2}F(1-\Gamma)\Delta\theta^2 \qquad (21)$$

いま、(20)で与えられる$P_{0v}$が問題である。(20)で注意すべきは、$P_i$が(17)および(16)により、$\theta_0$および$\Delta\theta$の関数であるから、$P_{0v}$を最大にする$\theta_0$と$\Delta\theta$との組み合わせは複雑となることである。

第3図に示したNashらの方法によれば、$P_{0v}$は$P_i \cdot 2\theta_0\Delta\theta$となるから[5]、本方法の方が、同一の$\theta_0 \cdot \Delta\theta$に対して（したがって、$\theta_0$一定とすれば、同一の変調電圧に対して）$F(1-\Gamma)$倍の変調出力が得られることとなる。

## 4. 変調出力の歪率

変調出力の歪率（KF）は、(20)、(21)式より

$$KF = \frac{P_{02v}}{|P_{0v}|} \times 100 = \frac{\Delta\theta}{4|\theta_0|} \times 100 \quad (\%) \qquad (22)$$

と表わされる。結合変調が有効である、低利得レーザでは、$(\Delta\theta/|\theta_0|) = \frac{1}{2}$程度の値が用いられるので、その際には、KF = 12.5%となる。

## 5 変調度

変調度$M_v$を$|P_{0v}|/P_{av}$と定義すれば、

$$M_y = \frac{|P_{oy}|}{P_{av}} = \frac{2(|\theta_{01}|/\Delta\theta)}{\left[\frac{T_{min}}{F(1-\Gamma)\Delta\theta^2} + \frac{1}{2}\right] + (|\theta_{01}|/\Delta\theta)^2} \quad (23)$$

$M_y$の最大値は $\frac{T_{min}}{F(1-\Gamma)\Delta\theta^2} < \frac{1}{2}$ のとき 1をこえる。

$M_y$は変調波成分に対する変調度であるから、これを実際に測定するには、掃引形干渉計などの調波分析の方法を用いる必要があり、通常の変調波形の観測から、これを測定するのは困難である。
我々は、後述の実験の際、通常の波形観測の方法を用いているので、波形観測の方法に適した、つぎのごとき実効変調度 $M_e$ を定義する。

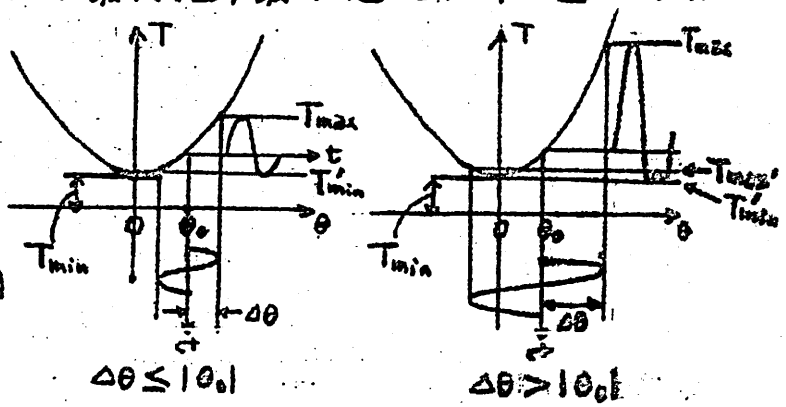
(i) $\Delta\theta \leq |\theta_{01}|$ のとき

$$M_e = \frac{P_{max} - P_{mini}}{P_{max} + P_{min}} = \frac{T_{max} - T'_{min}}{T_{max} + T'_{min}} \quad (24)$$

(ii) $\Delta\theta > |\theta_{01}|$ のとき

$$M_e = \frac{P_{max} - P_{max'}}{P_{max} + P_{max'}} = \frac{T_{max} - T_{max'}}{T_{max} + T_{max'}} \quad (25)$$

ただし、$T_{max}$, $T'_{min}$, $T_{max'}$ などは、透過係数の変調における、最大値、最小値で、第5図に図示してある。




第5図
透過度による変調と変調度の定義

$\Delta\theta \leq |\theta_{01}|$ $\Delta\theta > |\theta_{01}|$

また(15)より、$T_{max}$, $T_{min}'$, $T_{max}'$ はつぎのごとく表わされる。

$$T_{max} = T_{min} + F(1-\Gamma)(|\theta_0| + \Delta\theta)^2 \qquad (26)$$

$$T_{min} = \begin{cases} T_{min} + F(1-\Gamma)(|\theta_0| - \Delta\theta)^2 & : \Delta\theta < |\theta_0| \text{のとき} \quad (27) \\ T_{min} & : \Delta\theta > |\theta_0| \text{のとき} \quad (27') \end{cases}$$

$$T_{max}' = T_{min} + F(1-\Gamma)(|\theta_0| - \Delta\theta)^2 \qquad (28)$$

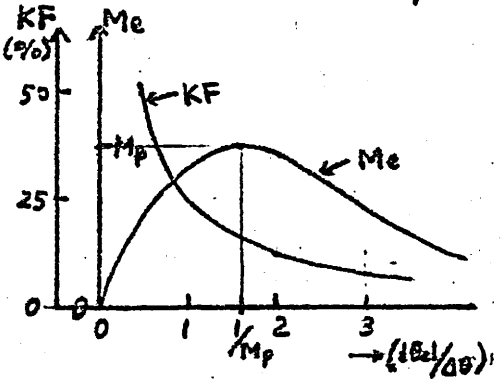
したがって、(24), (25) の Me はまとめて、

$$Me = \frac{2(|\theta_0|/\Delta\theta)}{\frac{1}{[M_p(\Delta\theta)]^2} + (|\theta_0|/\Delta\theta)^2} \qquad (29)$$

ただし

$$M_p(\Delta\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T_{min}}{F(1-\Gamma)\Delta\theta^2}}} \qquad (30)$$

(29)からわかるように、実効変調度 Me は $(|\theta_0|/\Delta\theta)$ が $1/M_p$ のとき最大値をとり、$M_p$ となる。(29)をグラフで示すと、第6図のようになる。図中に(22)のKFをあわせて示した。

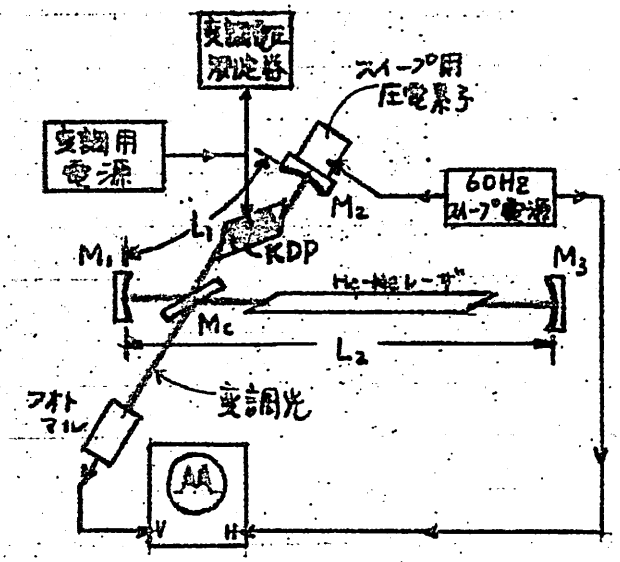



第6図 規格化バイアス $(|\theta_0|/\Delta\theta)$ に対する変調度Me, 並率KF

## II 実験

### 1. 装置

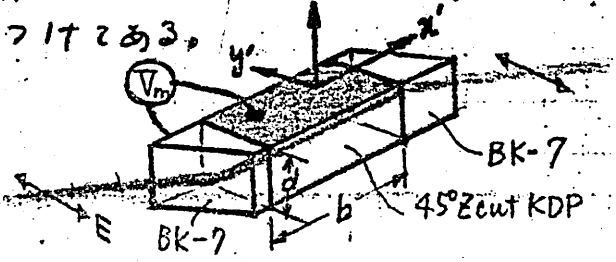
実験に用いた装置の配置図を第1図に示す。各部の寸法，ミラーの曲率などは図中に示すとおりである。$M_c$は裏面での反射を避けるためブリュースタ角で配置した。




$L_1 = 25\,cm$
$L_2 = 155\,cm$
$M_1, M_2$ … $r = 3.0\,m$, $R = 100\%$
$M_3$ …… $r = 6.6\,m$, $R = 100\%$
$M_c$ …… $r = \infty$, $R = 30\%$

第1図 実験装置

レーザ管は長さ80cm内径3mmのHe-Neで6328Åで用いている。折れ曲がり共振器に挿入する位相変調用電気光学結晶は45°Zカットの KDPで，結晶の方向，電極配置，入射光の偏光方向などは第2図に示してある。両端には反射防止のためBK-7ガラス製のブリュースタプリズムが貼りつけてある。




$b = 20\,mm$
$d = 6\,mm$

第2図 変調素子

## 2 測定

測定は，折れ曲がり共振器の光学的位相のバイアス点 $\theta_0$ [(12)式] を $M_2$ にとりつけた圧電素子により 60Hz でスイープしながら，一定振幅の変調電圧を KDP にかけ，$\theta_0$ の変化に対する実効変調度 $M_2$ をオシロスコープ上で読みとる方法をとった。変調電圧の振幅 $\Delta V_m$ と位相変調の振幅 $\Delta\theta$ との間には，つぎの関係がある。

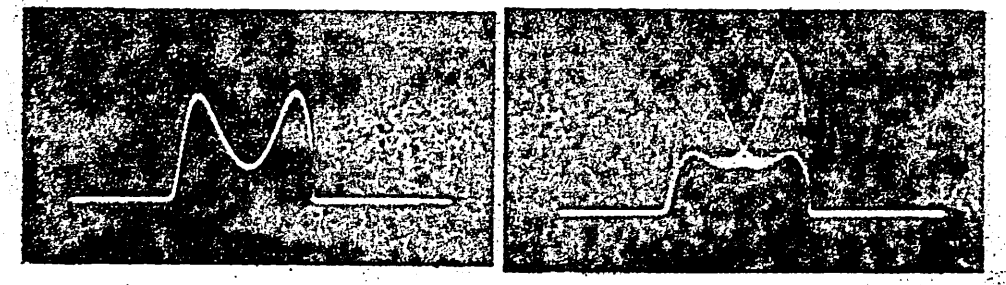
$$\Delta\theta\,[\mathrm{rad}] = \frac{\pi}{2}\,\frac{b}{d}\,\frac{\Delta V_m\,[V]}{V_{\lambda/2}\,[V]} \qquad (31)$$

使用した KDP の寸法は第8図に示すとおりであり，$(b/d)=3.3$ となる。$V_{\lambda/2}$ は KDP の半波長電圧で，6328Å において，9.3kV とすると，

$$\Delta\theta\,[\mathrm{rad}] = 5.6\times10^{-4}\,\Delta V_m\,[V] \qquad (31')$$

となる。変調周波数 $\nu/2\pi$ は，本実験では 300kHz ～ 700kHz であった。

得られたオシロスコープの図形を第9図に示す。

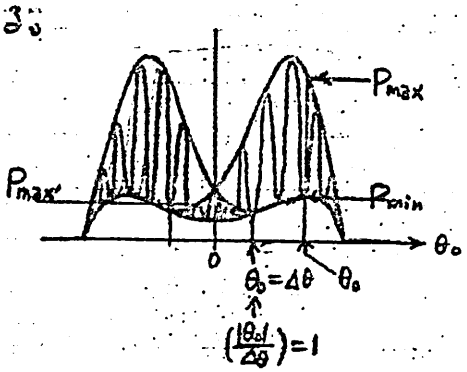


(a) 無変調　　(b) $\Delta V_m = 40V$

第9図　バイアス点に対する結合変調出力

第9図(a)は無変調時で，バイアス $\theta_0$ 対出力パワーで，(19)において $\Delta\theta=0$ とした $P_{out}$ に相当する。図(b)は変調

を加えた場合で (18) に相当する。この状態を図式的にえがけば第10図のようになる。変調波形の下のふちが折りかえしをはじめる横軸の値は、規格化バイアス $(|e_0|/\Delta\theta)=1$ を与える。$\Delta\theta$ 自体は $\Delta T_m$ の測定により (31') 式から知られる。この点を基準として、横軸を $(|e_0|/\Delta\theta)$ で目盛ることができる。又、$P_{max}$, $P_{min}$, $P_{max'}$ なども測定波形から読みとられる。これらの測定値より、(24), (25) に定義した Me が得られる。

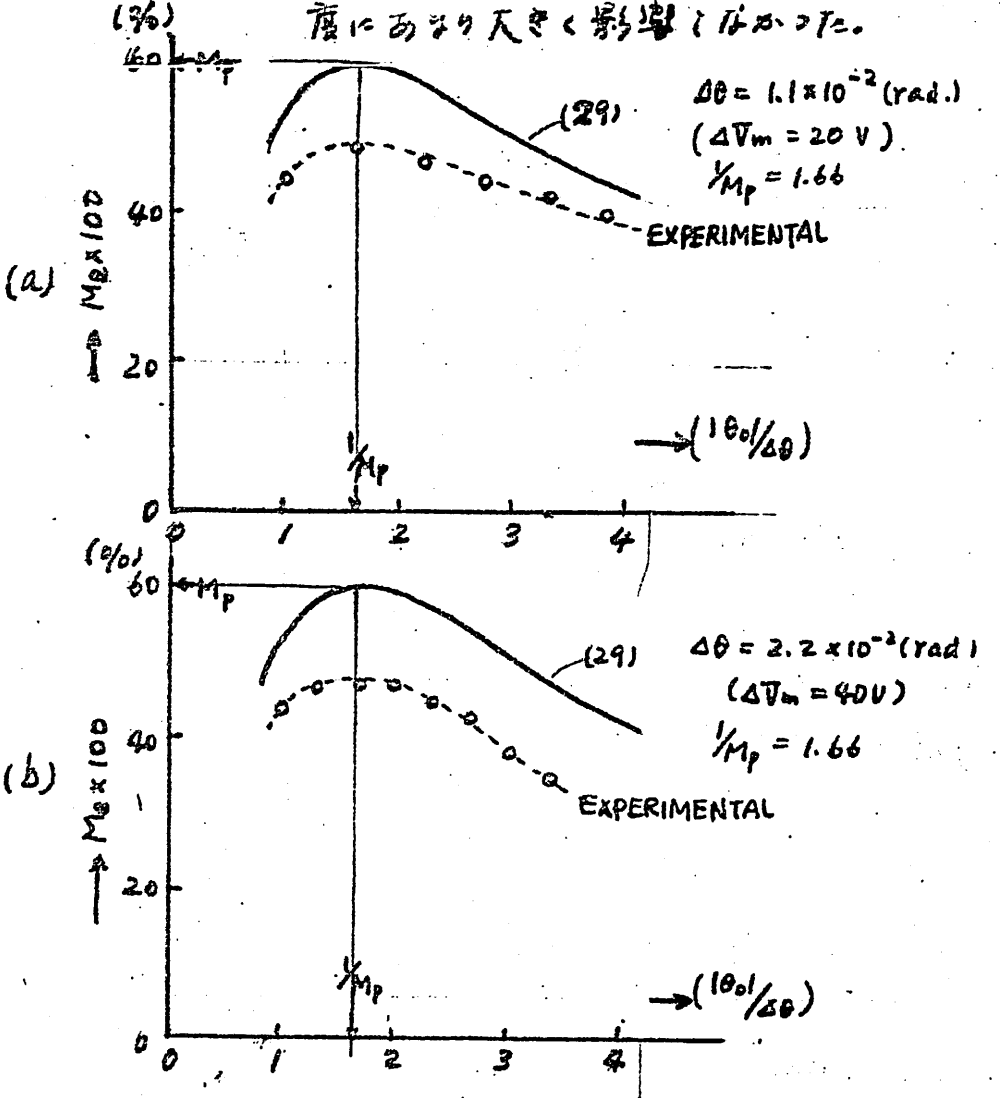



第10図 変調波形の観測

## 3 実験結果

以上のようにして、$|e_0|/\Delta\theta$ 対 Me を得る。第11図に $\Delta\theta$ の異なる2例について結果を示す。(a) の場合 $\Delta T_m = 20^{\circ}$, (b) の場合 $\Delta T_m = 40^{\circ}$ であるが、いずれも、実効変調度は最大で約50%である。これは、(a) に対して、(b) の方が $T_{min}$ が大きいためであると考えられる。測定結果を (29) (および (30)) の理論式と比較するのに、$T_{min}$, F, Γ などの値が必要となるが、これらの実測はかなり困難なので、ここでは Me の最大点を与える $(|e_0|/\Delta\theta)$ の値を (29) により $1/M_p$ と仮定して、$M_p$ を決定し、(29) のグラフを図中にあわせて示してある。(a), (b) いずれの場合にも $1/M_p = 1.66$ であった。このように Me の最大点となるバイアス

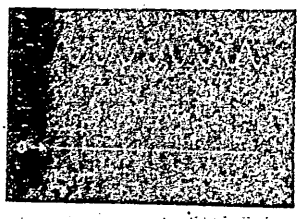
を測定値に一致させた場合、理論と実験との誤差は約20%で、実験値の方が小さくでる。この原因としては、種々の要因が考えられるが、実験に用いた変調周波数が300～700 kHzとすでかなり低いので、内部パワー $P_{in}$ が、まだ変調を受けているということも、一つの原因と考えられる。この範囲で変調周波数の変化は変調度にあまり大きく影響しなかった。




第11図　バイアス点 対 変調度

4 一定 $\theta_0$ に対する変調

実際に、この結合変調の方式で変調を行なうには、光学的バイアス $\theta_0$ を一定に保って変調をかけなければならない。通常の複合共振器レーザでは、その中に含まれる2つの共振器（長さ $L_1, L_2$）が相互に安定せず、$\theta_0$ を一定に保つことはかなり困難である。われわれは、この問題に対して、複合共振器の安定化の方法を提案し[6]、実験[7]してきたが、この方法を用いて、変調動作時にも適用できる（ただし、変調周波数が安定制御系の帯域よりはるかに高い場合）。このようにして、$\theta_0$ を一定に保ちながら、変調をかけたときの変調光の有様を第12図に示す。



第12図　$\theta_0$ 一定に対する変調．変調周波数 300 kHz

## IV あとがき

複合共振器を用いた単一周波数レーザの折れ曲がり共振器に電気光学結晶を挿入し、高能率の変調を行なえることが実験的にたしかめられ、理論とかなりよい一致を示した。実験結果では、1 MHz 以下の低周波ではあるが 20 V（振幅）の変調電圧で約 50% の変調度を得られることがわかった。今後、変調用電気光学結晶の縦横比をさらに改善し、KDP を KD*P にとりかえるなどすれば、10 V 以下の変調電圧で、50% 程度の変調度を得ることが可能と考えられる。また、今後、変調周波数を高くし

て実験を進める必要がある。(100MHz程度まで)

本方法は、通常の偏波分離プリズムによる結合変調(第3図)より、変調感度は、F倍となるが、変調感度の周波数特性に凹凸を生じ、帯域性となる。F=1にえらべば(ビームスプリッタの反射係数の選択による)、本方法の変調感度、帯域幅は、通常の偏波分離方式の結合変調と等しくなるが、なお、本方法の方が、偏波分離プリズムを要しない(光学的ロスが多い)、電気光学結晶として、KDPを用いる場合、横電界型に使えるので、結晶の縦横比を大きくとることにより、変調感度を増大できる、などの点は有利と考えられる。

## 文献


1) Gürs, Müller, Proc. Symp. Opt. Masers, 1963, 243 (1963)
2) DiDomenico, Jr., Jour. Appl. Phys., 35, 2870 (1964)
3) T. Uchida, IEEE Jour. Q.E., QE-1, 336 (1965)
4) 松尾, 張, 小林, 小林, 量エレ研資料, QE-66-1-36 (1967)
5) Nash, Smith, IEEE Jour. Q.E., QE-4, 26 (1968)
6) 田治米, 張, 松尾, 昭42信学全大621
7) 田治米, 張, 松尾, 昭43通大1440, 昭43信学全大650

# 複合共振器単一モードレーザの結合変調

松尾幸人、小林哲郎、波々伯部圭佑
田治米徹、張吉夫

（大阪大学産業科学研究所）

昭和43年11月29日

（松下電器産業株式会社　中央研究所）

輻射科学研究会

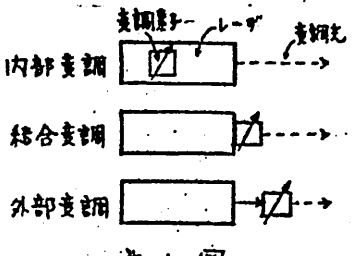
# 複合共振器単一モードレーザの結合変調

松尾幸人
小林哲郎
渡々伯部圭佑
田治米徹
張吉夫
（大阪大学産業科学研究所）

## I はしがき

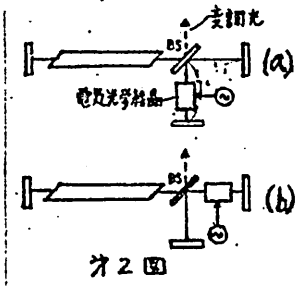
レーザ光の変調を考えるとき、その変調を行なう場所によって、これを分類すると第1図に示すように、通常の外部変調（レーザ光をレーザ発振器から一旦取り出して、外部で変調を行なうもの）、内部変調（レーザ発振器の内部で変調を行なうもの）、および、それらの中間的な方法である結合変調（レーザ発振器の結合部の結合度を変調するもの）とに分けることができる。これらのうち、ここで取り上げる結合変調は他のものに比して変調能率がよく、しかも広帯域な変調を行なえる点に特長があり、有効な変調法方として多くの研究者によって取り上げられている。[1),2),3)] 結合変調による変調能率の向上は、特にHe-Neレーザなどのごとく利得の小さいレーザで著しい。なぜならば、利得が小さいために外部への結合部の結合度は必然的に小さくなければならず、したがって、その小さな結合度を僅かに変動しても、外部への出力は大きく

変化するからである。云いかえれば、He-Neレーザなどの低利得レーザにおいては共振器内部パワーが外部パワーに比して桁ちがいし通常100倍程度大きいために変調部(この場合、結合部であるが)を通して得られるパワーが大きくとれるからであるとも云える。



第1図

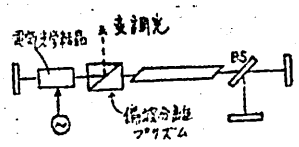
結合変調の変調帯域は、変調素子としての結合素子の帯域にもよるが、通常、多モード発振レーザの縦モード間隔よりは充分広くとれる。従って、その広帯域性を充分に利用するためには、発振レーザ出力が単一モードでなければならない。この点に関して、我々は以前に単一周波数レーザについての結合変調の方法を提案した。[4] その方法のあらましは第2図に示すごとく単一周波数化のために必要な複合共振器の複合鏡が、そのまま結合変調素子として用いられるものである。



第2図

この構成は、結合変調の変調素子として、従来用いられてきた電気光学結晶と、それによる偏波成分の変動を分離する偏波分離プリズムとの組合わせによるものとは異なり、変調素子が光共振器系を含むため、変調感度がさらに改善される点に特長があるが、帯域がその分だけ制限される点はやむを得ない。その後、このような単一周波数レーザの結合変調については Nashらが実験を行なっている。[5] Nashらの方法は第3図に示すごとく、単一周波数化のための複合共振器

レーザに、結合変調素子として、従来の電気光学結晶ー偏波分離プリズムの組合せを用いたものである。この方式は変調素子に光共振系を含まないため非常に広帯域にできる事が報告されている。



第3図

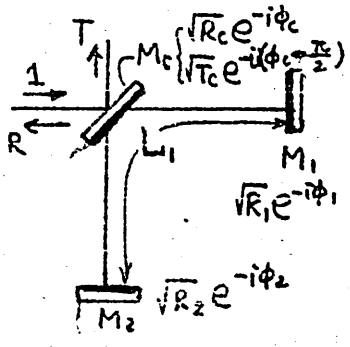
我々は、第2図(a)の方法について、比較的低い周波数ではあるが、実験を行ない、理論的予想とかなりよい一致を示す良好な結果を得たので、以下に報告する。

## II 理論的考察

### 1. 折れ曲がり形共振器

以下、第2図(a)の構成について考える。第2図(a)の右端にある3枚のミラーよりなる複合鏡は、共振器を形成しており、我々は、これを折れ曲がり共振器と呼んでいる。[4] この折れ曲がり共振器は、単一周波数を得るためのものであるが、いま、それが同時に、結合変調部を構成しているのである。

いま、各ミラーの振幅反射係数($\sqrt{R}e^{i\phi}$)、振幅透過係数($\sqrt{T}e^{-i\phi}$)を、第4図に示すようにとる。簡単な計算の結果、折れ曲がり共振器全体が呈する、合成パワー反射係数、$R$、および合成パワー透過係数$T$は、次式で与えられることがわかる。



第4図

$$R = R_{max}\left[1 + F\sin^2\theta\right]^{-1} \quad (1)$$

$$T = \left[T_{min} + F(1-\Gamma)\sin^2\theta\right]\left[1 + F\sin^2\theta\right]^{-1} \quad (2)$$

ここで,

$$R_{max} = R_1 T_c^2 \left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\, R_c\right)^{-2} \quad (3)$$

$$F = 4R_c\sqrt{R_1 R_2}\left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\, R_c\right)^{-2} \quad (4)$$

$$T_{min} = R_c\left[1 - \sqrt{R_1 R_2}(1-\Gamma)\right]\left[1 - \sqrt{R_1 R_2}\, R_c\right]^{-2} \quad (5)$$

$$\Gamma = 1 - R_c - T_c \quad (6)$$

$$\theta = \omega L_1/c + \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \phi_c \quad (7)$$

であり, $\omega$ は入射光の角周波数, $c$ は光速である。

2. 折れ曲がり共振器による(結合)変調.

折れ曲がり共振器内に電気光学素子を挿入し, つぎのような位相変化を与えるものとする。

$$\delta\theta = \Delta\theta\cos(\nu t + \varphi) \quad (8)$$

ただし, $\nu$ は変調角周波数で, $\Delta\theta$ は振幅である。
(電気光学素子は, いま $M_c M_2$ 間に挿入することを考えているが, この素子の光に対する損失は, 便宜上 $R_2$ に含めればよい。) 折れ曲がり共振器の共振角周波数と変調角周波数 $\nu$ とのずれを $\delta\nu$ とおくと,

$$\delta\nu = \nu - n\frac{c\pi}{L_1} \quad (n: \text{整数}) \quad (9)$$

もし,

$$|\delta\nu| < \left(\frac{c}{L_1}\right)\frac{1}{\sqrt{F}} \quad (10)$$

で, かつ

$$\Delta\theta \lesssim \left(\frac{\omega}{v}\right)\frac{1}{\sqrt{F}} \qquad (11)$$

なら，(7)の$\theta$は，(8)の$\delta\theta$だけ変動を受けていても，(1)，(2)は成り立ち，それらに応じて，反射係数，透過係数が変動を受けることになる。[4]

(8)の変調をかけたとき，(7)の$\theta$はつぎのようにかける。

$$\left.\begin{aligned} &\theta = m\pi + \theta_0 + \delta\theta \quad (m: \text{整数}) \\ &\text{ただし.} \quad |\theta_0| \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

したがって，(1)，(2)の$\theta$のかわりに，$(\theta_0+\delta\theta)$を考えればよい。

以上に考えた折れ曲がり共振器を第2図(a)のごとく，レーザの一方~~の鏡~~の端におき，レーザの外部への結合度を変調する，結合変調を考える。He-Neレーザのごとき，低利得レーザでは，発振領域では，$F\sin^2\theta \ll 1$であり，また通常$F \gtrsim 1$であるので，

$$\left.\begin{aligned} &F\sin^2\theta = F\sin^2(\theta_0+\delta\theta) \simeq F(\theta_0+\delta\theta)^2 \ll 1 \\ &\text{ゆえに.} \quad |\theta_0| \ll 1, \quad \Delta\theta \ll 1. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

したがって，(1)，(2)は充分の近似で次式で表わされる。

$$R \cong R_{max}\left[\left\{1 - F\left(\theta_0^2 + \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)\right\} - 2F\theta_0\Delta\theta\cos(\nu t+\varphi) - \frac{1}{2}F\Delta\theta^2\cos 2(\nu t+\varphi)\right] \qquad (14)$$

$$T \simeq \left\{T_{min} + F(1-\Gamma)\left(\theta_0^2 + \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)\right\} + 2F(1-\Gamma)\theta_0\cdot\Delta\theta\cos(\nu t+\varphi) + \frac{1}{2}F\Delta\theta^2(1-\Gamma)\cos 2(\nu t+\varphi) \qquad (15)$$

## 3 変調出力

変調の周期 $2\pi/\nu$ がレーザの共振器内での立ち上り時間に比して充分短かいときは、共振器内部のパワー $P_i$ は、変調によって変動を受け[illegible]ない。しかし、$P_i$ の値は、結合変調部の反射係数 $R$ の時間平均値 $R_{av}$ に影響される。$R_{av}$ は(14)より、

$$R_{av} = R_{max}\left[1 - F\left(\theta_0^2 + \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)\right] \qquad (16)$$

一方 $P_i$ が次式で表わされることはよく知られている。

(i) ドップラーリミットの媒質に対して

$$P_i = K\left[\left(\frac{G}{A+1-R_{av}}\right)^2 - 1\right] \qquad (17)$$

(ii) homogeneous broadening の媒質に対して

$$P_i = K\left[\frac{G}{A+1-R_{av}} - 1\right] \qquad (17')$$

ここで、$K$ は定数、$A$ は折れ曲がり共振器部以外でのレーザの1往復損失、$G$ は1往復の小信号レーザ利得である。

結合変調部からの出力パワー $P_o$ は、$P_i T$ であるが、これを変調周波成分と、2次高調波成分とにわければ、直流成分と

$$P_o = P_i T = P_{oav} + P_{o1}\cos(\nu t+\varphi) + P_{o2}\cos 2(\nu t+\varphi) \qquad \cdots(18)$$

と表わすことができる。(15)式より、

出力パワー直流成分：$P_{oav} = P_i\left[T_{amin} + F(1-\Gamma)\left(\theta_0^2 + \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)\right]$ (19)

出力パワー変調波成分：

$$P_{0v} = P_i \cdot 2F(1-\Gamma)\theta_0\Delta\theta \qquad (20)$$

出力パワー2次高調波成分：

$$P_{02v} = P_i \cdot \frac{1}{2}F(1-\Gamma)\Delta\theta^2 \qquad (21)$$

いま、(20)で与えられる$P_{0v}$が問題である。(20)で注意すべきは、$P_i$が(17)および(16)により、$\theta_0$および$\Delta\theta$の関数であるから、$P_{0v}$を最大にする$\theta_0$と$\Delta\theta$との組み合わせは複雑となることである。

第3図に示したNaohらの方法によれば、$P_{0v}$は$P_i \cdot 2\theta_0\Delta\theta$となるから[5]、本方法の方が、同一の$\theta_0 \cdot \Delta\theta$に対して（したがって、$\theta_0$一定とすれば、同一の変調電圧に対して）$F(1-\Gamma)$倍の変調出力が得られることとなる。

## 4. 変調出力の歪率

変調出力の歪率（KF）は、(20)、(21)式より

$$KF = \frac{P_{02v}}{|P_{0v}|} \times 100 = \frac{\Delta\theta}{4|\theta_0|} \times 100 \ (\%) \qquad (22)$$

と表わされる。結合変調が有効である。低利得レーザでは、$(\Delta\theta/|\theta_0|) = \frac{1}{2}$程度の値が用いられるので、その際には、$KF = 12.5\%$となる。

## 5 変調度

変調度$M_v$を$|P_{0v}|/P_{av}$と定義すれば、

$$M_y = \frac{|P_{oy}|}{P_{av}} = \frac{2(|\theta_{oi}|/\Delta\theta)}{\left[\frac{T_{min}}{F(1-\Gamma)\Delta\theta^2} + \frac{1}{2}\right] + (|\theta_{oi}|/\Delta\theta)^2} \quad (23)$$

$M_y$の最大値は $\frac{T_{min}}{F(1-\Gamma)\Delta\theta^2} < \frac{1}{2}$ のとき 1 をこえる。

$M_y$は変調波成分に対する変調度であるから，これを実際に測定するには，掃引形干渉計などの調波分析の方法を用いる必要があり，通常の変調波形の観測から，これを測定するのは困難である。我々は，後述の実験の際，通常の波形観測の方法を用いているので，波形観測の方法に適した，つぎのごとき実効変調度 $M_e$ を定義する。

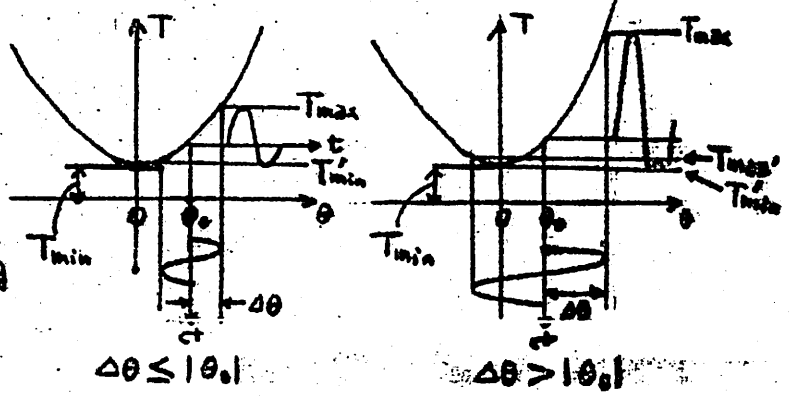
(i) $\Delta\theta \leq |\theta_{oi}|$ のとき

$$M_e = \frac{P_{max} - P_{mini}}{P_{max} + P_{min}} = \frac{T_{max} - T'_{min}}{T_{max} + T'_{min}} \quad (24)$$

(ii) $\Delta\theta > |\theta_{oi}|$ のとき

$$M_e = \frac{P_{max} - P_{max'}}{P_{max} + P_{max'}} = \frac{T_{max} - T'_{max'}}{T_{max} + T_{max'}} \quad (25)$$

ただし，$T_{max}$, $T'_{min}$, $T_{max'}$ などは，透過係数の変調における，最大値，最小値で，第5図に図示してある。




第5図
透過度による変調と変調度の定義

$\Delta\theta \leq |\theta_{oi}|$　　$\Delta\theta > |\theta_{oi}|$

また(15)より、$T_{max}$, $T'_{min}$, $T_{max}'$ はつぎのごとく表わされる。

$$T_{max} = T_{min} + F(1-\Gamma)(|\theta_0| + \Delta\theta)^2 \qquad (26)$$

$$T_{min} = \begin{cases} T_{min} + F(1-\Gamma)(|\theta_0| - \Delta\theta)^2 & : \Delta\theta < |\theta_0| \text{のとき} \quad (27) \\ T_{min} & : \Delta\theta > |\theta_0| \text{のとき} \quad (27') \end{cases}$$

$$T_{max}' = T_{min} + F(1-\Gamma)(|\theta_0| - \Delta\theta)^2 \qquad (28)$$

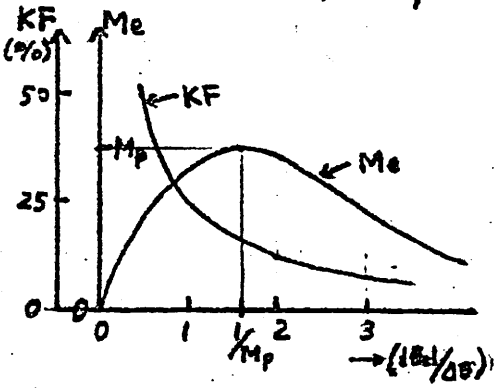
したがって、(24), (25) の Me はまとめて、

$$Me = \frac{2(|\theta_0|/\Delta\theta)}{\frac{1}{[M_p(\Delta\theta)]^2} + (|\theta_0|/\Delta\theta)^2} \qquad (29)$$

ただし

$$M_p(\Delta\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T_{min}}{F(1-\Gamma)\Delta\theta^2}}} \qquad (30)$$

(29)からわかるように、実効変調度 Me は $(|\theta_0|/\Delta\theta)$ が $1/M_p$ のとき最大値をとり、$M_p$ となる。(29)をグラフで示すと、第6図のようになる。図中に(22)のKFをあわせて示した。

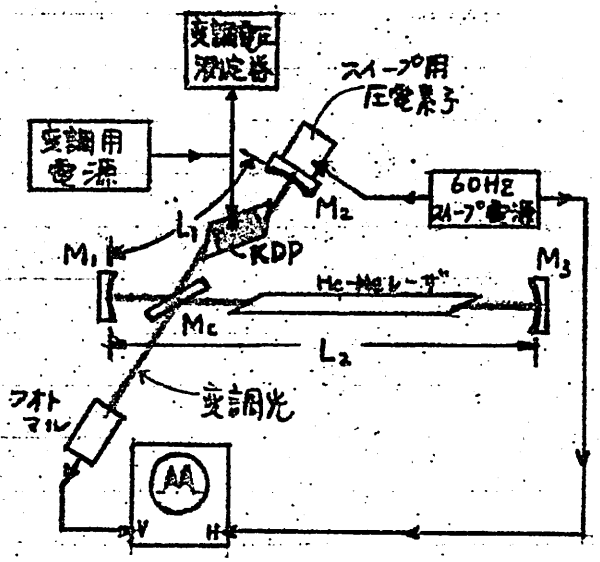



第6図 規格化バイアス $(|\theta_0|/\Delta\theta)$ に対する変調度 Me, 歪率 KF

## Ⅲ 実験

### 1. 装置

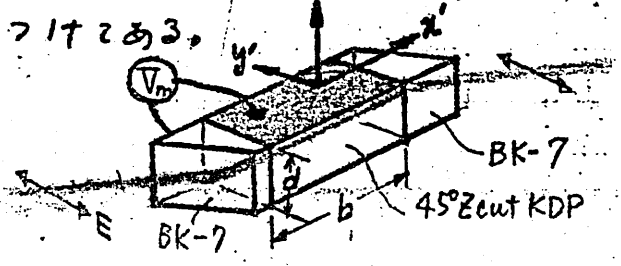
実験に用いた装置の配置図を第1図に示す。各部の寸法，ミラーの曲率などは図中に示すとおりである。$M_c$は裏面での反射を避けるためブリュースタ角で配置した。




$L_1 = 25\ cm$
$L_2 = 155\ cm$
$M_1, M_2$ ……{ $r = 3.0\ m$, $R = 100\%$
$M_3$ ……{ $r = 4.6\ m$, $R = 100\%$
$M_c$ ……{ $r = \infty$, $R = 30\%$

第1図 実験装置

レーザ管は長さ80cm 内径3mmのHe-Neで6328Åで用いている。折れ曲がり共振器に挿入する位相変調用電気光学結晶は45°Zカットの KDPで，結晶の方向，電極配置，入射光の偏光方向などは第2図に示してある。両端には反射防止のためBK-7ガラス製のブリュースタプリズムが貼りつけてある。




$b = 20\ mm$
$d = 6\ mm$
第2図 変調素子

2-測定

測定は、折れ曲がり共振器の光学的位相バイアス点 $\theta_0$ [(12)式] を $M_2$ にとりつけた圧電素子により 60Hz でスイープしながら、一定振幅の変調電圧を KDP にかけ、$\theta_0$ の変化に対する実効変調度 $M_e$ をオシロスコープ上で読みとる方法をとった。変調電圧の振幅 $\Delta V_m$ と位相変調の振幅 $\Delta\theta$ との間には、つぎの関係がある。

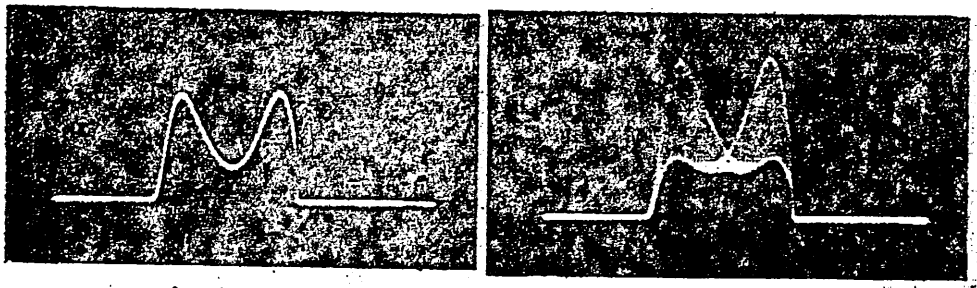
$$\Delta\theta\,[rad] = \frac{\pi}{2}\,\frac{b}{d}\,\frac{\Delta V_m\,[V]}{V_{\lambda/2}\,[V]} \qquad (31)$$

使用した KDP の寸法は第8図に示すとおりであり、$(b/d)=3.3$ となる。$V_{\lambda/2}$ は KDP の半波長電圧で、6328Å において、9.3KV とすると、

$$\Delta\theta\,[rad] = 5.6\times10^{-4}\,\Delta V_m\,[V] \qquad (31')$$

となる。変調周波数 $\nu_A$ ($\nu/2\pi$) は、本実験では 300kHz ~ 700kHz であった。

得られたオシロスコープの図形を第9図に示す。

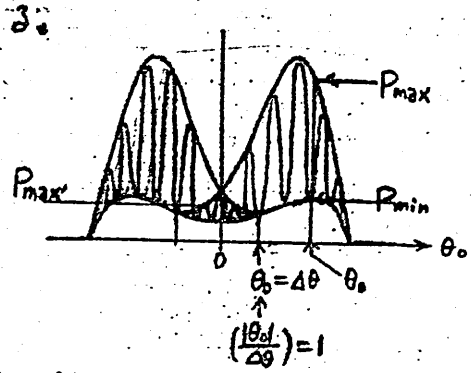


(a) 無変調　　(b) $\Delta V_m = 40V$

第9図　バイアス点に対する結合変調出力

第9図(a)は無変調時で、バイアス $\theta_0$ 対出力パワーで、(19)において $\Delta\theta=0$ とした $P_{out}$ に相当する。同図(b)は変調

を加えた場合で (18) に相当する。この状態を図式的にえがけば第10図のようになる。変調波形の下のふちが折りかえしをはじめる横軸の値は、規格化バイアス $(|\theta_0|/\Delta\theta)=1$ を与える。$\Delta\theta$ 自体は $\Delta V_m$ の測定により (31') 式から知られる。この点を基準として、横軸を $(|\theta_0|/\Delta\theta)$ で目盛ることができる。又、$P_{max}$, $P_{mini}$, $P_{max'}$ なども測定波形から読みとられる。これらの測定値より、(24), (25) に定義した Me が得られる。

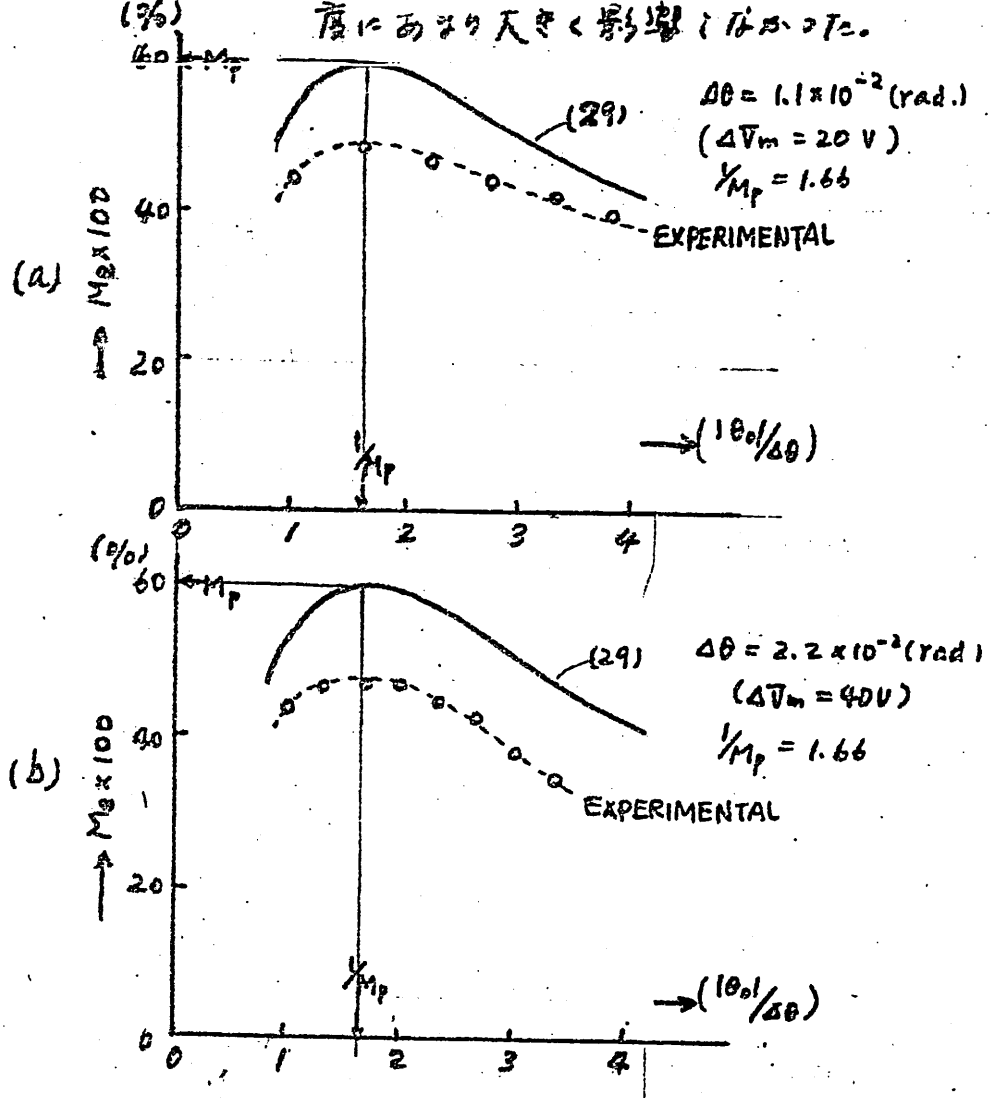



第10図 変調波形の観測

## 3 実験結果

以上のようにして、$|\theta_0|/\Delta\theta$ 対 Me を得る。第11図に $\Delta\theta$ の異なる3つの例について結果を示す。(a) の場合 $\Delta V_m = 20V$, (b) の場合 $\Delta V_m = 40V$ であるが、いずれも、実効変調度は最大で約50%である。これは、(a) に対して、(b) の方が $T_{min}$ が大きいためであると考えられる。測定結果を (29) (および (30)) の理論式と比較するのに、$T_{min}$, F, Γ などの値が必要となるが、これらの実測はかなり困難なので、ここでは Me の最大点を与える $(|\theta_0|/\Delta\theta)$ の値を (29) により $1/M_p$ と仮定して、$M_p$ を決定し、(29) のグラフを測定値の図中にあわせて示してある。(a), (b) いずれの場合にも $1/M_p = 1.66$ であった。このように Me の最大点となるバイアス

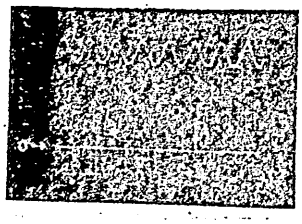
を測定値に一致させた場合、理論と実験との誤差は約20%で、実験値の方が小さくでる。この原因としては、種々の要因が考えられるが、実験に用いた変調周波数が300～700kHzとまだかなり低いので、内部パワーPinが、まだ変調を受けているということも、一つの原因と考えられる。この範囲で変調周波数の変化は変調度にあまり大きく影響しなかった。




第11図　バイアス点対変調度

4 一定 $\theta_0$ に対する変調

実際に、この結合変調の方式で変調を行なうには、光学的バイアス $\theta_0$ を一定に保って変調をかけなければならない。通常の複合共振器レーザでは、その中に含まれる2つの共振器（長さ $L_1, L_2$）が相互に安定せず、$\theta_0$ を一定に保つことはかなり困難である。われわれは、この問題に対して、複合共振器の安定化の方法を提案し[6]、実験[7]してきたが、この方法は、変調動作時にも適用できる（ただし、変調周波数が安定制御系の帯域よりはるかに高い場合）。このようにして、$\theta_0$ を一定に保ちながら、変調をかけたときの変調光の有様を第12図に示す。



第12図　$\theta_0$ 一定に対する変調．変調周波数 300kHz

## IV あとがき

複合共振器を用いた単一周波数レーザの折れ曲がり共振器に電気光学結晶を挿入し、高能率の変調を行なえることが実験的にたしかめられ、理論とかなりよい一致を示した。実験結果では、1MHz以下の低周波ではあるが 20V（振幅）の変調電圧で約50%の変調度を得られることがわかった。今後、変調用電気光学結晶の縦横比をさらに改善し、KDP を KD*P におきかえるなどすれば、10V以下の変調電圧で、50%程度の変調度を得ることが可能と考えられる。又、今後、変調周波数を高くし

て実験を進める必要がある。(100 MHz 程度まで)

本方法は、通常の偏波分離プリズムによる結合変調(第1図)より、変調感度は、F倍となるが、変調感度の周波数特性に凹凸を生じ、帯域性となる。F=1にえらべば(ビームスプリッタの反射係数の選択による)、本方法の変調感度、帯域幅は、通常の偏波分離方式の結合変調と等しくなるが、なお、本方法の方が、偏波分離プリズムを要しない(光学的ロスが多い)、電気光学結晶として、KDP を用いる場合、横電界型に使えるので、結晶の縦横比を大きくとることにより、変調感度を増大できる、などの点は有利と考えられる。

## 文献


1) Gürs, Müller, Proc. Symp. Opt. Masers, 1963, 243 (1963)
2) DiDomenico, Jr., Jour. Appl. Phys., 35, 2870 (1964)
3) T. Uchida, IEEE Jour. Q.E., QE-1, 336 (1965)
4) 松尾, 張, 小林, 小林, 量エレ研資料, QE-66-1-36 (1967)
5) Nash, Smith, IEEE Jour. Q.E., QE-4, 26 (1968)
6) 田治米, 張, 松尾, 昭42信学全大 621
7) 田治米, 張, 松尾, 昭43連大1440, 昭43信学全大 650

輻射科学研究会資料

# 270mmφ, 2.8mレーザー管による$H_2+O_2$, $D_2+O_2$の遠赤外発振

（大阪市立大学 工学部）

村井 昭

岡島 茂樹

1968年11月29日

## §1. まえがき

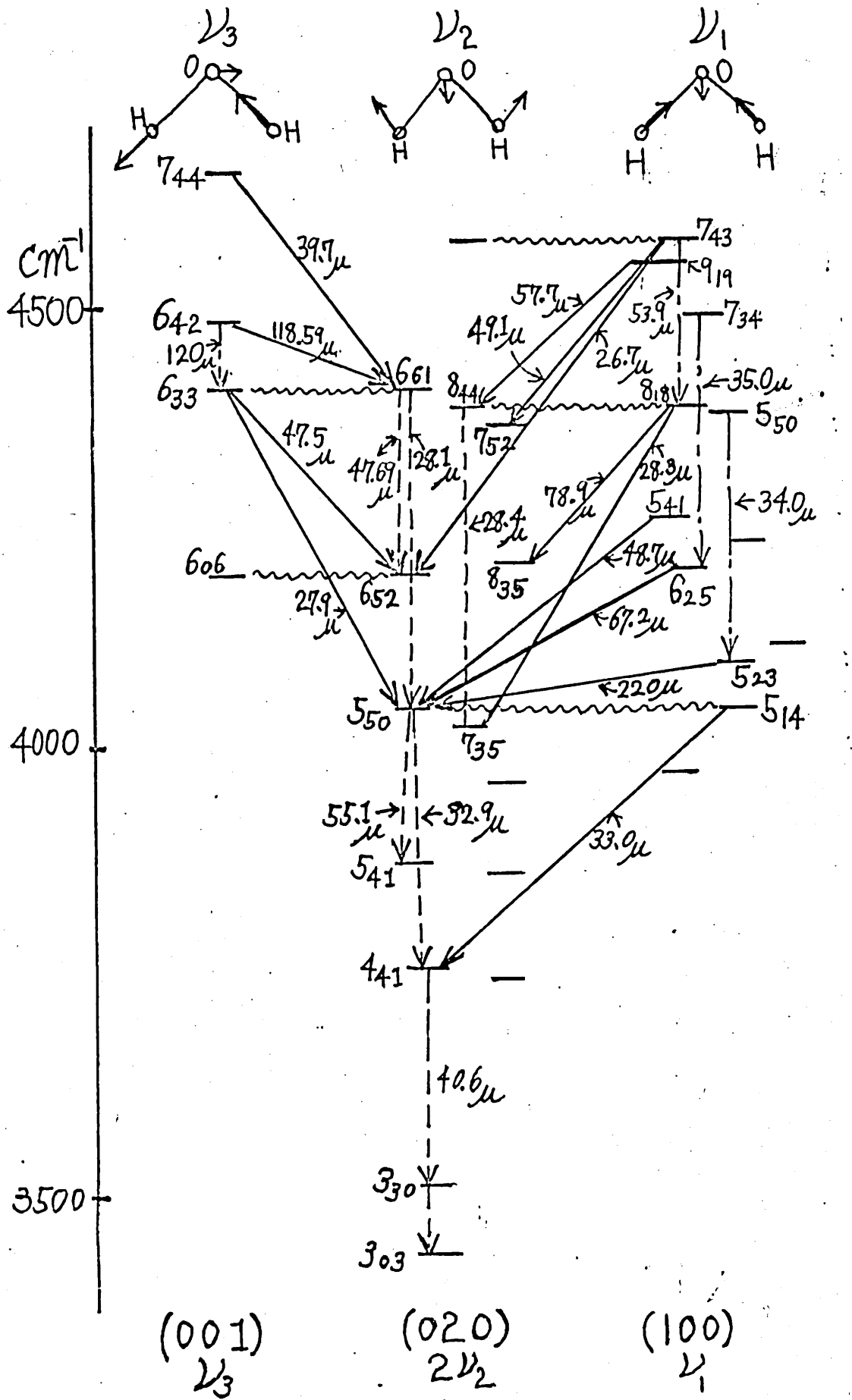
$H_2O$気体の放電による遠赤外レーザー発振は1964年1月のCrocker, Gebbie, Kimmitt, Mathiasの報告[1]が最初で, $D_2O$レーザーは同年4月のGebbie, Stone, Findlay, Robbの報告[2]に始まる。同年, Mathias, Crocherにより, $H_2O$について16～120μmに32本, $D_2O$について33～107μmに16本の5桁の発振波長が報告されている。[3] その後, 更に, $H_2O$では1966年Müller, Fleisherによって220μm[4]が加えられた。 $D_2O$では, Müller, Fleisherによって171.6μm[4]が加えられ, 1967年にJeffers, Colemanによって26～171.6μmに30本の発振が報告[5]され, 1968年にKasuya, Minoh, Shimodaによって218.5μm[6]が加えられている。 CW動作は$H_2O$で5本以上が報告されている。[7]

それらの発振機構については当初$H_2O$, $D_2O$の放電により多量に生ずるOH, OD radicalが発振に寄与していると考えられていた。[8] その後, 118μについて, 磁界を加えるとゼーマン分裂がないか, あるいは非常に小さい[9]事や, 速い応答を示すDetectorによる発振のtime behavior[10]の測定や, CW発振によるCollision broadened line width[11]の測定により, 最近は$H_2O$分子のrotational-vibrational level間の遷移とする説明が試みられている。又, 種々のCW発振線相互間のCascade, Competition動作が見出され[7], 一方, $H_2O$の近赤外2.7μm帯での吸収からの振動・回転スペクトルのデーター[12]をもとにして, 1968年Hartman, Kleman[13]; Benedict[14]; Pollack, Tomlinson[15]等によって$H_2O$ (100), (020), (001)振動状態の間のCoriolis interactionによる遷移等で同定が試みられている。その結果を Fig. 1 に示す。

$D_2O$については吸収のデーターも少く, まだ同定がなされていないが, 発振線相互間の関係を調べる事によって, 同様の模型が考えられる。

任意分圧の$\alpha H_2 + \beta O_2$低圧混合気体からの発振, 或は$H_2 + n\Delta O_2$, $O_2 + n\Delta H_2$からの発振は主に$H_2O$の47μm, 118μm, 220μmであるが, 反応による中間分子の介在から種々の可能性もあり, $H_2O$との単純な比較は出来ないが, 発振内部機構解明に役立つ。

種々の特性を測定する事によって



ν3
ν2
ν1
O
H
cm⁻¹
4500
4000
3500
744
39.7μ
743
919
57.7μ
53.9μ
734
642
118.59μ
120μ
49.1μ
26.7μ
661
633
844
818
35.0μ
550
752
47.5μ
47.69μ
28.1μ
28.3μ
78.9μ
541
34.0μ
28.4μ
606
652
835
48.7μ
625
27.9μ
67.2μ
523
220μ
550
514
735
55.1μ
32.9μ
541
33.0μ
441
40.6μ
330
303
(001)
ν3
(020)
2ν2
(100)
ν1
: Corioli interaction 1-f3 transition.
: Cascade Transition in Bending Mode.
: Cascade Transition in Stretching Mode.


Fig. 1

## §2. 目的

放電励起によるガスレーザー発振の長波長限界を調べる事，及び反応生成物のミリ波診断を目的として，内径270mmφ F-P鏡間隔約2.8mの大径ガスレーザー管を試作した。

低圧封入気体にコンデンサー放電を加えると，電子温度は瞬間的に1～2万度に達するが分子系との衝突により，エネルギーを失い，約20μsec後には完全に低下してしまう。一方，分子系は電子との衝突により励起・解離され，介在する素反応による再結合及び光放出，緩和過程をへて，通常100μsec～1msec後には基底状態に落ちつく。この間にCollision quenchingにうちかった準位差が0.01eV以下で，もしそこでpopulation inversionが達成されるとHigh QのF-P共振器によってλ=100μ以上のlaser発振が起る。それによって，より速かに基底状態におちつく。Collision quenchingはpopulation inversionの達成を妨げる。そこで熱的平衡状態になる即ち，いわゆるBoltzman分布になる衝突過程を少くする為には，封入気体を低圧にすれば良い。一方，発振させる為にはthreshold以上のpopulation inversionを得なければならない。その為には，レーザー管内の全体積を大きくすれば良いが，Spot sizeの方からは波長が決れば，あまり太くするより長くした方が良い事になる。一方，回折損失の方からは長波長に対しては太い管径が要求される。これ等を考慮に入れて，レーザー発振が電子管からの発振と接続する波長をλ=4mmにえらび，クライストロンのミリ波出力とF-P鏡との共用による吸収，放出実験も行える範囲に作る目的で鏡直径を約270mmφにし，そこで$N_F=1$となる様に設計すると鏡間隔は$d\fallingdotseq 4.55$mとなる。ところが資金不足の為$d=3.0$mで試作した。この時$N_F=1$となるλは6mmに達する。

$H_2+O_2$の目的は燃焼，爆鳴反応を含み，最終生成分子$H_2O$迄の過程に$HO_2$，$H_2O_2$等の分子も考えられ，これ等による発振の検出も目的としたが，管径が大きくても爆鳴反応は約1秒程度しか持続しない為に，今の所，この同定の方法はない。これについてはflow管で後程行う予定である。

## §.3. 装置

### (I) レーザー管

内径270mm，全長3mのミラー内蔵方式でミラー内蔵部の外径は約40cmに広がっている。ミラー間隔は約2.8m〜2.88mである。ミラーは厚さ3mmのジュラルミン板より切り出した物で出力結合孔9, 20, 30mmφのものを準備した。曲率半径はそれぞれ11m, 7m, 12m, 18mであるが歪みも含まれている。ミラー直径は35cmまで収容可能であるが現在使用しているものは27cmφである。これによると$\lambda=100\mu$に於て$N_F \fallingdotseq 65$に達し、$H_2O$の118μmではF-P鏡の一方を外部駆動によってtuningしても発振の途切れる事はない。装置をFig.2，Fig.3に示す。

測定系

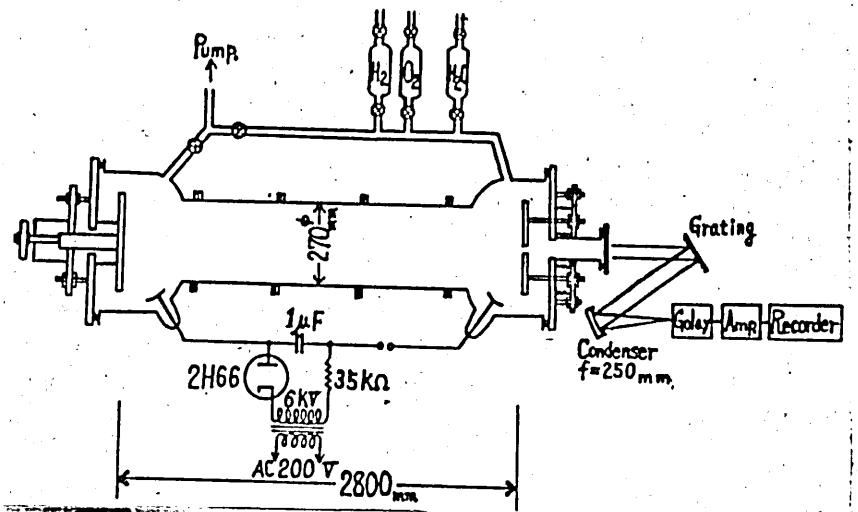



Fig. 2

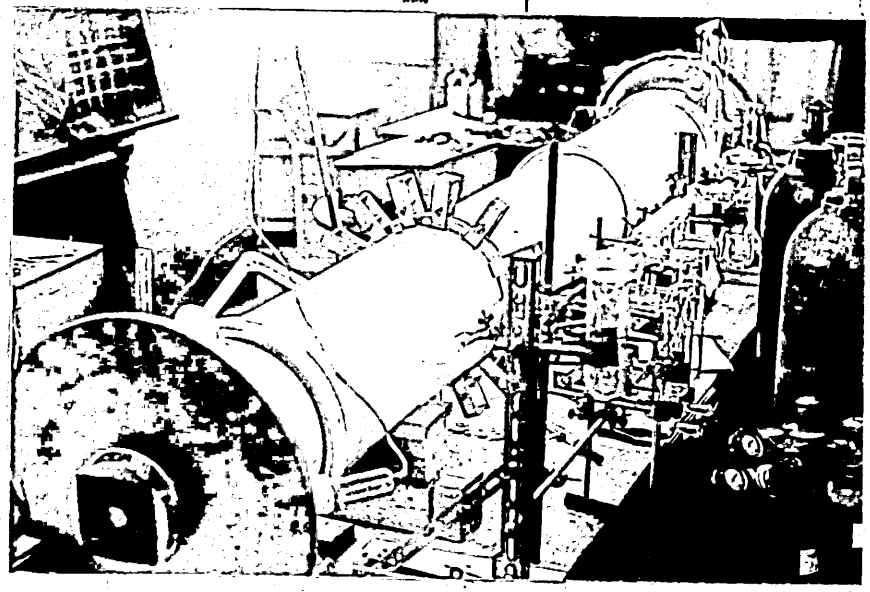


Fig. 3.

(II) 電源

air gap方式のCondenser dischargeによる気放電励起である。

動作例として. $V=4.6$ KV, $C=12\mu F$, パルス中 $20\mu sec$, パルス間隔 0.5 Hzでは peak current 約3000Aに達し, $V=7\sim9.6$ KV, $C=1\mu F$, パルス中 $20\mu sec$, 5~10 Hzでは peak current は約500Aである。

(III) 測定系

出力はポリエチレン窓より取り出す。波長測定は手製遠赤外域 Echelette type の grating および mesh を回転して, 回折分光する方法と, F-P鏡の片方の鏡をモーター駆動する事により, その出力変化から読み取る方法とをとっている。検出は $f=25$ cm コンデンサー・ミラーで集光し, 黒ポリエチレンをかぶせた水晶窓ゴーレイ・セルを用いる。その出力は Amp. を通して. Recorder, Oscilloscope につながる。コンデンサー・ミラーは使わなくても充分分光し得る強度をもつ発振線もある。

出力の絶対測定系を持たないので, これは行っていないが, ゴーレイ・セルの感度から大出力では peak 値 $10^2$ Watts, 小出力では peak 値 数10 mW の範囲と考えている。

## §.4. 実験及び実験結果

### (I) $H_2O$ による 47μm, 118μm の出力特性

$H_2O$ 気体を 0.05 Torr, 0.1 Torr, および 0.2 Torr 封じ込んだ時の放電開始から約 10分間の出力変化を Fig. 4 に示す. 使用したレーザー管では最初の数分間に何れも大きな出力変化が認められる. 発振しやすい定常状態迄, 時間の遅れがある為から

$$H_2O + e^- \longrightarrow H_2O^{+} \longrightarrow H_2O + h\nu \text{ (レーザー出力)}$$

とは考えにくい面も示している. 47μm と 118μm の出力の増減の様子は全く同様で cascade process の関係を変えると考えられる. これから, 発振源として.

$$H_2O + e^- \longrightarrow OH + H \longrightarrow H_2O^{+} \longrightarrow H_2O + h\nu$$

又. $H_2O + (H + e^-)$ による励起の可能性もあると考えている.(16)

$$H_2O + (H + e^-) \longrightarrow H_2O + H^+ \longrightarrow H_3O^{+*} \longrightarrow H_3O^+ + h\nu \longrightarrow H_2O$$

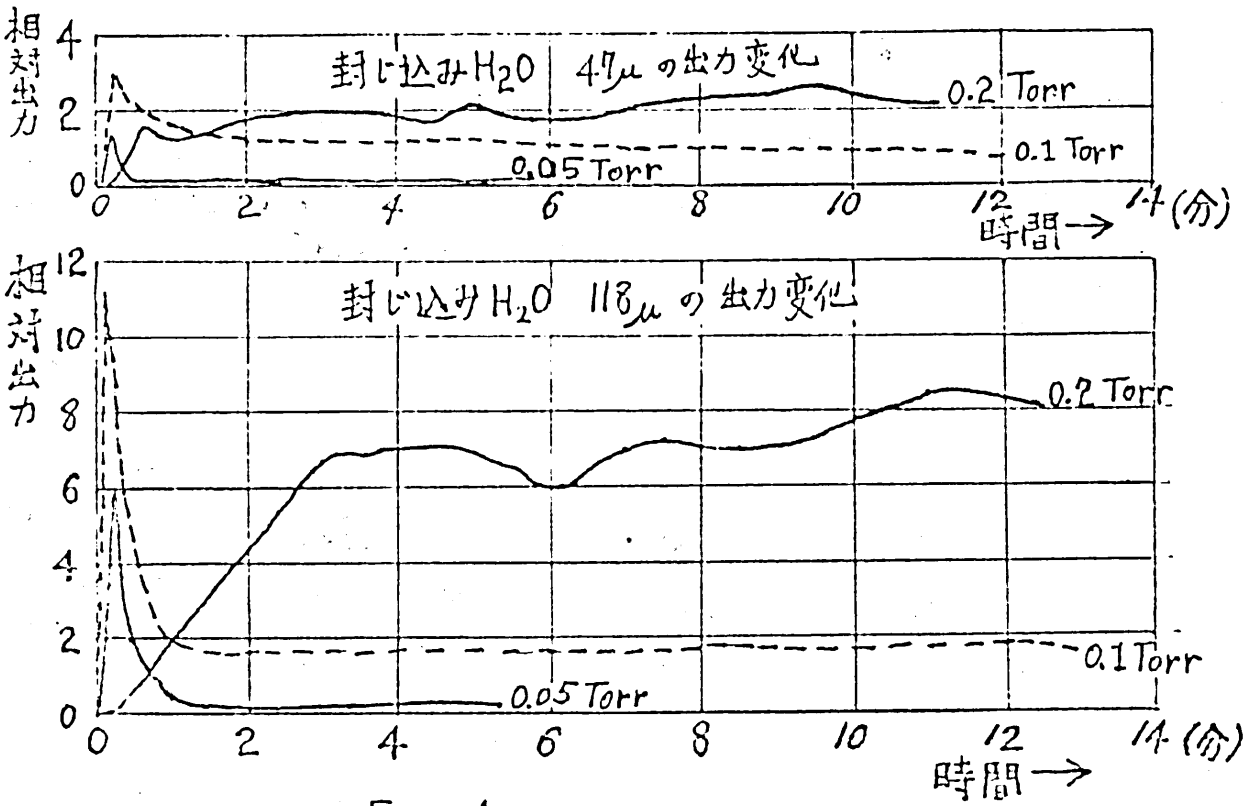



Fig. 4

## (Ⅱ) $H_2 + n\Delta O_2$, $O_2 + n\Delta H_2$ による発振特性.

(a) $H_2$ を 0.2 Torr 封入後, 放電を加える。発振しない. 管内圧力も変化しない。次に $\Delta O_2$ を 0.02 ~ 0.05 Torr で順次加えてゆく.

(b) $O_2$ を 0.2 Torr 封入後, 放電を加える. 発振しない. 管内圧力も変化しない。次に $\Delta H_2$ を 0.02 ~ 0.05 Torr で順次加えてゆく.

(a), (b) について, 発振出力変化及び管内圧力変化を 47μm, 118μm について測定した結果を Table.1 と Fig.5, Fig.6, Fig.7, Fig.8, に示す.

ここで, Fig.5, Fig.6 で $\Delta O_2$ による出力の印は $\Delta O_2$ を加えた直後のオーバルスから生ずる約1秒間の爆鳴的な出力 Peak である. $\Delta H_2$ による出力の印は単なる出力 Peak である ($\Delta O_2$ より爆鳴 peak が起りにくい) この爆鳴時にも, 出力に種々の発振線を含む可能性があるが短時間の為分光は不可能である.

Table 1.

| | (a) $H_2 + n\Delta O_2$ | | (b) $O_2 + n\Delta H_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | 47μm | 118μm | 47μm | 118μm |
| Δ=0 の時 ($H_2$ or $O_2$=0.2 Torr) | no OSC<br>$P_T$=0.2 Torr | no OSC<br>$P_T$=0.2 Torr | no OSC<br>$P_T$=0.2 Torr | no OSC<br>$P_T$=0.2 Torr |
| n=1 の時 (オ1Δ量) (注①) | $\Delta O_2$=0.01 Torr<br>no OSC<br>$P_T$=0.19 Torr に減 | $\Delta O_2$=0.03 Torr<br>OSC 開始<br>$P_T$=0.19 Torr に減 | $\Delta H_2$=0.05 Torr<br>no OSC<br>$P_T$=0.21 Torr に減 | $\Delta H_2$=0.02 Torr<br>no OSC<br>$P_T$=0.2 Torr に減 |
| 発振開始 (注②) | $\Sigma\Delta O_2$=0.03 Torr<br>$P_T$=0.2 Torr<br>$H_2$:$\Sigma\Delta O_2$=2:0.3 | $\Sigma\Delta O_2$=0.03 Torr<br>$P_T$=0.19 Torr<br>$H_2$:$\Sigma\Delta O_2$=2:0.3 | $\Sigma\Delta H_2$=0.09 Torr 以下<br>$P_T$=0.21 Torr<br>$\Sigma\Delta H_2$:$O_2$=0.9:2 | $\Sigma\Delta H_2$=0.07 Torr<br>$P_T$=0.22 Torr<br>$\Sigma\Delta H_2$:$O_2$=0.7:2.2 |
| 出力最大の時 (注③) | $\Sigma\Delta O_2$=0.1 Torr<br>$P_T$=0.22 Torr<br>$H_2$:$\Sigma\Delta O_2$=2:1 | $\Sigma\Delta O_2$=0.09 Torr<br>$P_T$=0.21 Torr<br>$H_2$:$\Sigma\Delta O_2$=2:0.9 | $\Sigma\Delta H_2$=0.29 Torr<br>$P_T$=0.31 Torr<br>$\Sigma\Delta H_2$:$O_2$=2.9:2 | $\Sigma\Delta H_2$=0.23 Torr<br>$P_T$=0.30 Torr<br>$\Sigma\Delta H_2$:$O_2$=2.3:2 |
| 発振停止 | $\Sigma\Delta O_2$=0.51 Torr<br>$P_T$=0.60 Torr<br>$H_2$:$\Sigma\Delta O_2$=2:5.1 | $\Sigma\Delta O_2$=0.50 Torr<br>$P_T$=0.60 Torr<br>$H_2$:$\Sigma\Delta O_2$=2:5.0 | $\Sigma\Delta H_2$=0.44 Torr<br>$P_T$=0.45 Torr<br>$\Sigma\Delta H_2$:$O_2$=4.4:2 | $\Sigma\Delta H_2$=0.45 Torr<br>$P_T$=0.50 Torr<br>$\Sigma\Delta H_2$:$O_2$=4.5:2 |

- $P_T$ : 定常状態での管内全圧力
- 注① : オ1 $\Delta O_2$ の操作により初期の全圧 0.2 Torr より減圧する.
- 注② : 発振開始は 47μm, 118μm 共同じΔ量及び同じ全圧力であると見なせる.
- 注③ : $\Delta O_2$ による最大出力は $\Sigma\Delta O_2$=0.1 Torr or 0.09 Torr の時で丁度 $H_2O$ になる割合である.

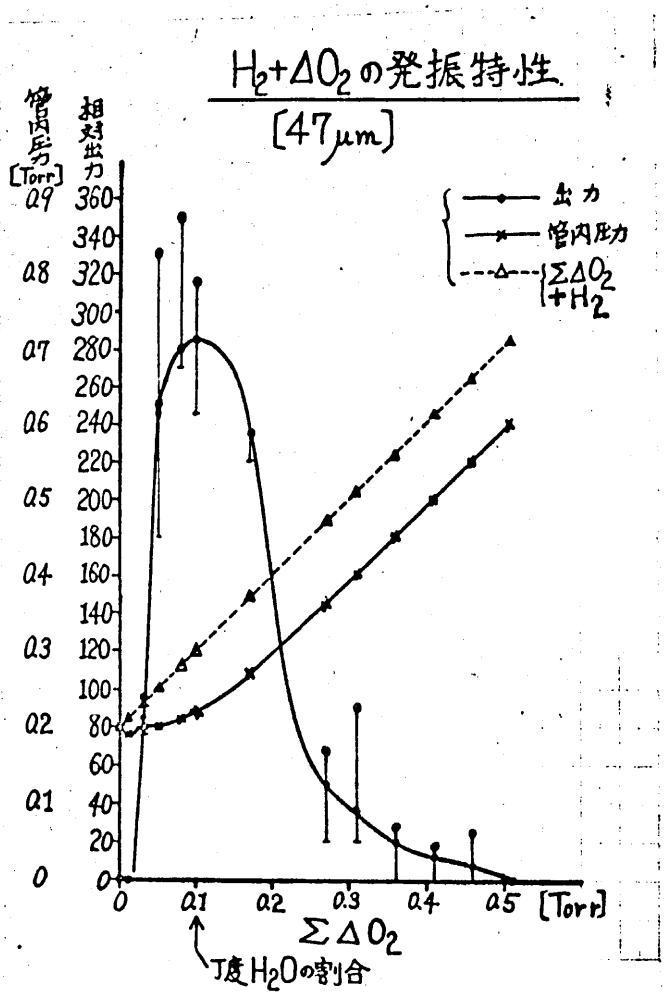



Fig. 5

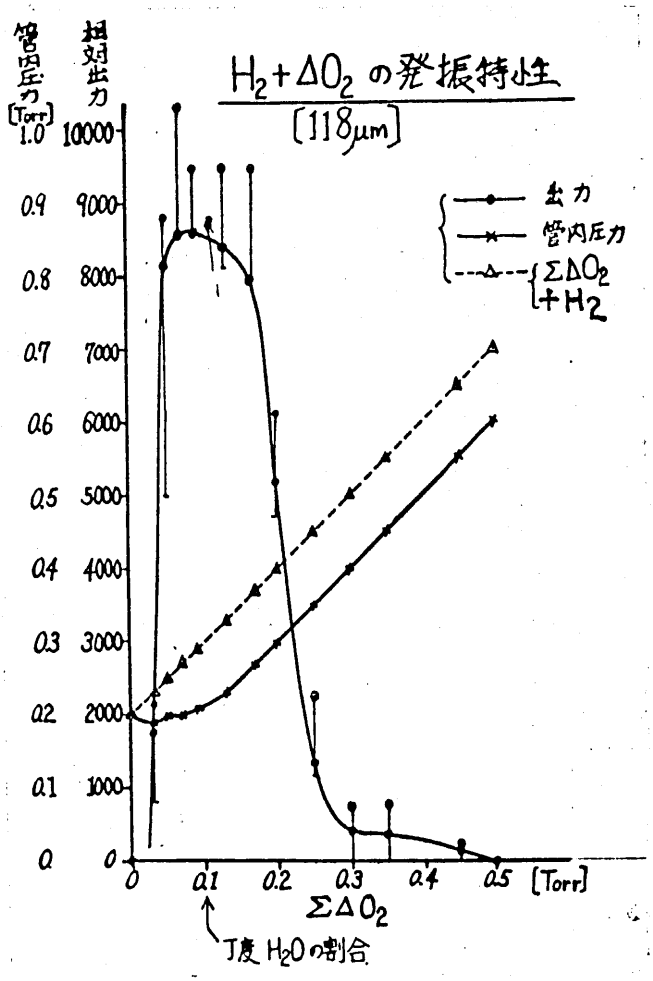



Fig. 6

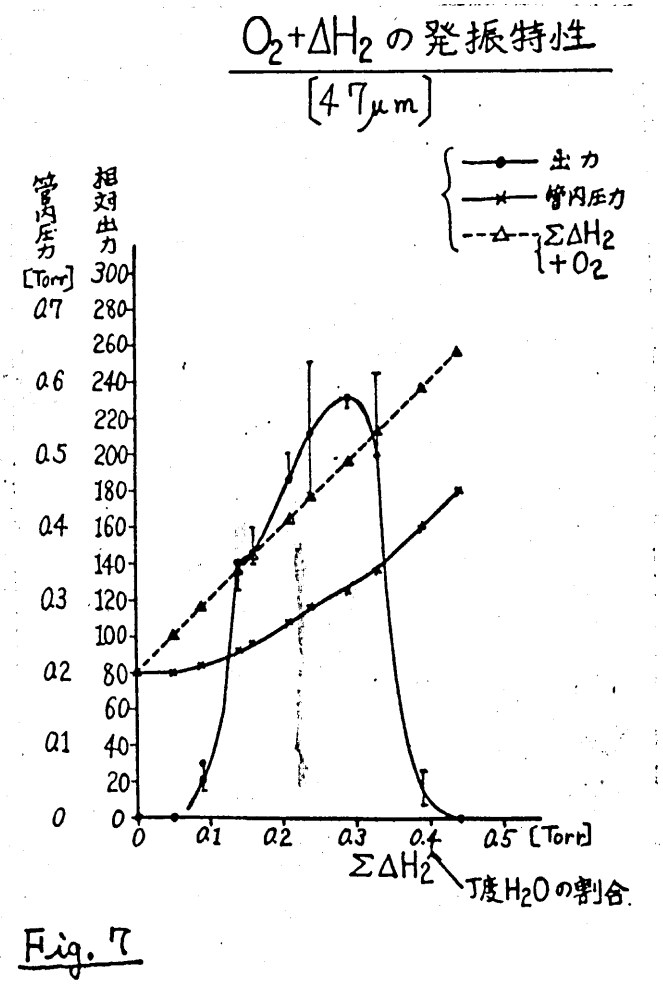



Fig. 7

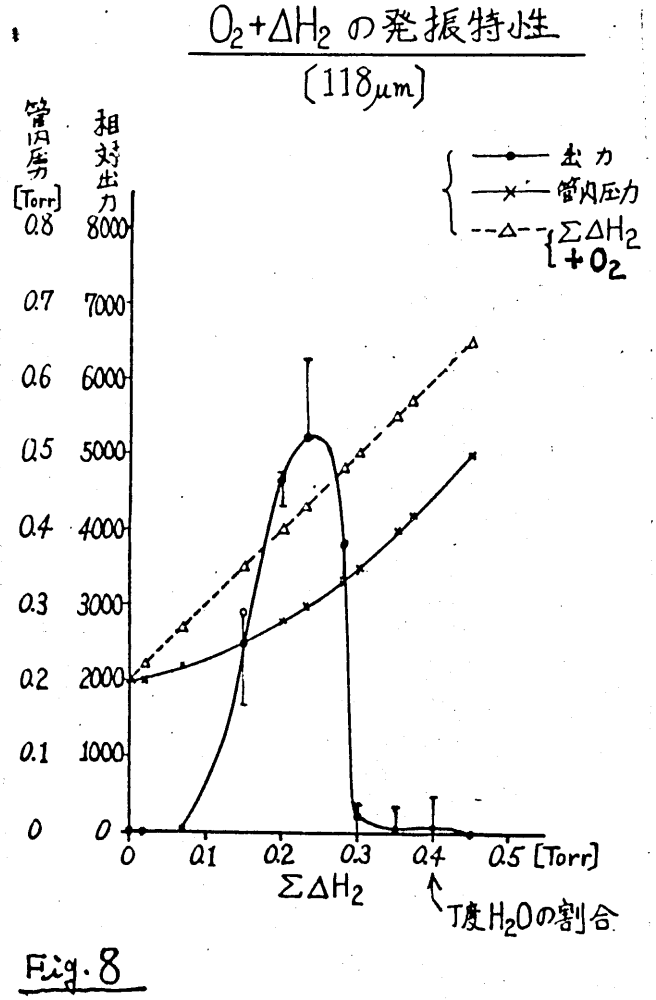



Fig. 8

## (Ⅲ) $H_2+n\Delta O_2$, $O_2+n\Delta H_2$ による $\Delta Power/\Delta O_2$, $\Delta Power/\Delta H_2$ の特性

(Ⅱ)の測定データーをもとにて, $\Delta O_2$, $\Delta H_2$ による $\Delta Power/\Delta O_2$, $\Delta Power/\Delta H_2$ の特性を 47μm, 118μm について求めた。その結果を Fig.9, Fig.10, Fig.11, Fig.12 に示す.

### (a) $H_2+n\Delta O_2$ の場合

47μm, 118μm 共 出力の Peak となる所, 即ち $\Delta Power/\Delta O_2$ が 0 となる所の $\Sigma\Delta O_2$ は $H_2:O_2$ が丁度 $H_2O$ の割合の所である. 又, 47μm, 118μm の特性は出力の強弱はあるが, 同じ形状であると見なせる.

### (b) $O_2+n\Delta H_2$ の場合

47μm, 118μm 共 $H_2:O_2$ が丁度 $H_2O$ の割合になる $\Sigma\Delta H_2$ は 0.4 Torr と高圧になり. Pressure Quenching を起こしていると考えられる.

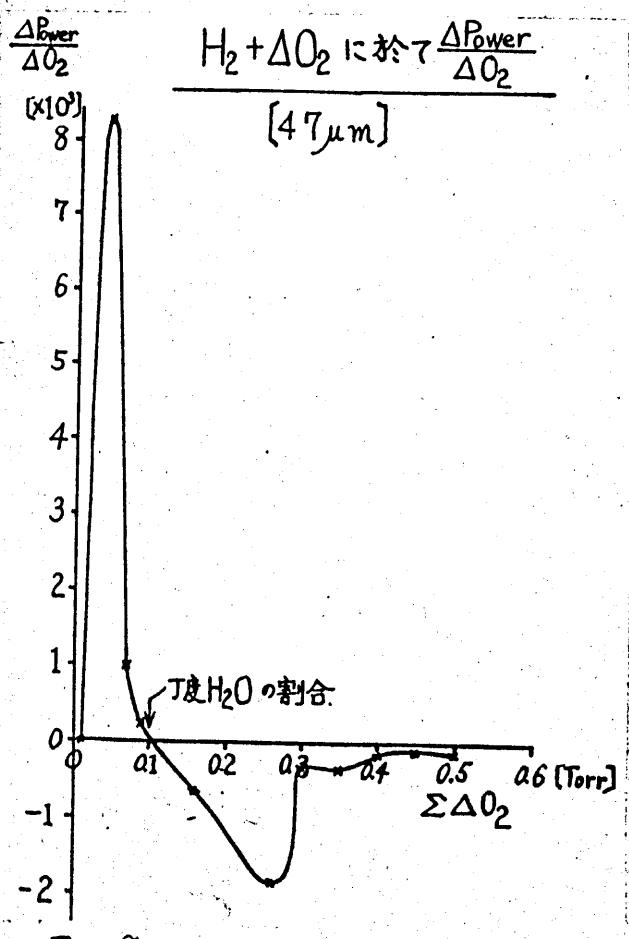



Fig.9

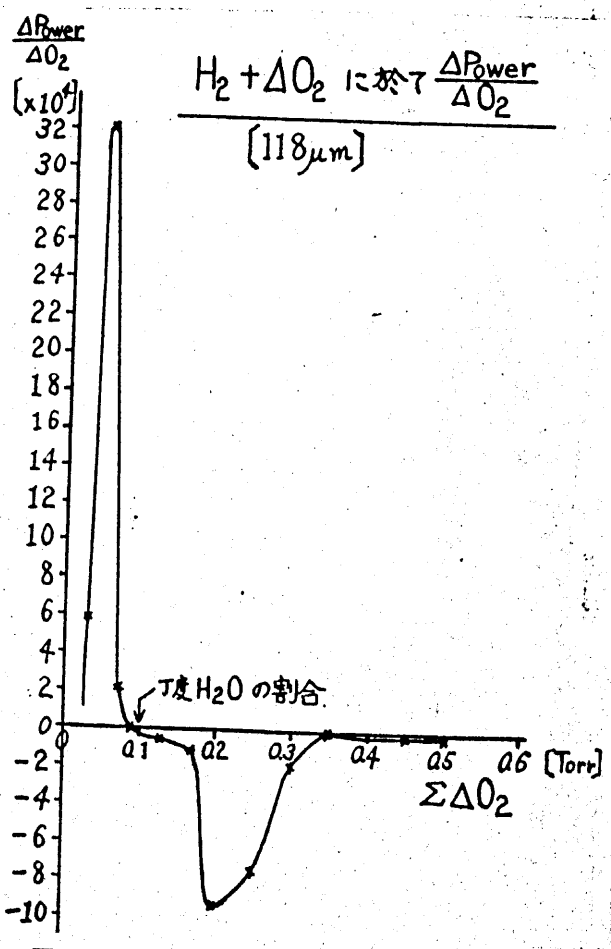



Fig. 10

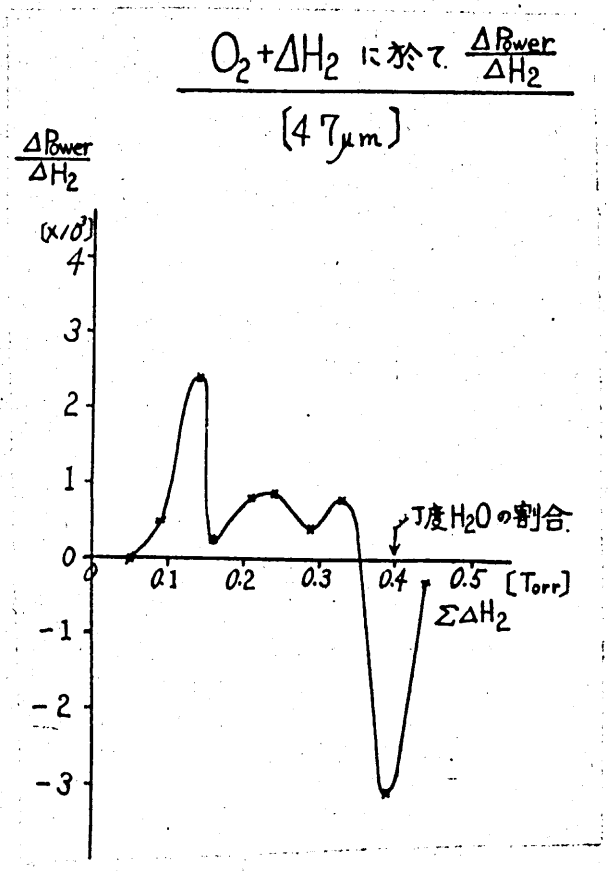



Fig. 11

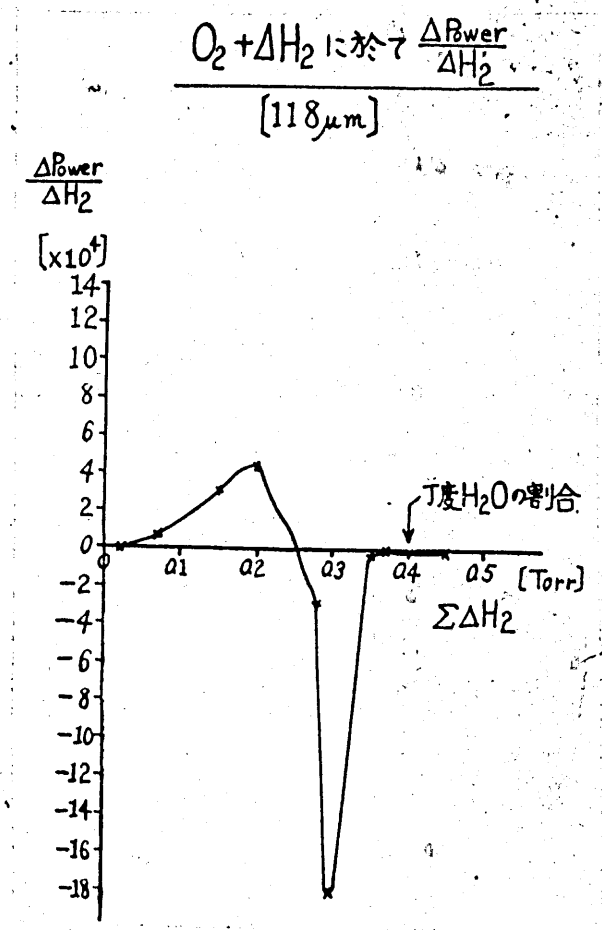



Fig. 12

## (Ⅳ) $H_2+O_2$ の混合比による発振特性

$\alpha H_2+\beta O_2$ ($\alpha,\beta=1,2,3,\cdots$) を全管内圧力 0.35 Torr 一定で封入し、放電を加える。その時の全出力（47μm, 118μm等の全出力）及び管内圧力の時間的変化を Fig. 13, Fig. 14 に示す。（この出力のほとんどは 118μm で 47μm は 118μm の約 1/25 で微弱出力として 220μm がある）

放電開始後、約25秒で出る爆鳴的な出力 $P_{eak_2}$ は $H_2:O_2=2:1$ の時最大である。爆鳴以後の出力は $H_2:O_2=3:1$ の時、最大で、大きく波打ちながら減少し、2:1 の出力に近づく。$H_2:O_2=1:3$, 1:1, 4:1, 6:1 は $H_2:O_2=2:1$ の出力より小さくなってゆく。出力のゆらぎには数10秒の短い周期の部分と数分～5分程度の長い周期の部分がある。管内圧力は放電開始後、初期圧力より減少する。この減少過程に於て、爆鳴的な出力 $P_{eak_2}$ を生ずる。ある一定圧力迄減圧すると、それ以後の管内圧力の大きな変動は認められない。$H_2:O_2=2:1$ の時、0.21 Torr 迄減圧する。これは、ほぼ $H_2O$ になる割合の圧力である。他の混合比では、これ以下には減圧しない。

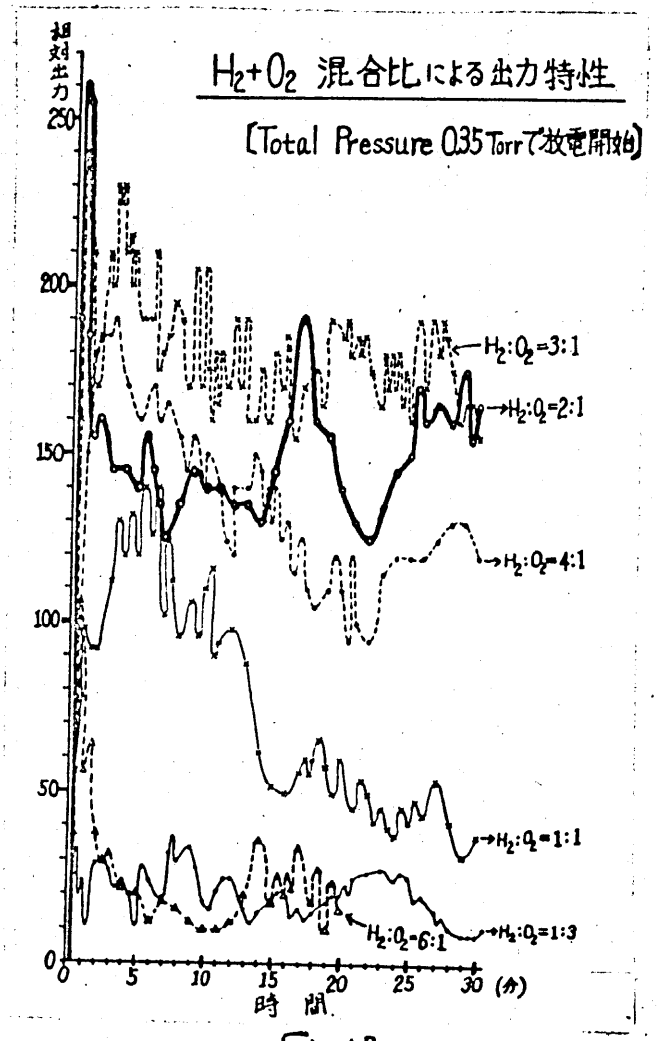



Fig.13

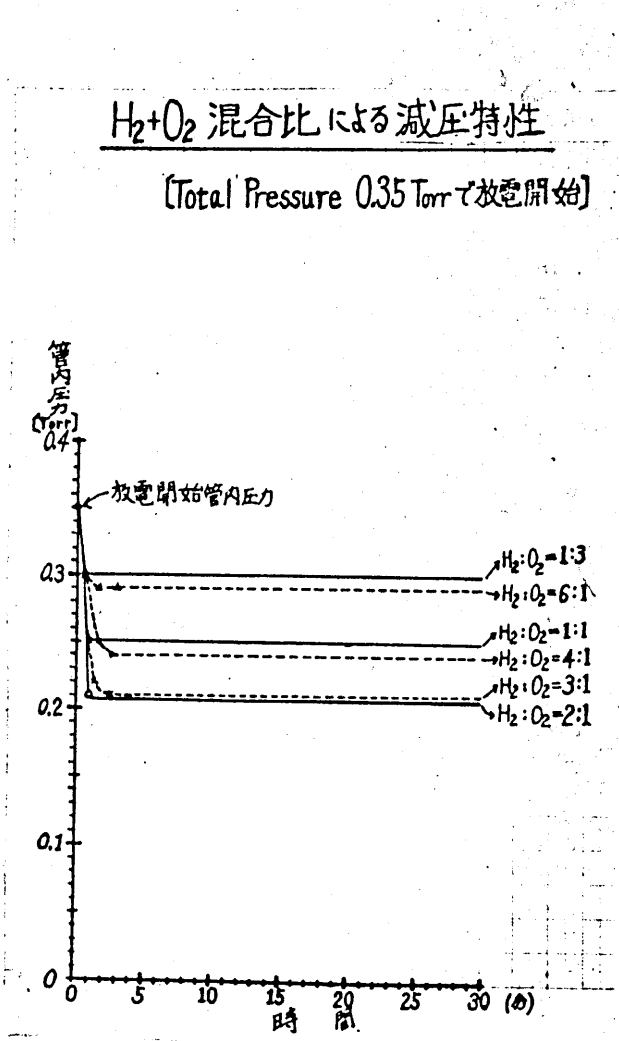



Fig. 14

## (V) $D_2+O_2$ の混合比による 84μm の発振特性

$D_2+O_2$ を分圧比 3:1, 2:1, 1:1, 1:2 で混合, 管内全圧力 0.35 Torr 一定で封入し, 放電を加える。約25秒後に発振を開始する. その時の 84μm の出力の時間変化を Fig. 15 に示す. 又、$D_2+O_2$ の 84μm 出力とその原組成の関係を知る為に, 放電開始後2分以内の第1 peakの出力及び放電後10分経過迄での出力を各混合比で plot したものを Fig. 16 に示す. これより $D_2:O_2$ が丁度 2:1 の時最大出力になる.

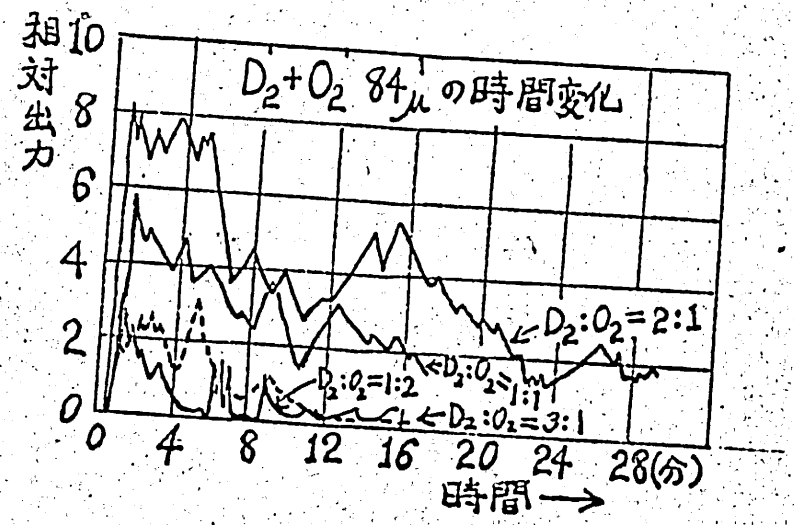

相対出力
$D_2+O_2$ 84μ の時間変化
$D_2:O_2=2:1$
$D_2:O_2=1:2$
$D_2:O_2=1:1$
$D_2:O_2=3:1$
時間 →
0 4 8 12 16 20 24 28(分)
0 2 4 6 8 10

Fig. 15

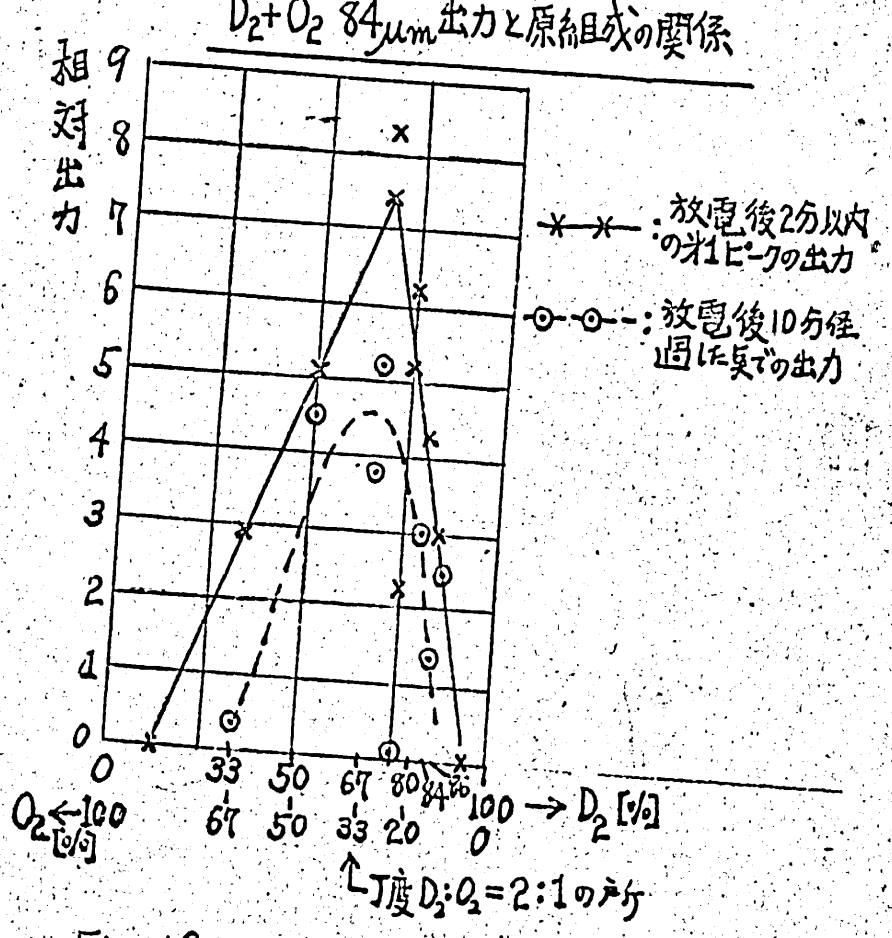

$D_2+O_2$ 84μm出力と原組成の関係
相対出力
×—×—：放電後2分以内の第1ピークの出力
⊙—⊙—：放電後10分経過した点での出力
$O_2$ ← 100 67 50 33 20 0 [%] → $D_2$ [%]
0 33 50 67 80 84 86 100
↑丁度 $D_2:O_2=2:1$ の所

Fig. 16

## (VI) $H_2O$, $H_2+O_2$ レーザー発振の圧力ー出力特性

$H_2O$ 気体 0.6 Torr 封入後 放電を加え，数分後より徐々に排気してゆく。又、$H_2+O_2$ を 2:1 の分圧比で全管内圧力 0.6 Torr 封入後 放電を加え，同じく数分後より徐々に排気してゆく。118μm に対する，その時の 圧力ー出力 特性を Fig. 17，Fig. 18 に示す。

$H_2+O_2$ は $H_2O$ に比べて非常に広い圧力範囲で発振する事がわかる。

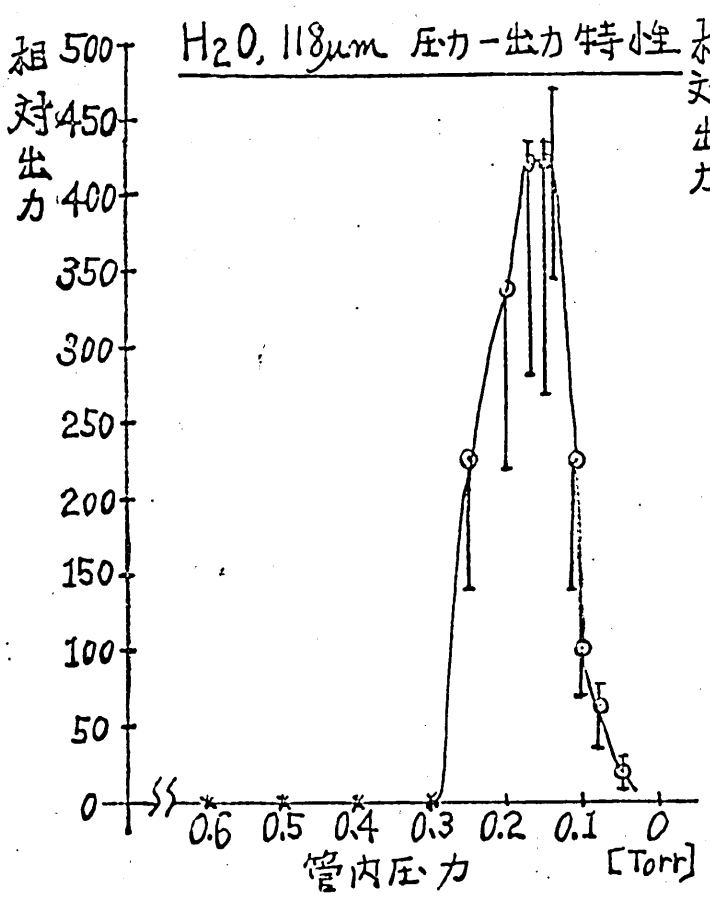



Fig. 17

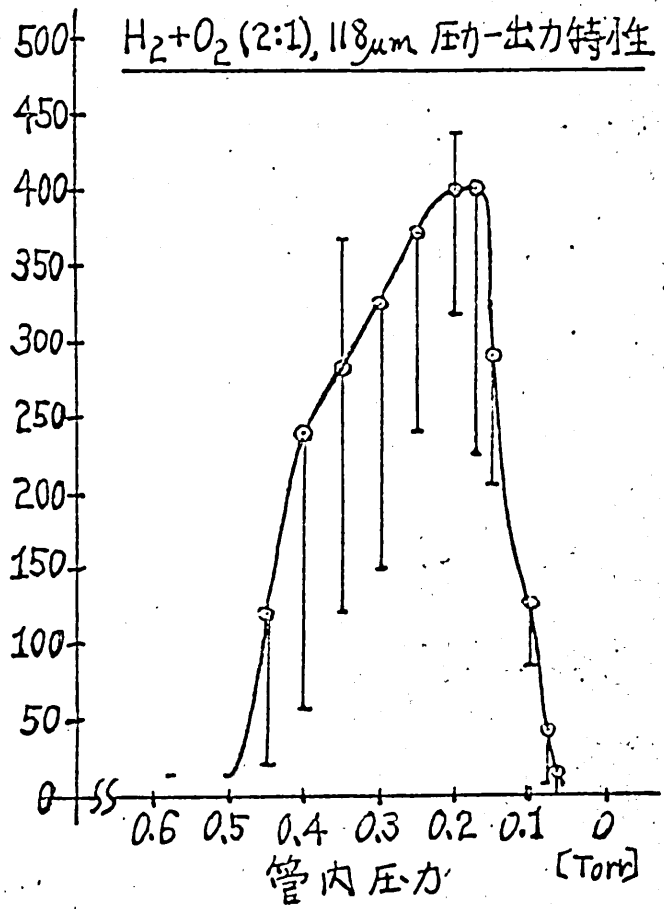



Fig. 18

## §.5. 検討

§.4 の実験より，47μm の発振と 118μm の発振は同時に起り，出力に強弱はあるが，増減の特性は全く同じであるから両者の間に Cascade 関係がある事が想像される．

又，$H_2+O_2$ による発振では．酸・水素混合気体の燃焼，爆鳴反応の過程によって，$H_2O$ に放電を加えた時よりも，多量の励起種が得られると考えられ，それ等がレーザー動作に大きな影響を与えると想像出来る．

### (i) 管内の燃焼反応 (17)

$H_2$ は

$$H_2 + e^-(4.496\,eV) = 2H \quad \text{——①}$$

により，解離して，原子 H が出来る．これが管内の $O_2$ と衝突して

$$H + O_2 = HO_2 \quad \text{——②}$$

となる

$HO_2$ は不安定で，すぐ未反応 $H_2$ と衝突して反応する．

$$HO_2 + H_2 = H_2O_2 + H \quad \text{——③}$$

$$HO_2 + H_2 = H_2O + OH \quad \text{——④}$$

$H_2O_2$ の分解： $2H_2O_2 = 2H_2O + O_2$ ——⑤

OH の反応： $OH + H_2 = H_2O + H$ ——⑥

もし，ここで，$H_2+O_2$ を flow にすると ③，⑥ の H が ② にもどり，連鎖反応により ④，⑤，⑥ 内の励起 $H_2O$ を生じるだろう．その結果，持続する高出力が期待出来る．

しかし．現在，この大径レーザー管の排気系が貧弱な為，flow method を適応しがたい．だが，封じ込みの場合も放電開始直後この連鎖は起こるはずである．

§.4. の実験の結果 $H_2+O_2$ の発振には，出力が時間的に大きくゆらぎ，又．発振する圧力範囲が広い等 $H_2O$ による発振と，くらべて，長時間にわたり．種々の差異がある．これは．大径管である為に管壁分子の管壁との衝突確率が小さく．wall effect が，き

にくく，③，⑥のHの一部が②にもどる事も起り得る．又，④，⑤，⑥で生じた$H_2O$の一部に再解離するものもあって，なかなか最終安定生成分子$H_2O$になりきらないのではないかと考えられる．

## (ii) 酸・水素爆鳴反応 (17)

酸・水素の爆鳴反応の時は，上記(i)の反応と平行して．

$$H + O_2 = OH + O \quad \text{——⑦}$$
$$O + H_2 = OH + H \quad \text{——⑧}$$
$$OH + H_2 = H_2O + H \quad \text{——⑨}$$

の反応が含まれるはずである．この低圧爆発の起る範囲は4～40 Torrである事が知られている．我々の場合初期圧力1 Torr以下で実験を行っているが，爆発にはいたらない低圧に於ても，レーザー出力には，短時間の特に大きい出力が得られる場合がある．これは，放電により生じた励起種の存在が爆鳴を起しやすい条件を作っていると考えられる．例えば，$H_2 : O_2 = 2:1$で$H_2O$では発振しない管内圧力である0.5 Torrを封入して，放電を加えると，減圧してゆく．そして，Fig. 19に示す如く放電開始後約20秒して，爆鳴的な出力Peakが得られる．(約その20秒後にno. OSC.がsmall OSC.になる．爆鳴後の出力はこの状態ではPressure Quenchingを起している．だから，排気してゆくと，出力は増大する)

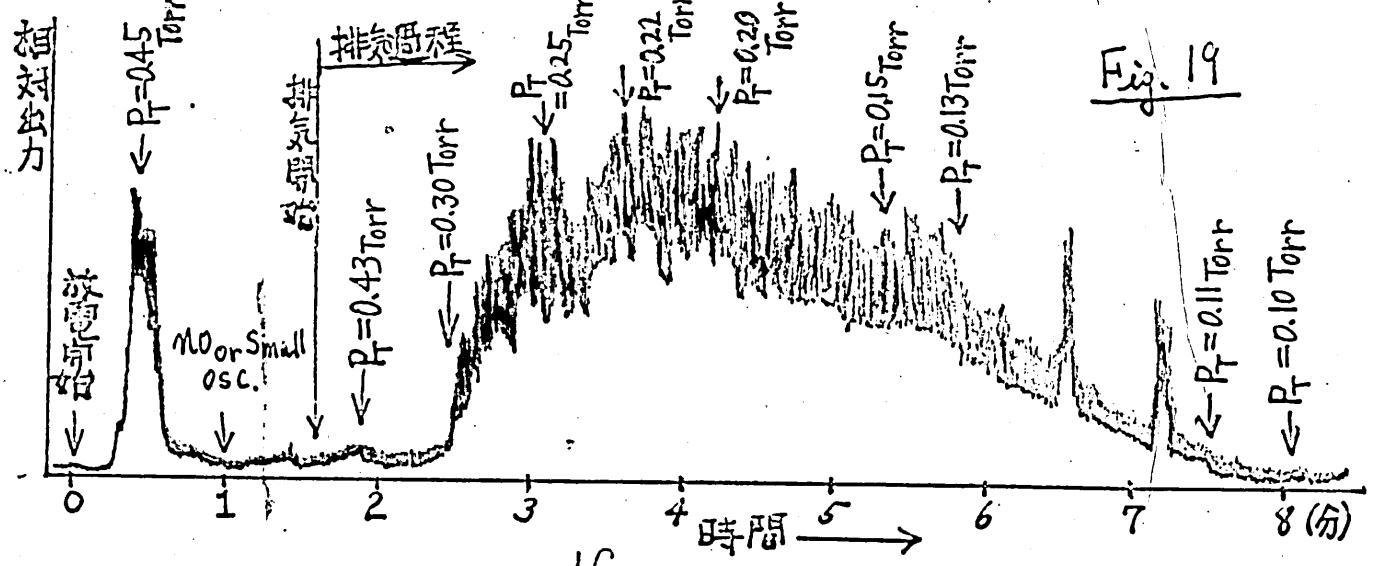



Fig. 19

又. $H_2+n\Delta O_2$ の実験に於て, $\Delta O_2$ により, 加えた直後一発目のパルスから約1秒の爆鳴的な出力を生ずる事がある ($\Delta H_2$ の場合は $\Delta O_2$ の場合より起こりにくい) Δ量による爆鳴的な出力 Peak の生じ方は. Δ量の加え方, 電圧, 電流, 電極の具合, ガスの全圧及び成分によって異なる。

[参照文献]


(1) A. Crocker, H.A. Gebbie, M.F. Kimith and L.E.S. Mathias: "Stimulated Emission in the Far Infra-red" Nature 201 (1964) 250

(2) H.A. Gebbie, N.W.B. Stone, F.D. Findlay and J.A. Robb; "Interferometric Observations on Far Infra-red Stimulated Emission Sources" Nature 202 (1964) 169

(3) L.E.S. Mathias and A. Crocker; "Stimulated Emission in the Far Infra-red from Water Vapor and Deuterium Oxide Discharges" Physics Letters 13 (1964) 35

(4) W.W. Müller and G.T. Flesher; "Continuous Wave Submillimeter Oscillation in $H_2O$, $D_2O$, and $CH_3CN$" Applied Physics Letters 8 (1966) 217

(5) W.Q. Jeffers and P.D. Coleman; "The Far Infrared Stimulated Emission Spectrum of $D_2O$" Proc. IEEE 55 (1967) 1222.

(6) T. Kasuya, A. Minoh and K. Shinoda; "A New Laser Emission from Deuterium Oxide Vapor" J. Phys. Soc. Japan 25 (1968) 1201

(7) M.A. Pollack, T.J. Bridges, and W.J. Tomlinson: "Competitive and Cascade Coupling Between Transitions in the CW Water Vapor Laser" Applied Physics Letters 10 (1967) 253.

(8) W.J. Witteman and R. Bleekrode: "Pulsed and Continuous Molecular Far Infrared Gas Laser" Physics Letters 13 (1964) 126.

(9) W.J. Tomlinson, M.A. Pollack and R.L. Fork: "Zeeman Effect Studies of the Water-Vapor Laser Oscillating on the 118.65μm Transition" Applied Physics Letters 11 (1967) 150.

(10) W.Q. Jeffers and P.D. Coleman: "Spiking and Time Behavior of a Pulsed Water-Vapor Laser" Applied Physics Letters 10 (1967) 7.

(11) M.A. Pollack, T.J. Bridges, and A.R. Strnad: "Central Tuning Dips in a Submillimeter Molecular Laser" Applied Physics Letters 10 (1967) 182.

(12) D.M. Gates, R.F. Calfee, D.W. Hansen, and W.S. Benedict: "Line Parameters and Computed Spectra for Water Vapor Bands at 2.7μ" N.B.S. Monograph 71. (1964)

(13) B. Hartman, B. Kleman: "On the Origin of the Water-Vapor Laser Lines." Applied Physics Letters 12 (1968) 168.

(14) W.S. Benedict: "Identification of Water-Vapor Laser Lines" Applied Physics Letters 12 (1968) 170.

(15) M.A. Pollack and W.J. Tomlinson: "Molecular Level parameters and Proposed Identifications for the CW Water-Vapor Laser." Applied Physics Letters 12 (1968) 173.

(16) 村井. 輻射科学研究会資料 "$H_2+O_2$, $D_2+O_2$ SMASER (I)" 7-28/1967

(17) K.J. Laidler "Reaction Kinetics Vol-1"; H.H. セミョーノフ "化学反応論(下)"

輻射科学研究会資料

# レンズ状媒質からなる導波系のうねり曲りに関する波動光学的考察

沢　新之輔　　熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1968年11月29日

## 1. まえがき

短ミリ波から光波領域における低損失伝送系としてガスレンズ[1]，超音波を用いた光表面波線路[2]，レンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜表面波線路[3][4]，あるいは，Stream Guide[5]等のような種々の形式の線路が提案されている．これらは通常，線路の中心軸からの距離の2乗に比例して減少するような誘電率（屈折率）分布を有するレンズ状媒質からなる導波系であると考えられている．この種の導波系のうち，直線状のものあるいは一様な円形曲りを有するものに関しては，主にガスレンズを中心として，従来から十分に検討されている．しかし，伝送方向にうねり曲りを有するものに関しては，筆者等の知るかぎりでは，正弦状のうねり曲りに関しての簡単な幾何光学的考察[6]がある以外に，詳しく検討された報告は見あたらない．

本論文では，この種の導波系において，ミリ波の円形導波管の場合と同様に，実際上，最も頻繁に起り得ると考えられるうねり曲り，すなわち，線路を一定間隔で支えたとき線路自体の重量のために生じるうねり曲りについて，波動光学的に詳しく考察した．

その結果，伝送ビーム波の中心部の軌跡のみならず従来のような幾何光学的方法[6]では得られなかった応答電磁界の表示式が得られ，また，うねり曲り部における固有姿態が求められた．

さらに，ビーム中心部の軌跡の発散条件に関して，正弦状のうねり曲りの場合[6]とは，多少異なった結果が得られた．すなわち，正弦状うねり曲りでは，うねりの周期が $2\pi/g$（$g$：媒質定数）に等しいときに限り光線の軌跡が導波系の中心軸から次第に遠ざかっていくことが知られている．

これに対し，本文のようなうねり曲りでは，線路の支持間隔 $L$ が $2\pi/g$ に

等しいときだけでなく，その整数倍$2\pi\nu/\beta$（$\nu$：正の整数）に等しいときにも，ビーム中心部の軌跡の脈動振幅が，伝送距離の増加にしたがって，入射条件とは無関係に，次第に増大していくという結果が得られた．

この結果は，ミリ波の円形導波管の場合について従来から知られている結果[7]と類似のものであると考えられ，甚だ興味深い．すなわち，本文と同じうねり曲りをもつ円形導波管では，線路の支持間隔$L$が，$TE_{01}$モードと特定の結合モードとの間のビート波長の整数倍に等しいときに，$TE_{01}$モードの全電力が，結合モードに連続的に変換されてしまい，大きな姿態変換損失を生じることが知られている．

これに対して本文のようなレンズ状媒質からなる導波系では，上述のようにビーム中心部の脈動振幅が増大していく場合には，導波系の有限な口径による回折損失が無制限に増加することになる．したがって，低損失伝送を行うためには，$L \neq 2\pi\nu/\beta$ となるように線路の支持間隔$L$を設計しておく必要があると考えられる．

## 2. うねり曲り部における波動方程式

図1に示すようなうねり曲り部を考え．線路の支持間隔を$L$とする．座標系を同図のようにえらぶ．すると，線路の中心部の$x$方向への変位量は，

$$x_0(z)=\frac{-WL^4}{24eI}\left(\frac{z}{L}\right)^2\left(1-\frac{z}{L}\right)^2 \qquad (1)$$

で与えられる．ここで，$W$，$e$，および$I$は，それぞれ，線路の単位長当りの重さ，弾性係数，および慣性能率を表わす．

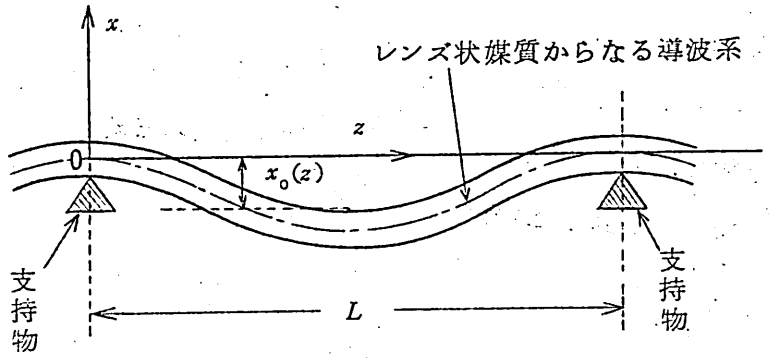



図1　レンズ状媒質からなる導波系の
うねり曲り

式(1)は，$0 \leqq Z \leqq L$ なる区間において，つぎのような Fourier 級数に展開することができる。[8]

$$x_0(z) = -p \left[ \frac{1}{30} - \frac{3}{\pi^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} \cos\left(\frac{2\pi\nu z}{L}\right) \right] \qquad (2)$$

ただし，

$$p = WL^4/24\,eI \qquad (3)$$

レンズ状媒質の誘電率分布として，誘電率が線路の中心軸からの距離の2乗に比例して減少するような分布を仮定すると，うねり曲りの方向を $x$ 方向としているから，導波系の誘電率分は，

$$\varepsilon(x,y,z) = \varepsilon(o) \cdot \left[ 1 - g^2 \{ (x - x_0(z))^2 + y^2 \} \right] \qquad (4)$$

なる式で表わされる．ただし，$g$は，誘電率の変化率を定める媒質定数であり，$\varepsilon(o)$は，線路の中心（$x=x_0(z)$，$y=o$）における誘電率を表わす．

さらに，うねり曲りの程度は，

$$g^2 x_0^{\,2}(z) \ll 1 \qquad (5)$$

を満足する程度に小さいとする．すると，このようなレンズ状媒質内の電磁界は，近似的に，つぎのスカラー波動方程式を満足する．[9]

$$\Delta V + k^2(x,y,z)V = \qquad (6)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ k^2(x,y,z) &= \omega^2\mu\varepsilon(x,y,z) = k^2(o)\left[1-g^2\left\{(x-x_0(z))^2+y^2\right\}\right] \qquad (7) \\ k^2(o) &= \omega^2\mu\varepsilon(o) \end{aligned}\right\}$$

である．

式（6）における$k^2(x,y,z)$は，式（5）が成立するとき，$z$方向に対しきわめてゆるやかに変化する．そこで，$z$方向に伝播する光ビームの電磁界を，準平面波と考えて，

$$V = \psi(x,y,z)\ e^{-jk(o)z}$$

と表わし，分布関数$\psi(x,y,z)$は，$z$方向に対し，きわめてゆるやかに変化すると仮定する．すると，

$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right| \ll 2k(o)\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \qquad (8)$$

なる近似が成立し，波動方程式（6）において，$z$に関する2次微係数$\partial^2\psi/\partial z^2$は，無視することができる．[9]

この場合，式（7）を（6）に代入すると，断面方向に関し1次元の波動方程式は，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - j2k(o)\frac{\partial\psi}{\partial z} - g^2k^2(o)\{x-x_0(z)\}^2\psi = O \qquad (9)$$

と表わされる．

## 3. 伝送ビーム波の応答電磁界

### 3・1 ガウスビームの応答

$A(z)$, $B(z)$および$C(z)$を，それぞれ，$z$のみの関数とし，

$$\psi(x,z) = exp\{A(z)x^2 + B(z)x + C(z)\} \qquad (10)$$

とおいて，波動方程式（9）に代入し，$x$の各べキの係数を，それぞれ，零とおくと，

$$\begin{cases} j2k(o)\cdot\dfrac{dA(z)}{dz} = 4A^2(z) - g^2k^2(o) & (11) \\ j2k(o)\cdot\dfrac{dB(z)}{dz} = 4A(z)B(z) + 2g^2k^2(o)x_0(z) & (12) \\ j2k(o)\cdot\dfrac{dC(z)}{dz} = B^2(z) + 2A(z) - g^2k^2(o)x_0^2(z) & (13) \end{cases}$$

なる連立微分方程式が得られる．式（11）～（13）を解くと，

$$A(z) = \frac{gk(o)}{2} \cdot \frac{e^{jgz} + ae^{-jgz}}{e^{jgz} - ae^{-jgz}} \qquad (14)$$

$$B(z) = \frac{1}{e^{jgz} - ae^{-jgz}} \left\{ b - jg^2k(o) \int \left( e^{jgz} - ae^{-jgz} \right) x_0(z)\, dz \right\} \qquad (15)$$

$$C(z) = \gamma - \frac{1}{2} ln \left( e^{jgz} - ae^{-jgz} \right) - \frac{j}{2k(o)} \int \left\{ B^2(z) - g^2k^2(o) x_0^2(z) \right\} dz \qquad (16)$$

となる．ここで，$a$，$b$，および$\gamma$は，それぞれ，$A(z)$,$B(z)$および$C(z)$の初期値によって定まる積分定数である．

うねり曲り部への入射点，$z = o$において，$1/s^2$なる波面係数をもち，かつ，$x$方向に$\delta(o)$なる軸ずれと$\delta'(o)$なる傾きとをもつガウス波

$$\psi(x, o) = exp \left\{ -\frac{1}{2s^2} (x - \delta(o))^2 - j \frac{\delta'(o)}{gw_0^2} x \right\} \qquad (17)$$

ただし，
$$w_0 = 1 \Big/ \sqrt{gk(o)} \qquad (18)$$

を仮定して，積分定数，$a$，$b$および$\gamma$を決定し，式(14)～(16)をそれぞれ変形していくと，$A(z)$，$B(z)$および$C(z)$は，それぞれつぎのようになる．

$$\begin{cases} A(z) = -\dfrac{1}{2s^2}\left(\dfrac{\cos\vartheta z - j\dfrac{s^2}{w_0^2}\sin\vartheta z}{\cos\vartheta z - j\dfrac{w_0^2}{s^2}\sin\vartheta z}\right) & (19) \\ B(z) = -2A(z)\,\delta(z) - j\dfrac{\delta'(z)}{\vartheta w_0^2} & (20) \\ C(z) = A(z)\,\delta^2(z) + j\dfrac{1}{2\vartheta w_0^2}\left(\delta(z)\delta'(z) - \delta(o)\delta'(o)\right) \\ \qquad -\dfrac{1}{2}ln\left(\cos\vartheta z - j\dfrac{w_0^2}{s^2}\sin\vartheta z\right) - j\dfrac{\vartheta}{2w_0^2}A(z) & (21) \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{cases} A(z) = 4w_0^4\int_0^z\left\{A^2(z) - \dfrac{j}{2\vartheta w_0^2}\dfrac{dA(z)}{dz}\right\}\delta^2(z)\,dz \\ \qquad + \int_0^z\left\{\dfrac{\delta(z)\delta''(z)}{\vartheta^2} - x_0^2(z)\right\}dz & (22) \\ \delta(z) = \left\{\delta(o) - \delta_c(o)\right\}\cos\vartheta z + \dfrac{\delta'(o)}{\vartheta}\sin\vartheta z + \delta_c(z) & (23) \end{cases}$$

であり，式(23)における$\delta_c(z)$は，次式で表わされる．

$$\delta c(z)=\begin{cases} -p\left\{\dfrac{1}{30}+\dfrac{3L^2\vartheta^2}{\pi^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi\nu z}{L}\right)}{\nu^4(4\pi^2\nu^2-L^2\vartheta^2)}\right\} & :\left(\vartheta\neq\dfrac{2\pi\nu}{L}\right) \quad (24) \\ -p\left\{\dfrac{1}{30}+\dfrac{3L^2\vartheta^2}{\pi^4}\sum_{\nu\neq\nu'}\dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi\nu z}{L}\right)}{\nu^4(4\pi^2\pi^2-L^2\vartheta^2)}-\dfrac{3z\sin\vartheta z}{2\nu'^4\pi^4}\right\} & :\left(\vartheta=\dfrac{2\pi\nu}{L}\right) \quad (25) \end{cases}$$

ただし，$\nu,\nu' = 1,2,3,\cdots\cdots$である．また，

$$\delta'(z)=\frac{d}{dz}\{\delta(z)\}\ ,\quad \delta'(o)=\frac{d}{dz}\{\delta(z)\}\Big|_{z=o}$$

を表わす．

式（10）に式（19）～（21）を代入すると，ガウス波の応答電磁界は，

$$E=\frac{e^{j(\omega t-k(0)z)+\frac{j}{2}\tan^{-1}\left(\frac{w_0^2}{\delta^2}\tan\vartheta z\right)}}{\sqrt[4]{\cos^2\vartheta z+\frac{w_0^4}{s^4}\sin^2\vartheta z}}\cdot\exp\left[\frac{-\left(\cos\vartheta z-j\frac{s^2}{w_0^2}\sin\vartheta z\right)}{2s^2\left(\cos\vartheta z-j\frac{w_0^2}{s^2}\sin\vartheta z\right)}\right.$$

$$\left.\cdot\left\{x-\delta(z)\right\}^2-j\frac{\delta'(z)}{2\vartheta w_0^2}\left\{2x-\delta(z)\right\}-j\frac{\delta(o)\delta'(o)}{2\vartheta w_0^2}\right]$$

$$(O\leqq z\leqq L) \qquad (26)$$

となる．ただし，式（26）では，$\vartheta\lambda_0\ll 1$ [1),(3),(4),(10)]（$\lambda_0$：自由空間波長）および式（8）の近似[9]のもとで高次の微少量となる式（21）の最後の項に対応する指数項は省略してある．

なお，式（24）あるいは（25）において，$p \to o$ とおくと，$\delta c(z) \to o$ となるから，式（23）から明らかなように，式（26）は，直線状導波系におけるガウス波の一般的応答電磁界を表わす式[10]に完全に一致する．

3・2　高次姿態の応答

3・2・1　直線部分の Normal Mode（$s = w_0$）のうねり曲り部における応答

$$\psi(x,z) = Hn\left(Dx + F(z)\right) \cdot \exp\left[Ax^2 + B(z)\,x + C(z)\right] \quad (27)$$

とおく．ここで，$A$ および $D$ は定数とし，$B(z)$，$C(z)$ および $F(z)$ は $z$ のみの関数とする．また $H_n(x)$ は $n$ 次の Hermite 多項式を表わすものとする．

式（27）を波動方程式（9）に代入し，$x$ の各ベキの係数をそれぞれ零とおいて得られる $A$，$B(z)$，$C(z)$，$D$ および $F(z)$ に関する連立微分方程式を解き，入射ビームとして

$$\psi(x,o) = H_n\left[\frac{x-\delta(o)}{w_0}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\{x-\delta(o)\}^2}{2w^2} - j\frac{\delta'(o)}{\mathcal{G}w_0^2}\,x\right] \quad (28)$$

を仮定すると，$A$，$B(z)$，$C(z)$，$D$ および $F(z)$ は，それぞれ，

$$A = \frac{-1}{2w_0^2} = -\frac{1}{2\mathcal{G}k(o)} \quad (29)$$

$$B(z) = \frac{\delta(z)}{w_0^2} - j\frac{\delta'(z)}{\mathcal{G}w_0^2} \quad (30)$$

$$C(z) = j\mathcal{G}(n+1/2)\,z - \frac{\delta^2(z)}{2w_0^2} - j\frac{1}{2\mathcal{G}w_0^2}\left(\delta'(z)\delta(z) - \delta'(o)\,\delta(o)\right) \quad (31)$$

$$D = \sqrt{-2A} = 1/w_0 \tag{32}$$

$$F(z) = -\frac{1}{w_0}\delta(z) \tag{33}$$

となる．したがって，応答電磁界は，$\gamma\lambda_0 \ll 1$ および式（8）の近似のもとで

$$E_n = K_0 \, e^{j\omega t - j\{k(o) - \gamma(n+1/2)\}z} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\delta(z))^2}{2w_0^2}\right.$$

$$\left. -j\frac{\delta'(z)(2x-\delta(z))}{2\gamma w_0^2} - j\frac{\delta'(o)\delta(o)}{2\gamma w_0^2}\right] \cdot H_n\left[\frac{x-\delta(z)}{w_0}\right] \tag{34}$$

と表わされる．

ここで．$\delta(z)$ は，式（23）～（25）によって与えられる．

特別の場合として

$$\delta(0) = \delta_c(o) \text{ および } \delta'(o) = 0 \tag{35}$$

とおくと，式（23）から，

$$\delta(z) = \delta_c(z) \quad , \quad \delta'(z) = \delta'_c(z) \tag{36}$$

となり，式（34）は，

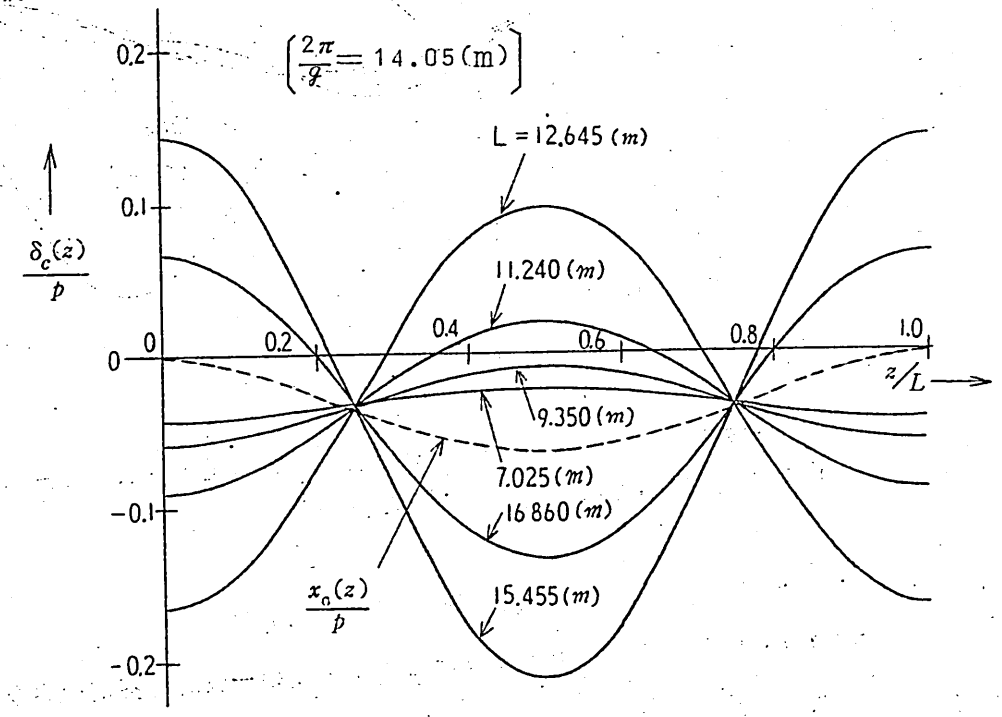
$$E_n = K_0 \, e^{j\omega t - j\{k(o) - \gamma(n+1/2)\}z} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\delta(z))^2}{2w_0^2}\right.$$

$$\left. -j\frac{\delta'_c(z)(2x-\delta_c(z))}{2\gamma w_0^2}\right] \cdot H_n\left[\frac{x-\delta_c(z)}{w_0}\right] \tag{37}$$

となる．式（37）は，うねり曲りに特有の軸ずれと傾きとを持ったビームを表わしており，特に，$\gamma \fallingdotseq 2\pi\nu/L$ なる場合には，その中心部の脈動の周期は，支持間隔 $L$ のみによって定まり，媒質定数 $\gamma$ には無関係となる．

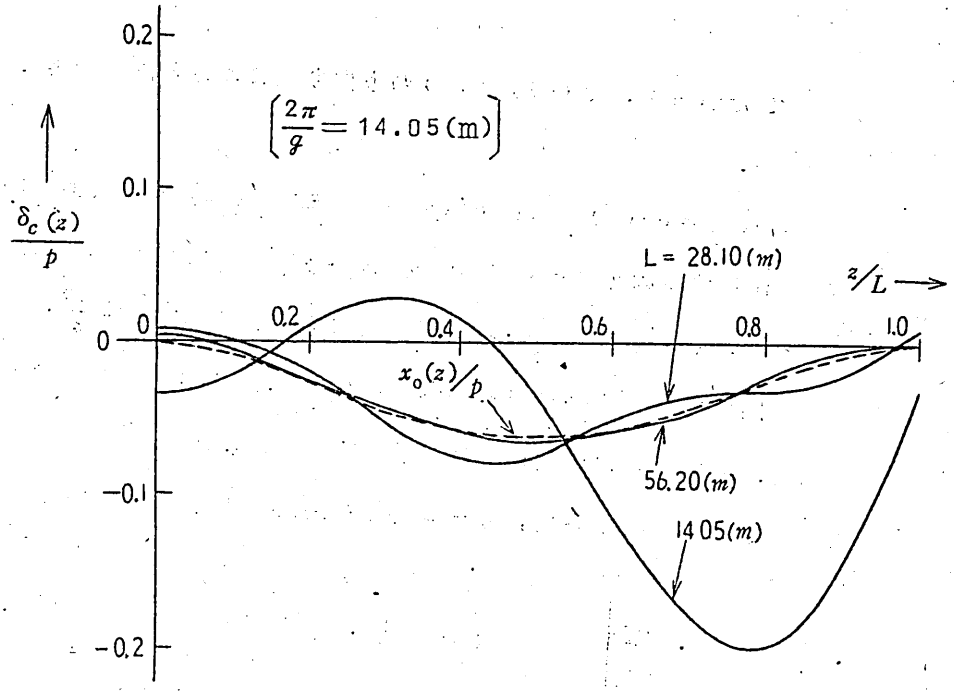
したがって，式(3·7)は，うねり曲り部における固有姿態であると考えられる．

$\delta(o)=\delta_c(o)$ および $\delta'(o)=0$ $(\equiv \delta_c'(o))$ なる入射条件（式(35)）を満足する伝送ビーム波の中心部の軌跡（$\delta(z)=\delta_c(z)$）の数値計算例を，図2の(a)（$L \fallingdotseq \frac{2\pi}{g}\cdot\nu$ なる場合）および(b)（$L=\frac{2\pi}{g}\cdot\nu$ なる場合）に示す．同図では $2\pi/g=14.05(m)$（$g^2=0.2\,m^{-2}$）とえらんであり，また，導波系の中心軸の位置を点線で示してある．これらの図から，支持間隔 $L$ と $2\pi/g$ との関係によって，ビーム波の行路は，大きく変わることがわかる．




(a)　$L \fallingdotseq \frac{2\pi}{g}\cdot\nu$ なる場合

図2　$\delta(o)=\delta_c(o)$ および $\delta'(o)=0$ なる入射条件を満足する伝送ビーム波の中心部の軌跡の数値計算例（$\nu$：正の整数）




(b)　$L=\frac{2\pi}{g}\cdot\nu$ なる場合

図2　$\delta(o)=\delta_c(o)$ および $\delta'(o)=0$ なる入射条件を満足する伝送ビーム波の中心部の軌跡の数値計算例（$\nu$：正の整数）

3・2・2　任意の波面係数をもつ高次姿態の応答

本節では，直線状ガスレンズにおけるガウス波の一般的応答電磁界を求めるのに使われた方法[10]を，うねり曲り部に拡張適用することによって，任意の波面係数をもった入射高次姿態の応答電磁界を求める．すなわち，入射電磁界を前節で求めた式（37）の固有姿態によって展開し，軸上の任意の点で再合成する方法によって応答電磁界を一般的に求める．

固有姿態，式(37)は

$$\tilde{x}=x-\delta_c(z)\ ,\ \tilde{x}_0=x-\delta_c(o) \qquad (38)$$

とおくと，

$$E_n = K_0 \cdot e^{j\omega t - j\{k(o) - g(n+1/2)\}z}$$

$$\cdot e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2w_0^2} - j\frac{\delta c'(z)}{2gw_0^2}\left(\tilde{x} + \frac{\delta c(z)}{2}\right)} \cdot H_n\left[\frac{\tilde{x}}{w_0}\right] \qquad (39)$$

と表わされる．

$z = 0$ において，入射電磁界 $E(\tilde{x} - \delta, 0)$（ただし $\delta = \delta(o) - \delta c(o)$ とする）を，式（39）によって展開したときの展開係数 $C_n$ を用いると，任意の点 $z$ における応答電磁界は，

$$E(\tilde{x}, z) = \sum_{n=o}^{\infty} C_n E_n \qquad (40)$$

によって求められる．

入射電磁界として任意の波面係数 $1/s^2$ を有する

$$E(\tilde{x}_0 - \delta, 0) = K_0 e^{-\frac{(\tilde{x} - \delta)^2}{2s^2} - j\frac{\delta'(o)}{gw_0^2}\left(\tilde{x}_0 + \delta c(o)\right)} H_n\left[\frac{\tilde{x}_0 - \delta}{s}\right] \qquad (41)$$

なる Gauss Hermite 波を考えて，式（40）を計算[11]し，式（26）あるいは（34）を得たのと同一の近似のもとで高次の微少量となる項に対応する指数項を省略すると，結局，応答電磁界は，つぎのようになる．

$$En(x,z)=\frac{Ko\ e^{j(\omega t-k(o)\ z)}}{\sqrt[4]{\cos^2\vartheta z+\frac{w_0^2}{s^4}\sin^2\vartheta z}}\ e^{j\left(n+1/2\right)\tan^{-1}\left(\frac{w_0^2}{s^2}\tan\vartheta z\right)}$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{1}{2s^2}\left(\frac{\cos\vartheta z-j\frac{s^2}{w_0^2}\sin\vartheta z}{\cos\vartheta z-j\frac{w_0^2}{s^2}\sin\vartheta z}\right)\left(x-\delta(z)\right)^2\right.$$

$$\left.-j\frac{\delta'(z)}{2\vartheta w_0^2}\left(2x-\delta(z)\right)-j\frac{\delta'(o)\delta(o)}{2\vartheta w_0^2}\right]$$

$$\cdot Hn\left[\frac{x-\delta(z)}{s\sqrt{\cos^2\vartheta z+\frac{w_0^4}{s^4}\sin^2\vartheta z}}\right] \qquad (42)$$

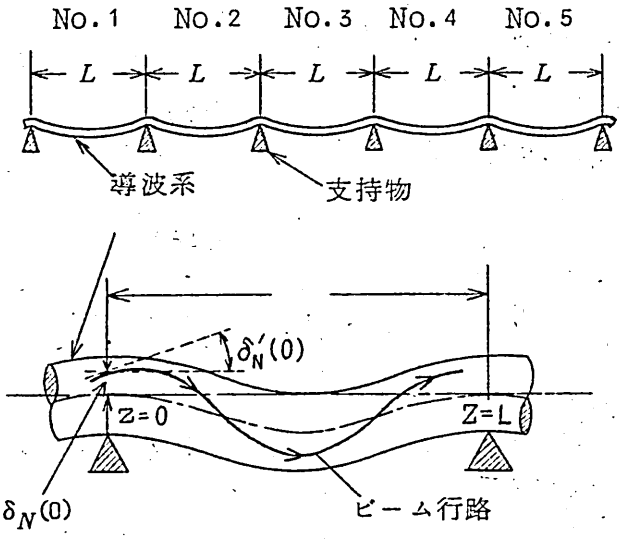
式（42）において，$s=w_0$ とおくと，前節で求めた直線部分の Normal Mode の，うねり曲り部における応答電磁界を表わす式（34）が得られる．また，$n=o$ とおくと，式（42）は，3・1節で求めたガウス波の一般的応答電磁界を表わす式（26）と一致する．

## 4. ビームの中心部の軌跡と低損失伝送条件

図3に示すように，N番目の支持区間における入射軸ずれ量および傾き量をそれぞれ，$\delta_N(o)$ および $\delta'_N(o)$ と表わすと，式（23）から，

$$\begin{aligned}\delta_N(z)&=\left\{\delta_N(o)-\delta_{cN}(o)\right\}\cos\vartheta z+\frac{\delta'_N(o)}{\vartheta}\sin\vartheta z+\delta_{cN}(z)\\ \delta'_N(z)&=-\vartheta\left\{\delta_N(o)-\delta_{cN}(o)\right\}\sin\vartheta z+\delta'_N(o)\cos\vartheta z+\delta'_{cN}(z)\end{aligned} \qquad (43)$$

なる関係が得られる．ここで，$\delta_{cN}(z)$は式(24)あるいは(25)で与えられる．




（$N$番目の支持区間）

図3　うねり曲り部におけるビーム行路

4．1　$\beta \fallingdotseq 2\pi\nu/L(\nu=1,2,\cdots\cdots\infty)$なる場合

式(43)における$\delta_{cN}(z)$は，式(24)で与えられ，$\delta'_{cN}(z)$は，

$$\delta'_{cN}(z)=\frac{3pL^2\beta^2}{\pi^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2\pi\nu}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi\nu}{L}z\right)}{\nu^4(\pi^2\nu^2-L^2\beta^2)} \tag{44}$$

となる．したがって，

$$\left.\begin{aligned}\delta_{cN}(L)&=\delta_{cN}(o)=\delta_{c(N+1)}(o)\\ \delta'_{cN}(L)&=\delta'_{cN}(o)=0\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

なる関係が成り立つ．

そこで，式(43)において，$z=L$とおき，$\delta_N(L)=\delta_{N+1}(o)$ および $\delta'_N(L)=\delta'_{N+1}(o)$ なる関係を用いると，

$$\begin{cases} \delta_{N+1}(o)=\Delta_N(o)\cos\vartheta L+\dfrac{\delta'_N(o)}{\vartheta}\sin\vartheta L+\delta_{cN}(o) & (46) \\ \delta'_{N+1}(o)=-\vartheta\Delta_N(o)\sin\vartheta L+\delta'_N(o)\cos\vartheta L & (47) \end{cases}$$

となる．ただし，　$\Delta_N(o)=\delta_N(o)-\delta_{cN}(o)$　　(48)

である．

式(45)～(48)から，$\Delta_N(o)$ に関する差分方程式

$$\Delta_{N+2}(o)-2\cos\vartheta L\cdot\Delta_{N+1}(o)+\Delta_N(o)=0 \qquad (49)$$

が得られる．この一般解を求めると，

$$\Delta_N(o)=k_1\cos N\vartheta L+k_2\sin N\vartheta L \qquad (50)$$

となる．したがって，式(45)，(48)および(50)より，

$$\delta_N(o)=k_1\cos N\vartheta L+k_2\sin N\vartheta L+\delta_{c1}(o) \qquad (51)$$

となる．また，式(46)，(50)および(51)より

$$\delta'_N(o)=-\vartheta(k_1\sin N\vartheta L-k_2\cos N\vartheta L) \qquad (52)$$

となる．

そこで，式(51)および(52)を，式(43)に代入すると，伝送ビーム波の中心部の軌跡 $\delta_N(z)$は，つぎのようになる．

$$\delta_N(z) = k_1 \cos \vartheta (NL + z) + k_2 \sin \vartheta (NL+z) + \delta_{c_1}(z) \qquad (53)$$

ここで，$k_1$および$k_2$は，初期条件，すなわち，$N=1$における$\delta_1(z)$および$\delta_1'(z)$の値によって定まる未定々数である．式（53）は，$N$（支持区間の番号が増大すると，3角関数にしたがった一定振幅の振動をくり返すことを示している．

4・2　$\vartheta = 2\pi\nu'/L$　（$\nu' = 1, 2, 3, \cdots \infty$）なる場合

式（43）における$\delta_{cN}(z)$は，式（25）で与えられるから，

$$\delta'_{cN}(z) = p \left\{ \frac{3L^2\vartheta^2}{\pi^4} \cdot \sum_{\nu \neq \nu'} \frac{\left(\frac{2\pi\nu}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi\nu z}{L}\right)}{\nu^4 \left(4\pi^2\nu^2 - L^2\vartheta^2\right)} + \frac{3}{2(\pi\nu')^4} \left(\sin\vartheta z + \vartheta z \cos\vartheta z\right) \right\} \qquad (54)$$

となる．したがって，

$$\delta'_{cN}(L) = \frac{3p\vartheta L}{2(\pi\nu')^4} \qquad (55)$$

および

$$\delta_{cN}(L) = \delta_{cN}(o) \qquad (56)$$

なる関係が成立する．

式（43）および（56）から，

$$\delta_N(o) = \delta_{N+1}(o) \qquad (57)$$

となる．また，式（43）および（55）から，

$$\delta'_N(L) \left(\equiv \delta'_{N+1}(o)\right) = \delta'_N(o) + \frac{3p\vartheta L}{2(\pi\nu')^4} \qquad (58)$$

となる．式（57）および（58）より，$\delta_N(o)$および$\delta'_N(o)$を求めると，それぞれ，

および

$$\left.\begin{aligned}\delta_N(o) &= \delta_1(o)\\ \delta_N'(o) &= \delta_1'(o) + \frac{3p\vartheta L}{2(\pi\nu')^4}(N-1)\end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

となる．したがって，ビーム中心部の軌跡を与える $\delta_N(z)$ は，式(43)に(59)を代入して，

$$\delta_N(z) = \{\delta_1(o) - \delta_{c_1}(o)\}\cos\vartheta z + \delta_{c_1}(z) + \frac{1}{\vartheta}\left\{\delta_1'(o) + \frac{3p\vartheta L}{2(\pi\nu')^4}(N-1)\right\}\sin\vartheta z \qquad (60)$$

となる．

式(60)は，支持区間の番号 $N$ の増加と共にその振幅が次第に増加していく項を含んでいる．これは，線路の支持間隔 $L$ が，$2\pi/\vartheta$ の整数倍に等しいとき，伝送距離が増加するにしたがって，ビーム中心部の軌跡の脈動振幅が，入射条件とは無関係に次第に増大していくことを示している．このとき，導波系の有限は口経による回折損失が無制限に増大していくと考えられる．

以上の結果，低損失伝送を行うためには，線路を敷設する場合，線路の支持間隔 $L$ を，$2\pi/\vartheta$ の整数倍に等しくならないように設計しなければならないことが知られる．

## 5. あ と が き

レンズ状媒質からなる導波系を等間隔で支えた場合に生じるうねり曲りについて，波動光学的に詳しく考察した．その結果，伝送ビーム波の中心部の行路のみならず，従来のような幾何光学的方法では知り得なかった応答電磁界の表示式およびうねり曲り部における固有姿態が求められた．

また，低損失伝送を行うためには，線路を敷設する場合，線路の支持間隔を，$2\pi/\beta$ の整数倍に等しくならないように設計する必要があることを示した．

本文では線路の支持間隔が等しく，かつ，うねり曲りの方向が1次元的な最も簡単な場合について考察したが，他のさらに複雑な場合に対しても，本文と同様の手法を適用することができる．

## 謝　　辞

日頃から御指導いただく本学工学部板倉清保教授に深謝する．

## 参　考　文　献

(1) D.W.Berreman:"A Lens or Light guide using convectively distorted thermal gradient in gases," B.S.T.J., 43, p1469 (July 1964).

(2) 倉内憲孝：" 超音波を用いた光表面波線路 "，昭41信学全大，427.

(3) 熊谷信昭，倉薗貞夫，沢新之輔，吉川憲昭：" 不均一誘電体薄膜表面波線路 "，信学論(B)，51－B，3，p.82 (March 1968).

(4) 熊谷信昭，沢新之輔：" 周期的なレンズ収束効果をもつ誘電体薄膜表面波線路 "，信学論(B)，掲載予定．

(5) P.Kaiser："The Stream Guide, a Simple, Low-Loss Optical Guiding Medium"，B.S.T.J., 47, 5, p.761 (May-June 1968).

(6) H.G.Unger: "Light Beam Propagation in Curved Schlieren Guides", A.E.U, 19, 4, p189 (April 1965).

(7) H.G.Unger: "Circular Electric Wave Transmission

Through Surpentine Bends", B. S. T. J., 36, 5, p1279 (Sept. 1957).

(8) 森口，宇田川，一松："数学公式Ⅱ"，p. 245，岩波書店，(1957 年).

(9) H. Kogelnik: "On the Propagation of Gaussian Beams of Light Through Lenslike Media including those with a Loss or Gain Variation", Applied Optics, 4, 2, p1562 (Dec. 1965).

(10) 今井正明，伊藤精彦，松本正："理想的ガスレンズの波動光学的考察"，信学論 (B), 51 − B, 5, p. 185 (昭和 43 − 05).

(11) Bateman and Harry: "Higher Transcendental Functions", 2, p. 194, N. Y. McGraw-Hill (1953).

輻射科学研究会資料

# 線電流源からの放射におよぼす運動半無限誘電体の影響

間　　剛
塩沢俊之
河野磐生
（大阪大学・工学部）

1969年2月28日

## 1．まえがき

運動系の電磁界理論に関する研究が，近年，各方面で活発に行なわれているが，特に，運動媒質中の波源からの放射の問題[(1)~(4)]や，運動媒質による平面電磁波の反射と透過の問題[(5)~(10)]に関しては，すでに，かなり詳しく研究されており，媒質が運動することによって生じる種々の興味深い現象が明らかにされている．さらに，Pyati[(11)]は，境界面に対して平行に運動している半無限誘電体外部の真空中に置かれた静止電気双極子からの放射について，幾何光学的方法を用いて考察し，誘電体の運動速度がかなり大きくなっても，著しい運動の影響は現われないという結果を得ている．また，深井等は，[(12)]運動するプラズマSlabの外側に固定された線電流源による電磁界について，運動媒質を回路論的に取り扱って考察しているが，波源の存在する領域は，やはり，真空の場合しか考えていない．本論文では，半無限の静止誘電体と運動誘電体のどちらか一方に，無限長線電流源が存在する場合を考え，観測者は静止媒質中にいるものと仮定して，波動方程式を直接解くことにより放射電磁界を求め，放射パターンが誘電体の運動によってどのような影響を受けるかを数値的に調べる．また，静止媒質の領域が真空の場合と誘電体の場合とを比較して，どのような違いが生じるかについても検討する．

## 2．基礎理論

本論に入る前に，以下の議論の基礎となるMaxwell-Minkowskiの方程式[(13)]について，ここで簡単に述べる．

特殊相対性理論によれば，運動媒質に対する電磁界基本方程式は，静止媒質の場合と同じ形でなければならない．すなわち，

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \qquad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - i\omega \mathbf{D} \qquad (1\,b)$$

ただし，上式では電磁界が時間的に $e^{-i\omega t}$ なる変化をするものと仮定している．

一方，一様に運動している等方性媒質に対する構成関係式は，媒質が静止している場合とは異なったものになる．媒質が一定の速度 $v$ で $z$ 方向に運動しているものとすれば（$\mathbf{v} = v\hat{z}$），構成関係式は，つぎのようになる．

$$\mathbf{D} = \varepsilon \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E} + \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{H}}{c} \qquad (2\,a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{E}}{c} \qquad (2\,b)$$

ただし，

$$\mathbf{b} = \frac{(n^2-1)\beta}{1-n^2\beta^2}\hat{z}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}, \qquad (3\,a)$$

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}, \qquad (3\,b)$$

ここで，$\varepsilon_0$および$\mu_0$は，それぞれ，真空の誘電率および透磁率，$\varepsilon$および$\mu$は，媒質の静止状態における誘電率および透磁率であり，$c$は真空中の光速度である．

式(2)を式(1)に代入すれば，運動等方性媒質に対するMaxwell-Minkowskiの方程式が得られる．すなわち，

$$(\nabla + ik_0\mathbf{b})\times\mathbf{E} = ik_0 c\mu\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H} \qquad (4\,a)$$

$$(\nabla + ik_0\mathbf{b})\times\mathbf{H} = \mathbf{J} - ik_0 c\varepsilon\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E} \qquad (4\,b)$$

ただし，

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \qquad (5)$$

式(4)においてHを消去すれば，つぎのようなEに対する波動方程式が得られる．

$$(\nabla + ik_0\mathbf{b})\times\left[\bar{\alpha}^{-1}\cdot(\nabla + ik_0\mathbf{b})\times\mathbf{E}\right] - n^2k_0^2\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E} = ik_0 c\mu\mathbf{J} \qquad (6)$$

ただし，

$$\bar{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

## 3．波動方程式の解

本節では，一般的な場合として，異なる速度で運動している二つの半無限誘電体の一方に無限長線電流源が存在する場合を考え，Fourier 変換を用いて波動方程式を解く．どちらか一方の誘電体が静止している場合については，次節において，詳しく検討することにする．

図1に示すように，二つの媒質が無限平面（$x = 0$）によって接しているものとし，媒質ⅠおよびⅡは，それぞれ，$v_1$および$v_2$なる一定速度で，$z$方向に運動しているものとする．また，媒質ⅠおよびⅡは，線形，等方，均質かつ非分散性の誘電体であり，媒質Ⅰの誘電率および透磁率を，それぞれ，

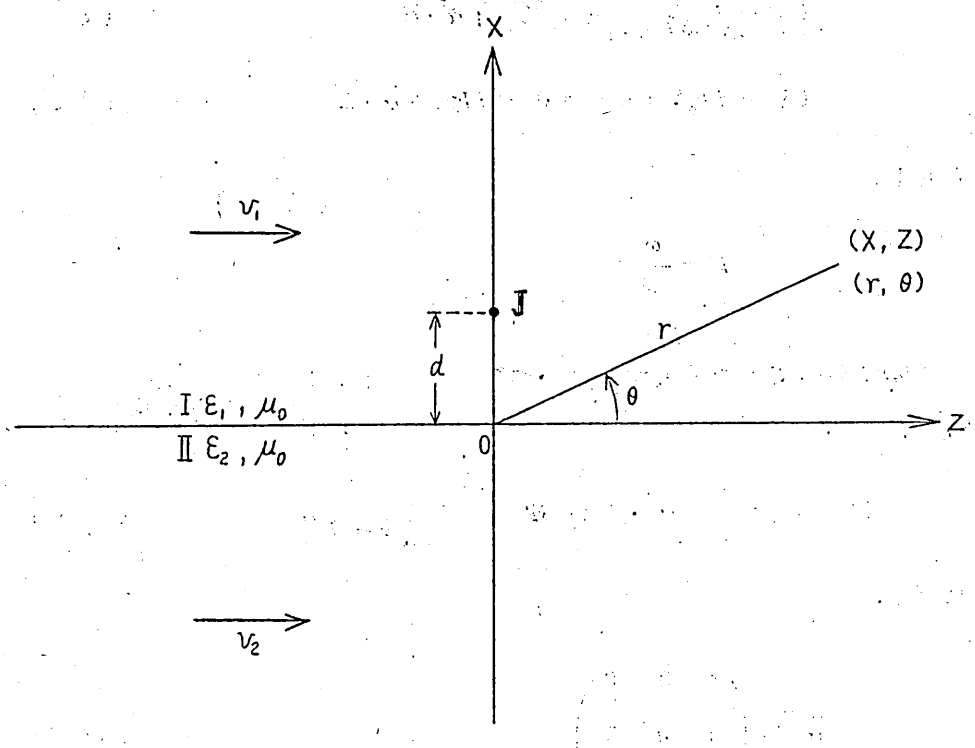



図1　座　標　系

$\varepsilon_1$および$\mu_0$，媒質Ⅱの誘電率および透磁率を，それぞれ，$\varepsilon_2$および$\mu_0$とする．さらに，媒質Ⅰには，$x = d$．$z = 0$なる点に，$y$軸に平行に，無限長線電流源Jが存在し，これは，次式で表わされるものと仮定する．

$$\mathbf{J} = \hat{y}\,\frac{1}{i k_0 c \mu_0}\,\delta(x-d)\,\delta(z) \qquad (8)$$

ここで，$\delta$は，Dirac のデルタ関数を表わす．

運動媒質中に置かれた電流源によって生じる電磁界は，前節で述べたMaxwell-Minkowskiの方程式から求めることができる．上の仮定のもとでは，

電界は $y$ 方向成分のみをもつので，式(6)の波動方程式は，媒質 I および II において，それぞれ，つぎのようになる．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{a_1}\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik_0 b_1\right)^2+a_1 n_1^2 k_0^2\right] E_1(x, z)$$

$$=-\delta(x-d)\,\delta(z), \qquad x>0 \qquad (9)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{a_2}\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik_0 b_2\right)^2+a_2 n_2^2 k_0^2\right] E_2(x, z)$$

ただ

$$=0, \qquad x<0 \qquad (10)$$

ただし，

$$a_\nu=\frac{1-\beta_\nu^2}{1-n_\nu^2\beta_\nu^2} \qquad b_\nu=\frac{(n_\nu^2-1)\beta_\nu}{1-n_\nu^2\beta_\nu^2} \qquad (11a)$$

$$\beta_\nu=\frac{v_\nu}{c} \qquad n_\nu=\sqrt{\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_0}} \qquad (11b)$$

$(\nu=1, 2)$

$E_1(x, z)$ および $E_2(x, z)$ に対応する磁界は，式（4 a）から求めることができる．すなわち．

$$H_{\nu x}(x, z)=-\frac{1}{ik_0 c\,\mu_0 a_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik_0 b_\nu\right) E_\nu(x, z) \qquad (12a)$$

$$H_{\nu y}(x, z)=0 \qquad (12b)$$

$$H_{\nu z}(x, z) = \frac{1}{i k_0 c \mu_0} \frac{\partial}{\partial x} E_\nu(x, z) \qquad (12c)$$

$$(\nu = 1, 2)$$

式(9)および(10)の波動方程式を解くために，$E_1(x, z)$ および $E_2(x, z)$ を，つぎのようなFourier 積分によって表わす．

$$E_\nu(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\nu(x, h)\, e^{ihz}\, dh \qquad (13)$$

$$(\nu = 1, 2)$$

式(13)を式(9)および(10)に代入すれば，つぎのような $\phi_1(x, h)$ および $\phi_2(x, h)$ の満足すべき方程式が得られる．

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1^2\right) \phi_1(x, h) = -\delta(x-d), \qquad x > 0 \qquad (14)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_2^2\right) \phi_2(x, h) = 0, \qquad x < 0 \qquad (15)$$

ただし，

$$\lambda_\nu^2 = \frac{1}{a_\nu}\left[\left(k_0 b_\nu + h\right)^2 - a_\nu^2 n_\nu^2 k_0^2\right] \qquad (16)$$

$$(\nu = 1, 2)$$

式(14)および(15)の解は，つぎのような形に書くことができる．

$$\phi_1(x, h) = \begin{cases} A_1 e^{-\lambda_1 x} & x \geqq d \quad (17) \\ A_2 e^{\lambda_1 x} + A_3 e^{-\lambda_1 x} & 0 \leqq x \leqq d \quad (18) \end{cases}$$

$$\phi_2(x, h) = A_4 e^{\lambda_2 x} \qquad x \leqq 0 \qquad (19)$$

ここで，$A_\nu$（$\nu = 1, 2, 3, 4$）は，境界条件によって決まる定数であり，$\lambda_1$および$\lambda_2$の符号は，$x \geqq d$に対する$\phi_1(x, h)$，および$\phi_2(x, h)$が，放射条件を満足するように選ぶ．

未定定数$A_\nu$（$\nu = 1, 2, 3, 4$）は，二つの媒質の境界面において電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという条件[14]と，$x = d$における境界条件[15]を，式(17)～(19)に適用することにより定められる．$\phi_1(x, h)$および$\phi_2(x, h)$がきまれば，式(13)により，$E_1(x, z)$および$E_2(x, z)$が求まる．結果の式だけを示すと，つぎのようになる．

$$E_1(x, z)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\lambda_1} \left[ e^{-\lambda_1 |x-d|} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 (x+d)} \right] e^{ihz} \, dh, \quad x \geqq 0 \qquad (20)$$

$$E_2(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1 d}}{2\pi(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{\lambda_2 x + ihz} \, dh, \qquad x \leqq 0 \qquad (21)$$

式(20)および(21)によって与えられる電界に対応する磁界は，式(12)から求めることができる．

## 4．遠距離放射電磁界

さて，線電流源からの放射におよぼす運動半無限誘電体の影響について，詳しく考察するために，鞍部点法[15][16]により式（20）および（21）の積分を行ない，遠距離放射電磁界を求めよう．なお，ここでは，簡単のために，代表的な例として，(1)媒質Ⅰが静止している場合，および，(2)媒質Ⅱが静止している場合を考え，いずれの場合も，観測者は静止媒質中にいるものと仮定する．

(1) 媒質Ⅰが静止している場合

この場合には，今までの全ての式において，$v_1=0$ とおくことができる．観測者は，静止媒質すなわち媒質Ⅰの中にいると仮定しているので，$E_2(x,z)$を求める必要はない．さらに，電流源が境界面の近くにあるものとすれば，$x \geqq d$ に対する $E_1(x,z)$ のみを求めればよいことになる．$x \geqq d$ の場合には，式（20）は，つぎのようになる．

$$E_1(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\lambda_1}\left[e^{\lambda_1 d} + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-\lambda_1 d}\right] e^{-\lambda_1 x + ihz}\, dh, \quad x \geqq d \tag{22}$$

鞍部点法により，式（22）の積分を行なえば，$n_1 k_0 r$ が十分大きい場合の近似式として，次式を得る．

$$E_1(r,\theta) = \frac{i}{4\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{n_1 k_0 r}}\, F_1(\theta)\, e^{i\left(n_1 k_0 r - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{23}$$

$$(n_1 k_0 r \gg 1, \quad 0° \leqq \theta \leqq 180°)$$

ただし，

$$x = r\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta \tag{24}$$

$$F_1(\theta)=e^{-in_1k_0d\sin\theta}+\frac{n_1\sin\theta-\sqrt{K_2(\theta)}}{n_1\sin\theta+\sqrt{K_2(\theta)}}\,e^{in_1k_0d\sin\theta} \qquad (25)$$

$$K_2(\theta)=\frac{1}{a_2}\left[a_2^2n_2^2-(n_1\cos\theta+b_2)^2\right] \qquad (26)$$

ここで，$r$および$\theta$は，図1に示すような円筒座標を表わす．

観測点が境界面の近くになると，式（22）の積分を行なう際の積分路が分岐を横切るようになり，この場合には，分岐に沿った積分を行なわなければならないが，この解は，いわゆる遠距離放射電磁界ではないので[16]，ここでは考慮していない．

式（23）は，運動媒質による平面電磁波の反射と透過の問題に対する結果[9]を用いて，幾何光学的方法により導くこともできる．

つぎに，式（23）および（12）を考慮して，時間平均Poyntingベクトル$S_1$を求めると，これは$r$方向成分のみをもち，次式で与えられることがわかる．

$$S_1=\frac{1}{16\pi n_1k_0r}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\,|F_1(\theta)|^2 \qquad (27)$$

線電流源からの放射パターンが，半無限誘電体の運動によりどのように影響されるかを具体的に知るために，$|F_1(\theta)|^2$の数値例を，$n_1=n_2=2$の場合について，$\beta_2$をパラメータとして，図2（$n_1k_0d=\pi$）および図3（$n_1k_0d=\pi/2$）に示す．

媒質Ⅰが真空の場合には，誘電体の運動速度がかなり大きくなっても，著しい運動の効果は現われないという結果が得られているが[11]，図から明らかなように，媒質Ⅰが誘電体の場合には，運動速度が小さい場合でも，その効

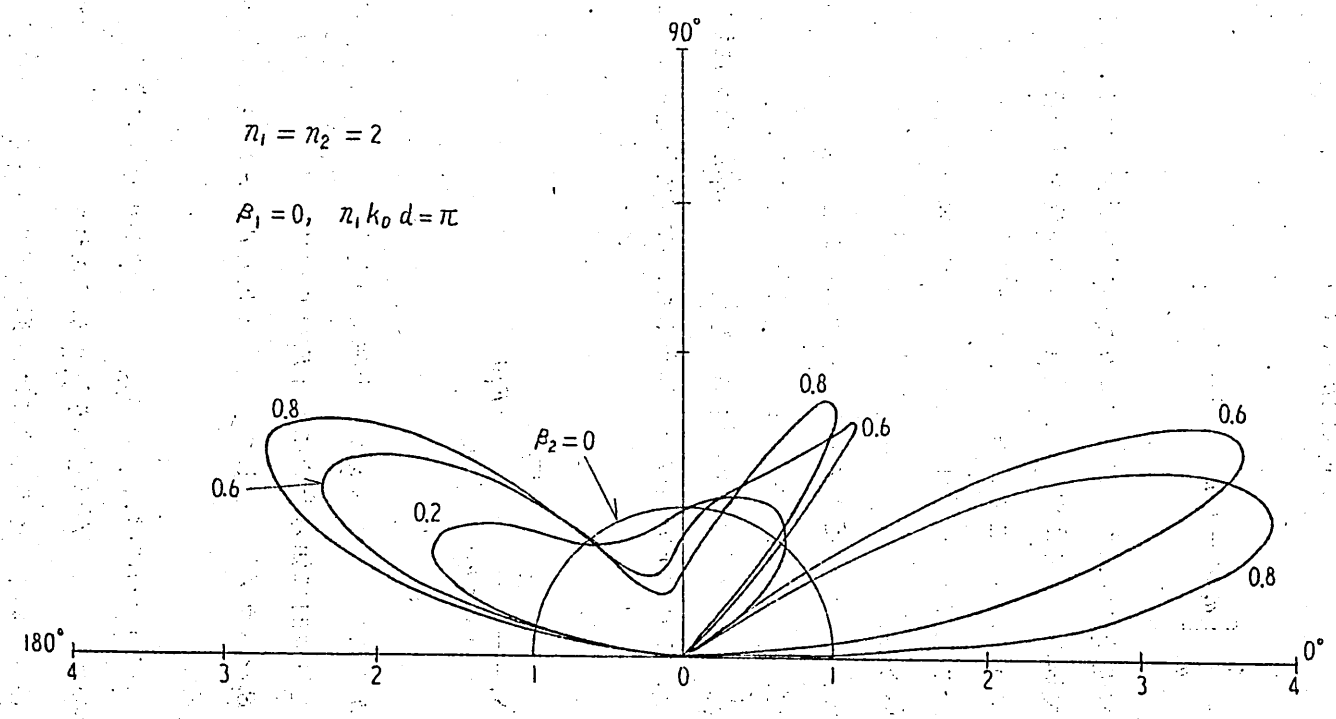



図 2　放射パターン $|F_1(\theta)|^2$，（$n_1 k_0 d = \pi$）

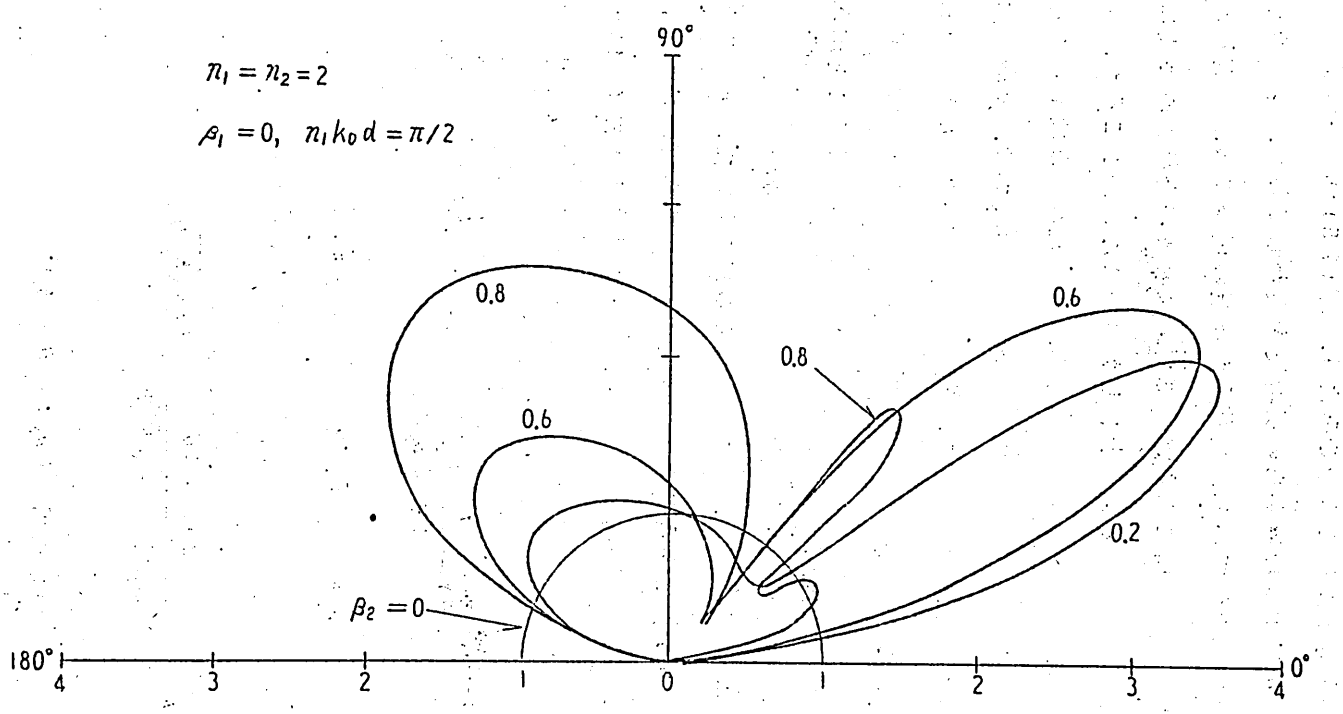



図 3　放射パターン $|F_1(\theta)|^2$，（$n_1 k_0 d = \pi/2$）

果はかなり大きくなる．このような違いが，どのようにして現われるかを，式（25)をもとにして考えてみよう．式（25)の第一項は波源からの直接波を，また第二項は境界からの反射波を表わしており，媒質の運動の効果は第二項のみに現われている．媒質Ⅰが真空の場合には，媒質Ⅱの運動に無関係に全反射の現象は起こらないので[17]，反射波の寄与は直接波に比べて小さく，したがって，運動の効果も少ししか現われない．ところが，媒質Ⅰが誘電体の場合には，媒質Ⅱの運動に伴ない，$n_1 > n_2$の場合はもちろん$n_1 \leqq n_2$の場合にも全反射が起こり得るので[17]，全反射の領域では，反射波の寄与は直接波と同程度になり，したがって，運動の効果がかなり大きく現われることになる．このように，全反射の影響によって，媒質Ⅰが真空の場合と誘電体の場合とでは，媒質Ⅱの運動の効果がかなり異なってくることがわかる．

(2) 媒質Ⅱが静止している場合

この場合には，式（21)までの全ての式において，$v_2 = 0$とおくことができ，観測者は静止媒質中にいると仮定しているので，$E_2(x, z)$のみを求めればよい．(1)の場合と同様に，鞍部点法により式（21)の積分を実行すれば，$n_2 k_0 r$が十分大きい場合の近似式として，次式を得ることができる．

$$E_2(r, \theta) = \frac{i}{4\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{n_2 k_0 r}}\, F_2(\theta)\, e^{i\left(n_2 k_0 r - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad (28)$$

$$(n_2 k_0 r \gg 1,\quad 180° \leqq \theta \leqq 360°)$$

ただし

$$F_2(\theta) = \frac{-2 n_2 \sin\theta}{-n_2 \sin\theta + \sqrt{K_1(\theta)}}\, e^{i k_0 d \sqrt{K_1(\theta)}} \qquad (29)$$

$$K_1(\theta) = \frac{1}{a_1}\left\{ a_1^2 n_1^2 - (n_2 \cos\theta + b_1)^2 \right\} \qquad (30)$$

また，時間平均Poyntingベクトル$S_2$は，$r$方向成分のみをもち，次式で与えられる．

$$S_2 = \frac{1}{16\pi n_2 k_0 r}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\,|F_2(\theta)|^2 \qquad (31)$$

$|F_2(\theta)|^2$の数値例を，$\beta_1$をパラメータとして，図4（$n_1=2$，$n_2=4$），図5（$n_1=4$，$n_2=2$），図6（$n_1=n_2=2$）および図7（$n_1=2$，$n_2=1$）に示す．これらの図には，一般に，非常に鋭い指向性が現われているが，式(29)を考慮すれば，$K_1(\theta)=0$を満足する角度$\theta$において$|F_2(\theta)|^2$に鋭いスパイクが現われ，この時，$|F_2(\theta)|^2$は最大値4をとることがわかる．$K_1(\theta)=0$を満足する角度$\theta$は一般に二つあり，これらは次式で与えられる．

$$\theta_a = \cos^{-1}\left[\frac{n_1+\beta_1}{n_2(1+n_1\beta_1)}\right] \qquad (32)$$

$$\left(-1<\beta_1\leqq-\frac{n_1+n_2}{n_1n_2+1},\ \text{または}\ \frac{n_1-n_2}{n_1n_2-1}\leqq\beta_1<1\right)$$

$$\theta_b = \cos^{-1}\left[-\frac{n_1-\beta_1}{n_2(1-n_1\beta_1)}\right] \qquad (33)$$

$$\left(-1<\beta_1\leqq-\frac{n_1-n_2}{n_1n_2-1},\ \text{または}\ \frac{n_1+n_2}{n_1n_2+1}\leqq\beta_1<1\right)$$

具体的な例として，最初に，$n_1=2$，$n_2=4$の場合を考えると，式(32)および(33)から明らかなように，$|F_2(\theta)|^2$は，$\beta_1$のいかなる値に対してもスパイクをもつ．すなわち，$-1<\beta_1\leqq-2/3$，$-2/7\leqq\beta_1\leqq2/7$および$2/3\leqq\beta_1<1$の範囲では$\theta_a$および$\theta_b$の二つの角度で，$-2/3<\beta_1<-2/7$

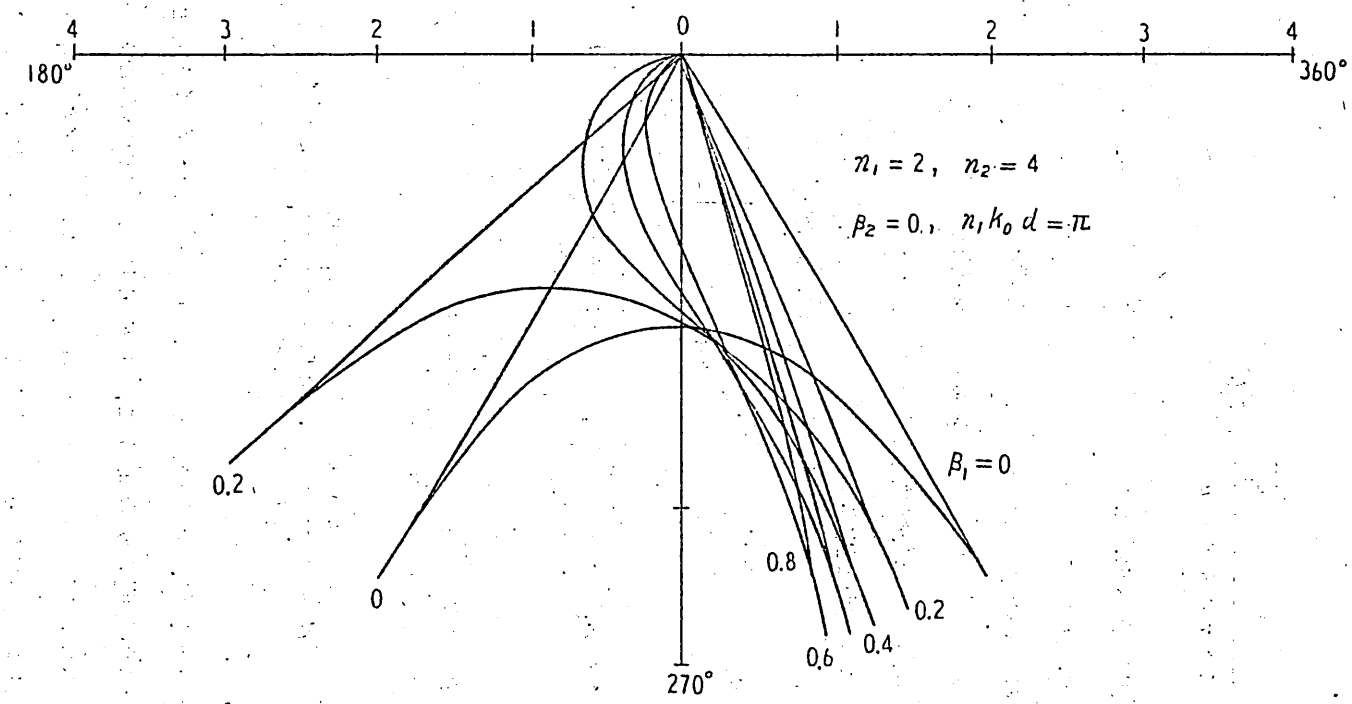



図4　放射パターン $|F_2(\theta)|^2$, ( $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_1 k_0 d = \pi$ )

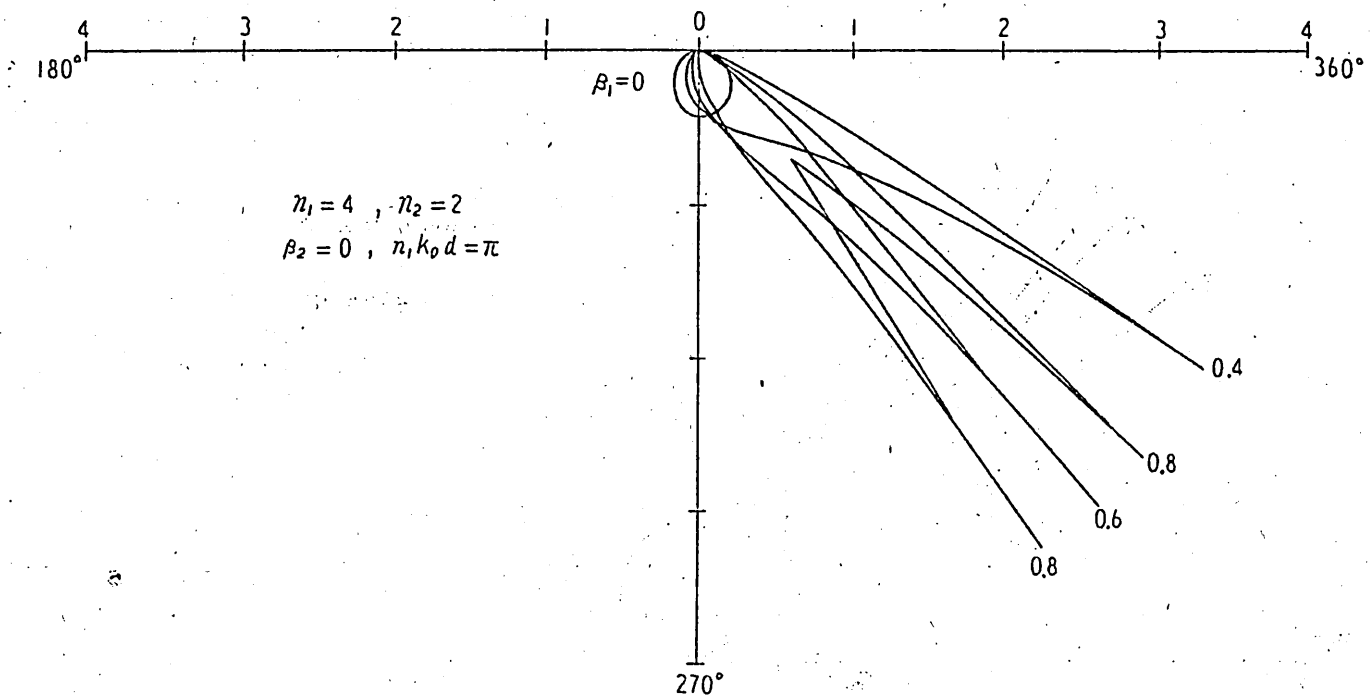



図5　放射パターン $|F_2(\theta)|^2$，（$n_1=4$，$n_2=2$，$n_1 k_0 d=\pi$）

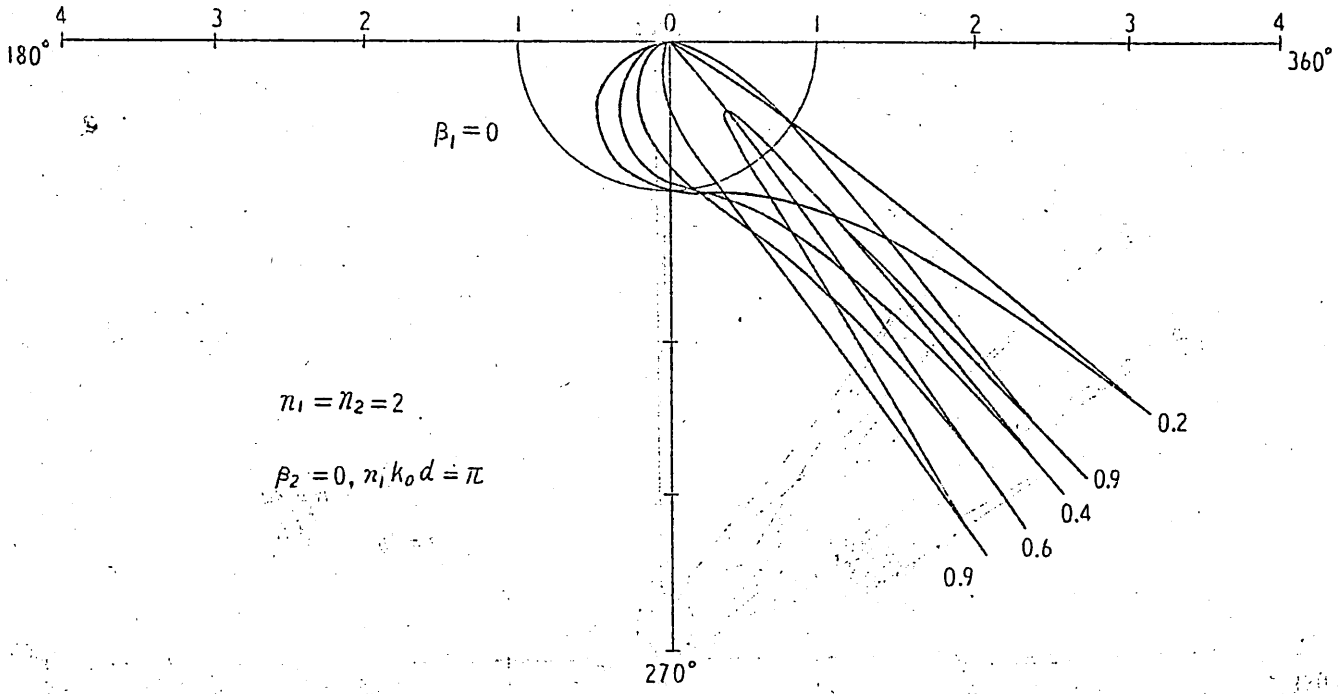



図 6　放射パターン $|F_2(\theta)|^2$，（$n_1 = n_2 = 2$，$n_1 k_0 d = \pi$）

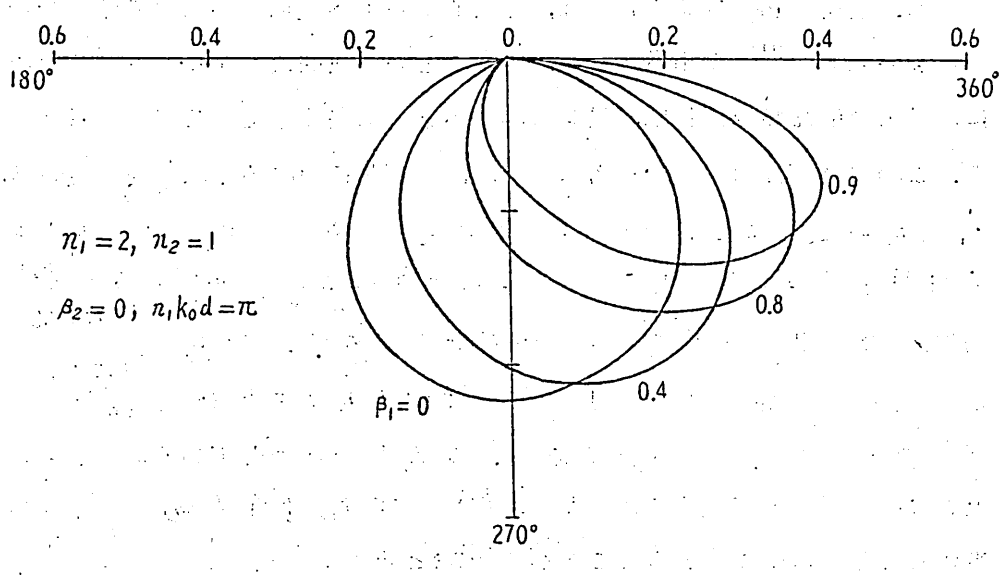



図7　放射パターン $|F_2(\theta)|^2$，（$n_1=2$，$n_2=1$，$n_1k_0d=\pi$）

の範囲では $\theta_b$ で，$2/7<\beta_1<2/3$ の範囲では $\theta_a$ で，それぞれ，スパイクが現われる．$n_1=n_2=2$ の場合は，上の場合と同様の傾向を示す．一方，$n_1=4$，$n_2=2$ の場合には，$|F_2(\theta)|^2$ は，$-2/7<\beta_1<2/7$ の範囲ではスパイクをもたず，$-1<\beta_1\leqq-2/3$ および $2/3\leqq\beta_1<1$ の範囲では $\theta_a$ および $\theta_b$ の二つの角度で，$-2/3<\beta_1\leqq-2/7$ の範囲では $\theta_b$ で，$2/7\leqq\beta_1<2/3$ の範囲では $\theta_a$ で，それぞれ，スパイクをもつ．特に，媒質Ⅱが真空（すなわち，$n_2=1$）の場合には，$\beta_1$ のいかなる値に対しても，スパイクは現われない（図7参照）．一般に，$n_1<n_2$ の場合には，$|F_2(\theta)|^2$ は，常にスパイクをもつが，$n_1\geqq n_2$ の場合には，

$$-\frac{n_1-n_2}{n_1n_2-1}<\beta_1<\frac{n_1-n_2}{n_1n_2-1}$$

なる範囲では，スパイクをもたない．

なお，上述の$\theta_a$ および$\theta_b$ は，媒質Ⅱから Ⅰへ平面波が入射する場合の全反射の臨界角[17] に相当するが，このことの物理的な意味を理解するために，最も簡単な場合として，二つの媒質がともに静止している場合を考えよう．この場合，幾何光学の考えに従えば，媒質Ⅱにおける光線の進む方向は，$n_1 < n_2$ のときには，$\cos^{-1}(-n_1/n_2) \leqq \theta \leqq \cos^{-1}(n_1/n_2)$ なる扇形の内部に限られ，$n_1 \geqq n_2$ のときには，光線があらゆる方向に進むことは容易に理解することができる．$\cos^{-1}(\pm n_1/n_2)$ なる角度が，媒質ⅡからⅠへ平面波が入射する場合の全反射の臨界角であることは明らかである．媒質Ⅰが運動している場合にも，上と同様の考察を進めることにより，$\theta_a$ および$\theta_b$ が全反射の臨界角に相当することは容易に確かめることができる．

図4～図7および以上の議論から，放射パターンは，誘電体の運動に伴ない複雑に変化し，特に，媒質Ⅱが誘電体の場合と真空の場合とでは著しい違いの生じることがわかった．

## 5．むすび

本論文では，まず，一般的な場合として，無限平面で接し異なる速度で運動している二つの半無限誘電体の一方に無限長線電流源が存在する場合を考え，Fourier 変換を用いて波動方程式を解くことにより電磁界を求め，つぎに，どちらか一方の誘電体が静止している場合について，観測者は静止媒質中にいるものと仮定して，鞍部点法により遠距離放射電磁界を求め，詳しく検討した．その結果，放射パターンは誘電体の運動により複雑に変化し，特に，静止媒質の領域が真空の場合と誘電体の場合とでは著しい違いが生じ，後者の場合，運動誘電体の速度が小さくても，運動の効果はかなり現われる

ことがわかった.

なお，ここで用いた解析方法は，プラズマなどの分散性媒質に対しても同様に適用することができる.

## 謝　　辞

終りに，日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授ならびに熊谷信昭助教授に深謝する．また，ご討論いただいた板倉研究室の方々に感謝する．

## 文　　献


(1) K.S.H. Lee and C.H. Papas: "Electromagnetic radiation in the presence of moving simple media", J.Math. Phys., 5, 12, p. 1668 (Dec.1964).

(2) K.S.H. Lee and C.H. Papas: "Antenna radiation in a moving dispersive medium", IEEE Trans., AP-13, p. 799 (Sept. 1965).

(3) S.W. Lee and Y.T. Lo: "Radiation in a moving anisotropic medium", Radio Sci., 1, (New Series), p. 313 (March 1966).

(4) 藤岡弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における電磁放射理論" 信学誌, 50, 10, p.1906 (昭42－10).

(5) C.Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medium", J.Appl.Phys., 36 11, p.3513 (Nov.1965)

(6) C.Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium", J.Appl. Phys., 37 8, p.3079 (July 1966).

(7) 塩沢俊之，間　剛，熊谷信昭："静止媒質と運動媒質の境界面における平面波の反射および屈折"，信学誌, 50, 8, p. 1381 (昭42－08).

(8) J.A. Kong and D.K. Cheng: "Wave behavior at an interface of a semi-infinite moving anisotropic medium", J.Appl. Phys., 39, 5, p. 2282 (April 1968).

(9) T.Shiozawa and K.Hazama: "General solution to the problem of reflection and transmission by a moving dielectric medium", Radio Sci., 3, (New Series), 6, p. 569 (June 1968).

(10) 間 剛, 塩沢俊之, 熊谷信昭："運動等方性プラズマによる平面電磁波の反射と透過（一般解）", 信学論(B), 51-B, 12, p. 575 (昭43－12).

(11) V.P.Pyati: "Radiation due to a dipole over a moving medium", J.Appl.Phys., 38, 11, p. 4372 (Oct. 1967).

(12) 深井一郎, 鈴木道雄, 風間輝雄, 松本 正："運動するプラズマSlabの線電流電磁界に対する影響", 信学会, アンテナ・伝播研資（昭43－06).

(13) C.T. Tai: "The dyadic Green's function for a moving isotropic medium", IEEE Trans., (Communications), AP-13, 2, p. 322 (March 1965).

(14) R.C.Costen and D.Adamson: "Three-dimensional derivation of the electromagnetic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary", Proc. IEEE, 53, 9, p. 1181 (Sept. 1965).

(15) R.E.Collin: "Field theory of guided waves", Sec. 11.8, McGraw Hill, New York (1960).

(16) C.T. Tai: "The effect of a grounded slab on the radiation from a line source", J.Appl.Phys., 22, 4, p. 405 (April 1951).

(17) T.Shiozawa and N. Kumagai: "Total reflection at the interface between relatively moving media", Proc.IEEE (Letters), 55, 7, p. 1243 (July 1967).

輻射科学研究会資料

# 非共焦点ビーム導波系の回折損失について

眉松英二　牧本利夫
根本永次郎
(大阪大学 基礎工学部)

1969年 2月28日
(於 三菱電機株式会社 中央研究所)

# 非共焦点ビーム導波系の回折損失について

## §　まえがき

レンズ列ビーム導波系においてレンズによる位相変換領域の有限性を考慮した場合の回折損失については文献[1], [2]で積分方程式の固有値問題として解析されたが，それらはいずれも共焦点系の場合に関してのみであり非共焦点系に関してはまだ取扱われていない。ここではレンズ半径有限によるビームモード変換係数，ビームモード透過係数をまず求めそれを成分にもつマトリクスを用いて固有値，固有ベクトルすなわち非共焦点系の回折損失，固有ビームモード波を求める方法について述べ最後に数値計算を行った。

## §1 展開係数

この節ではレンズ列ビーム導波系においてビーム波が有限半径のレンズで位相変換を受けることにより個々のビームモードの振巾がどの様に変化するかを調べる。ビーム波の伝播方向を$(r,\theta,z)$で表示される円筒座標系の$+z$方向に選ぶとビーム波が$z=-d/2$を等位相面に持ちかつこの位置で基本波が最小のスポットサイズ$\sqrt{2}S$を持つビーム波の$(m,n)$ビームモード$\psi^{(-)}_{mn}$は次式で表わされる。[1]

$$\psi^{(-)}_{mn}(r,\theta,z)=\frac{1}{W}\sqrt{\frac{2n!}{\pi\varepsilon_m(m+n)!}}\left(\frac{r}{W}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{W^2}\right)\cos m\theta$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}Pr^2-jk(z+d/2)+j(2n+m+1)\arg P\right\} \quad (1)$$

ここで

$$P=\frac{1}{W^2}+j\frac{k}{R} \quad (2)$$

$$W^2=S^2\left[1+\left(\frac{z+d/2}{kS^2}\right)^2\right] \quad (3)$$

$$R = (z + d/2)\left[1 + \left(\frac{kS^2}{z + d/2}\right)^2\right] \tag{4}$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 1 & m \geq 1 \end{cases} \tag{5}$$

である。また$L_n^m(x)$はラゲールの陪多項式で次の様に定義される。

$$L_n^m(x) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n+m}{n-l} \frac{x^l}{l!} \tag{6}$$

一方スポットサイズ$\sqrt{2}S$はレンズの焦点距離$f$，レンズ間隔$d$の導波系では

$$2S^2 = \frac{d}{K}\sqrt{\frac{4-K}{K}} \quad , \quad K = \frac{d}{f} \tag{7}$$

と書ける。

いま$z=0$におかれた半径$a$，焦点距離$R_0/2$(以下$R_0, P_0, W_0$はそれぞれ$z=0$における$R, P, W$を表わすものと約束する)のレンズに(1)式で表わされる$(m,n)$ビームモードが入射したときレンズ通過直後すなわちレンズ面上$z=0$における界分布$U(\rho,\varphi)$は(8)式で与えられる。

$$U(\rho,\varphi) = \psi_{mn}^{(-)}(\rho,\varphi,0)\cdot\exp(jk\rho^2/R_0)$$

$$= \frac{1}{W_0}\sqrt{\frac{2n!}{\pi\varepsilon_m(m+n)}}\left(\frac{\rho}{W_0}\right)L_n^m\left(\frac{\rho^2}{W_0^2}\right)\cdot\cos m\varphi$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{2jk}{R_0} - P_0\right)\right\}\exp\left\{-jkd/2 + (2n+m+1)\arg P_0\right\} \tag{8}$$

ここで$(\rho,\varphi)$は$z=0$における$(r,\theta)$座標を表わすものとする。フレネル領域における$U(\rho,\varphi)$の回折界$U_{mn}(r,\theta,z)$は次の回折積分で与えられる。

$$U_{mn}(r,\theta,z) = \frac{jk}{2\pi z}e^{jkz}\int_0^a\int_0^{2\pi} U(\rho,\varphi)\exp\left\{-\frac{jk}{2z}\left[\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\varphi-\theta)\right]\right\}d\varphi\,\rho\,d\rho \tag{9}$$

(9)式右辺の係数 $mn$ は $(m,n)$ ビームモード入射を意味する。(9)式はここでは直接積分を実行せずに $U_{mn}$ を $z=d/2$ を等位相面に持ちかつこの位置で基本波が最小のスポットサイズ $\sqrt{2}S$ を持つビーム波の固有ビームモードで展開する。このビーム波の $(m,n)$ ビームモードは次式で表わされる。

$$\psi_{mn}^{(+)}(r,\theta,z)=\frac{1}{W}\sqrt{\frac{2n!}{\pi\varepsilon_m(m+n)!}}\left(\frac{r}{W}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{W^2}\right)\cos m\theta$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\bar{P}r^2-jk(z-d/2)+j(2n+m+1)\arg\bar{P}\right\} \tag{10}$$

ここで

$$\bar{P}=\frac{1}{\bar{W}^2}+j\frac{k}{\bar{R}} \tag{11}$$

$$\bar{W}^2=S^2\left[1+\left(\frac{z-d/2}{kS^2}\right)^2\right] \tag{12}$$

$$\bar{R}=(z-d/2)\left[1+\left(\frac{kS^2}{z-d/2}\right)^2\right] \tag{13}$$

と書ける。

展開係数を $\alpha_{m'n'}^{mn}(z)$ とおけば(9)式の回折界 $U_{mn}$ は

$$U_{mn}(r,\theta,z)=\sum_{m'=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty}\alpha_{m'n'}^{mn}(z)\,\psi_{mn}^{(+)}(r,\theta,z) \tag{14}$$

と書かれる。ここで $\psi_{mn}^{(+)}$ の正規直交関係

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\psi_{mn}^{(+)}(r,\theta,z)\cdot\psi_{m'n'}^{(+)*}(r,\theta,z)\,d\theta\,r\,dr=\delta_{mm'}\delta_{nn'} \tag{15}$$

を用いると展開係数 $\alpha_{m'n'}^{mn}(z)$ は

$$\alpha_{m'n'}^{mn}(z)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\psi_{m'n'}^{(+)*}(z)\,U_{mn}(r,\theta,z)\,d\theta\,r\,dr \tag{16}$$

によって求めることができる。(9)式、(10)式を(16)式に代入しその積分順序を変更することにより

$$\alpha_{mn}^{m'n'}(z)=K\int_0^a\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho}{W_0}\right)^m L_n^m\left(\frac{\rho^2}{W_0^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}A\rho^2\right)\cos m\varphi$$

$$\cdot\left\{\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{\bar{W}}\right)^{m'}L_{n'}^{m'}\left(\frac{r^2}{\bar{W}^2}\right)\exp\left\{-\frac{B}{2}r^2+j\frac{kr\rho}{\bar{z}}\cos(\varphi-\theta)\right\}\cos m'\theta\,d\theta r dr\right\}d\varphi\rho d\rho \quad (17)$$

と書けここでK, A, Bはそれぞれ

$$K=\frac{jk}{\pi^2 z W_0\bar{W}}\sqrt{\frac{n!n'!}{\varepsilon_m\varepsilon_{m'}(m+n)!(m'+n')!}}$$

$$\exp\left\{j\left[-kd+(2n+m+1)\arg P_0-(2n'+m'+1)\arg\bar{P}\right]\right\} \quad (18)$$

$$A=P_0+jk\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{R_0}\right)=\frac{1}{W_0^2}+jk\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{R_0}\right) \quad (19)$$

$$B=\bar{P}^*+j\frac{k}{z}=\frac{1}{\bar{W}^2}+jk\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{R}}\right) \quad (20)$$

である。(17)式中のr, θに関する積分を$I_{r\theta}$とおけば

$$I_{r\theta}=2\pi j^{m'}\cos m'\varphi\int_0^\infty\left(\frac{r}{\bar{W}}\right)^{m'}L_n^m\left(\frac{r^2}{\bar{W}^2}\right)\exp\left(-\frac{B}{2}r^2\right)J_{m'}\left(\frac{k\rho r}{\bar{z}}\right)rdr \quad (21)$$

となりここで次の積分公式[3]

$$\int_0^\infty x^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-\beta x^2}L_n^\nu(\alpha y^2)J_\nu(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2^{-\nu-1}\beta^{-\nu-n-1}(\beta-\alpha)^n y^{\nu+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{y^2}{4\beta}\right)L_n^\nu\left[\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha-\beta)}\right] \quad (22)$$

及び

$$\frac{2}{\bar{W}^2}-B=B^* \quad (23)$$

を用いてrに関する積分を行い整理すれば

$$I_{r\theta}=\frac{2\pi}{|B|}\cos m'\varphi\exp\left\{j\left[\frac{\pi}{2}(2n'+m)-(2n'+m'+1)\arg B\right]\right\}\left(\frac{k\rho}{|B|\bar{W}\bar{z}}\right)^{m'}$$

$$\cdot L_n^m\left[\left(\frac{k\rho}{|B|\bar{W}\bar{z}}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{k^2\rho^2}{2B\bar{z}^2}\right) \quad (24)$$

となり(17)式の展開係数は

$$\alpha_{m'n'}^{mn}(z)=\bar{\alpha}_{m'n'}^{mn}(z)\int_0^A\left(\frac{\rho}{W_0}\right)^m\left(\frac{\rho}{\bar{W}'}\right)^{m'}L_n^m\left(\frac{\rho^2}{W_0^2}\right)L_{n'}^{m'}\left(\frac{\rho^2}{\bar{W}'^2}\right)e^{-C\rho^2}\rho\,d\rho \tag{25}$$

$$\frac{1}{\bar{W}'}=\frac{k}{|B|\bar{W}z}\equiv\frac{1}{W_0} \tag{26}$$

$$C=\frac{1}{2}\left(A+\frac{k^2}{Bz^2}\right)\equiv\frac{1}{W_0^2} \tag{27}$$

$$\bar{\alpha}_{m'n'}^{mn}(z)=\delta_{mm'}\frac{2}{W_0^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_{m'}n!n'!}{\varepsilon_m(m+n)!(m'+n')!}}\;e^{-jkd}$$

$$\exp\left\{j\left[(2n+m+1)\arg P_0-(2n'+m'+1)\left(\arg\bar{P}+\arg B-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} \tag{28}$$

によって表わされる。(25)～(28)式より展開係数の大きさ$|\alpha_{m'n'}^{mn}(z)|$はzの関数ではない。(何故ならば(28)式の位相項中の$\bar{P}$, Bのみがzの関数であるから)。ここで展開係数は(m,n)ビームモード入射(振巾1)のときの出力(m',n')ビームモードの振巾を表わし，$m=m'$及び$n=n'$のとき透過係数を，$m\neq m'$又は$n\neq n'$のときモード変換係数を表わしている。特にビーム導波系(レンズ間隔d)の相続く2つのレンズの中央(ここでは$z=d/2$)での展開係数は

$$\left.\begin{aligned}&\arg\bar{P}_{z=0}=0\quad,\qquad\arg B_{z=0}=\tan^{-1}\left(\frac{2kS^2}{d}\right)\\&\arg P_0=\tan^{-1}\left(\frac{d}{2kS^2}\right),\quad\because\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

の関係より

$$\alpha_{m'n'}^{mn}\left(\frac{d}{2}\right)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{n!n'!}{(m+n)!(m'+n')!}}\;e^{2j\left\{-\frac{kd}{2}+(m+n+n'+1)\arg P_0\right\}}\displaystyle\int_0^A X^m L_n^m(x)L_{n'}^m(x)e^{-x}dx & \cdots m=m'\\ \qquad\text{(但し } x=\rho^2/W_0^2,\ A=a^2/W_0^2) & \\ 0 \qquad\cdots\cdots m\neq m'\end{cases} \tag{30}$$

となる。これよりモード変換の可逆性すなわち

$$\alpha_{m'n'}^{mn}\left(\frac{d}{2}\right)=\alpha_{mn}^{m'n'}\left(\frac{d}{2}\right) \tag{31}$$

が成立することが示される。

以下では簡単のために軸対称波すなわち $m=0, m'=0$ のみを取扱うこととし、このときの展開係数を

$$\alpha_{0n'}^{0n}(d/2)\equiv\alpha_{nn'}(d/2) \tag{32}$$

で表わすことにすれば(30)式より

$$\alpha_{nm}(d/2)=e^{2j[-kd/2+(n+m+1)\arg P_0]}\int_0^A L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx \tag{33}$$

と書くことができる。尚ここでも $n=m$ の場合に透過係数を、$n=m$ の場合にモード変換係数を表わす。図1.に透過係数を、図2.～図4.にモード変換係数の数値例を示す。グラフより次のことが判明する。すなわち透過係数は高次モード程1.への収束は遅い。モード変換係数は相隣るモードからの変換例えば(0,2)モードへの変換は(0,1),(0,3)モードからの場合その値は大きくなる。

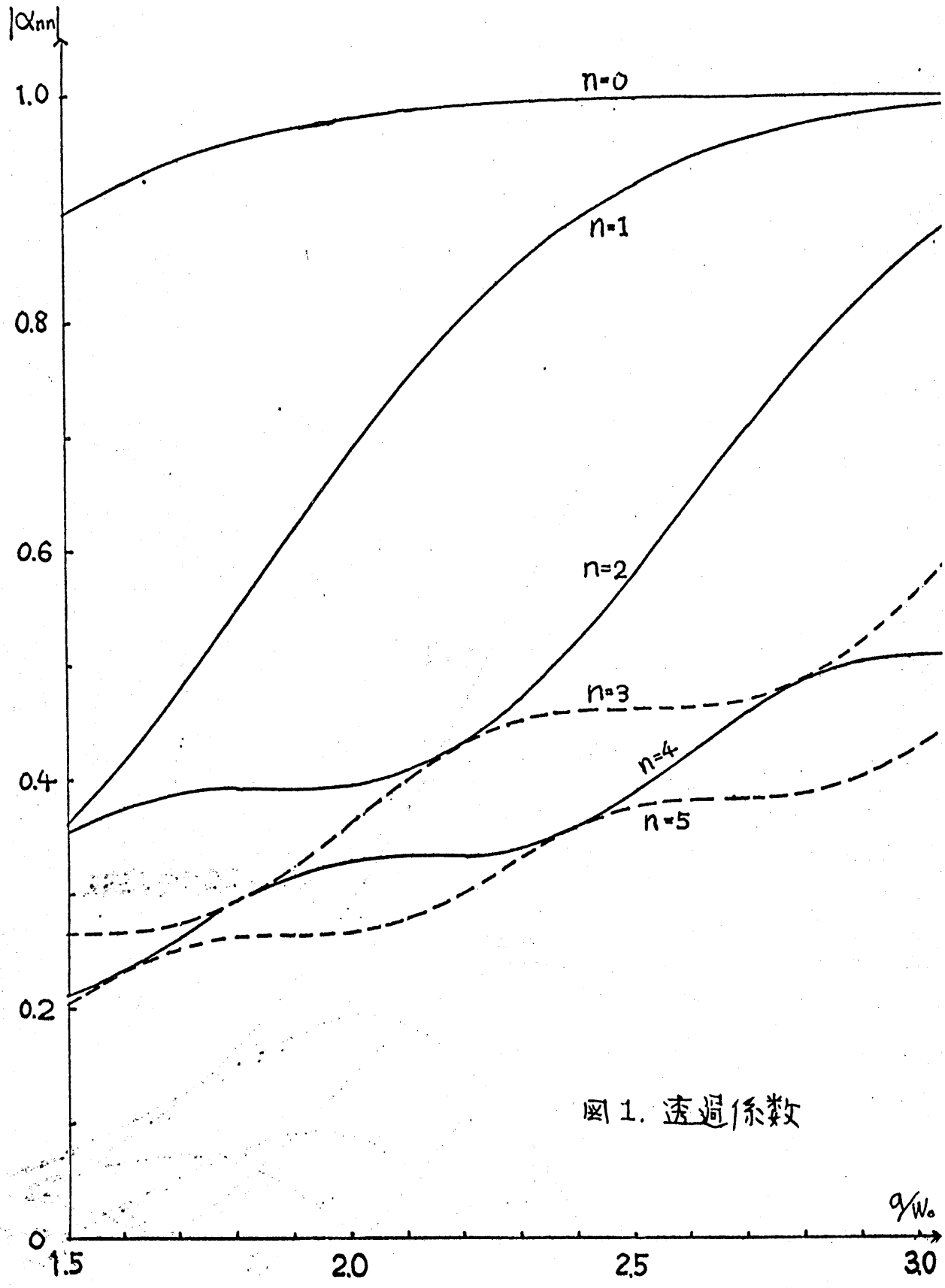



图 1. 透過係数

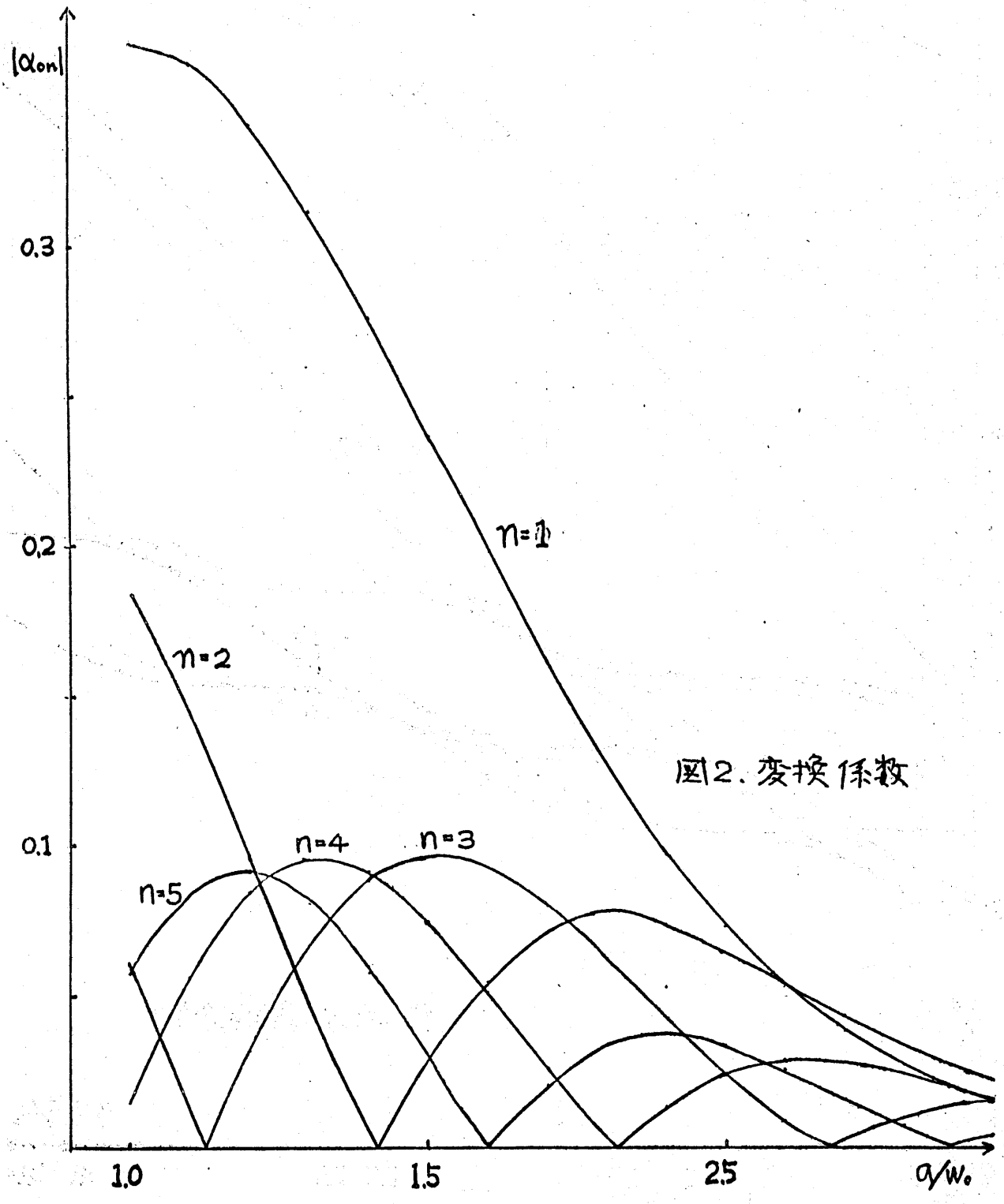



图2. 变换系数

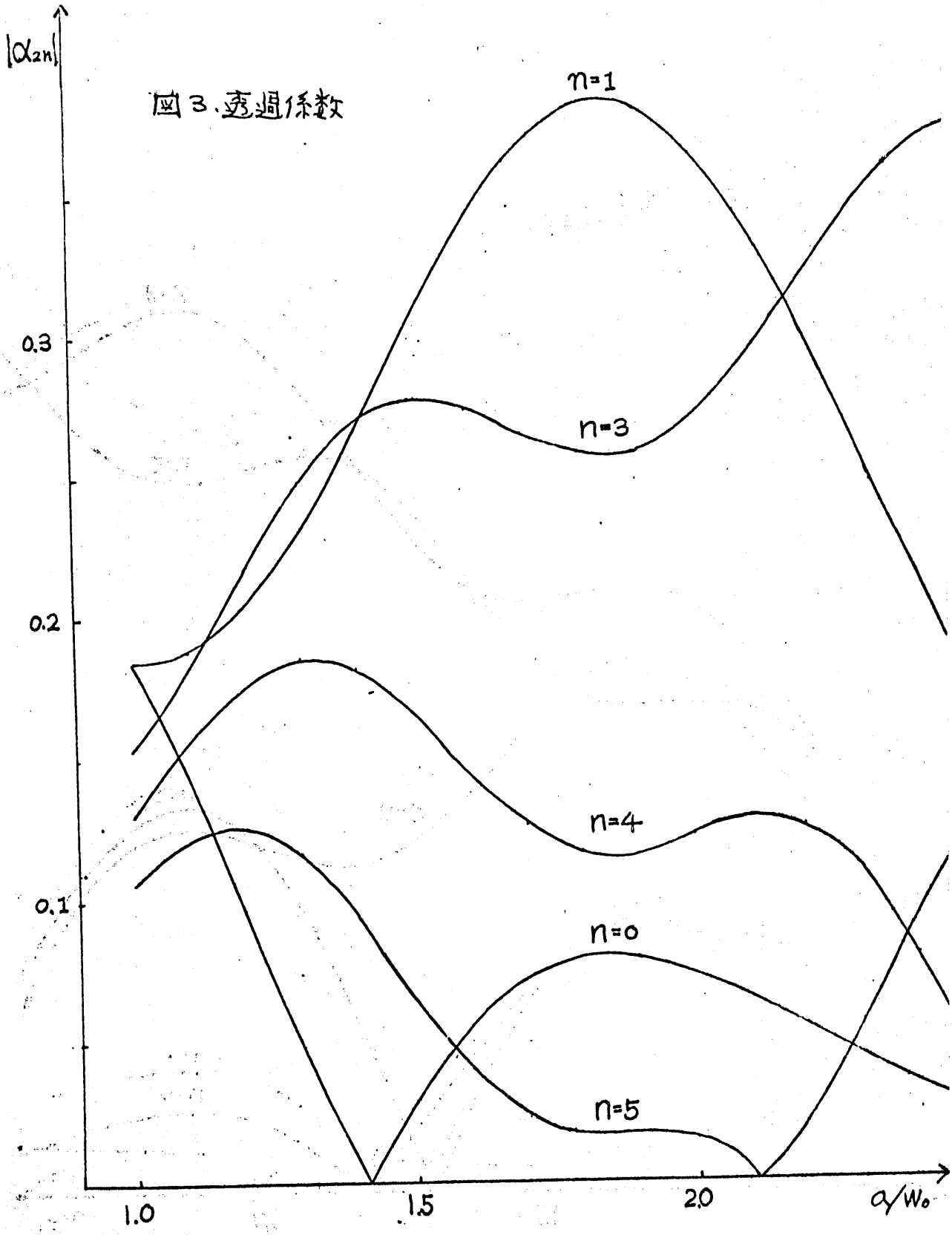



图3. 透過係数

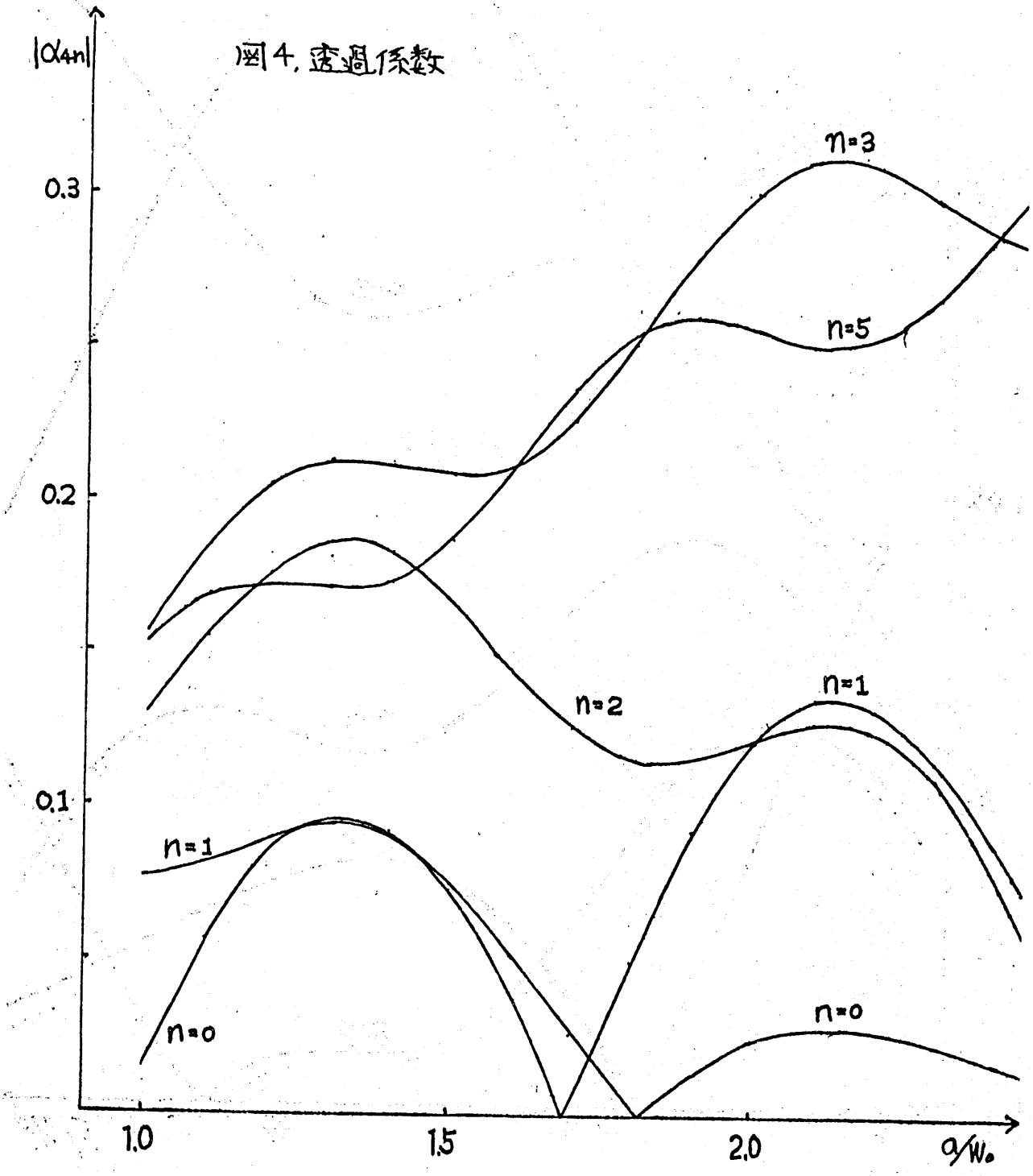



图4. 透過係数

## §2 固有値と固有モード

図5.はz軸上の $z=\pm nd$ $(n=0,1,2,\cdots)$ の位置に半径a，焦点距離 $R_0/2$ のレンズからなるビーム導波系を示す。いま $z=-d/2$ の界を $U_0(r,\theta,-d/2)$ とし，$z=0$ のレンズで位相変換を受けた後の $z=d/2$ の界を $U(r,\theta,d/2)$ で表わすときそれぞれを無損失導波系の固有モードで展開する

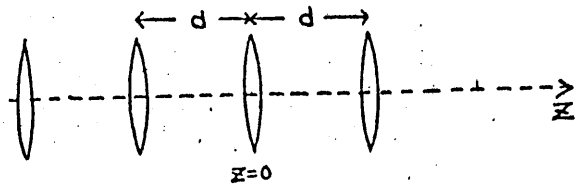


図5.

$$U_0(r,\theta,-d/2)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i(-d/2)\,\psi_{0i}^{(-)}(r,\theta,-d/2) \tag{34}$$

$$U(r,\theta,d/2)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j(d/2)\,\psi_{0j}^{(+)}(r,\theta,d/2) \tag{35}$$

前節(14)式において $z=d/2$ とおくと $U_{mn}(r,\theta,d/2)$ は，$z=-d/2$ の界が $\psi_{mn}^{(-)}(r,\theta,-d/2)$ で与えられるときの位相変換後の界分布を表わしている。このことから $z=-d/2$ の界が $\psi_{0i}^{(-)}(r,\theta,-d/2)$ のとき $z=d/2$ の界は(31)式の関係より

$$U_{0i}(r,\theta,d/2)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{mn}^{0i}(d/2)\,\psi_{mn}^{(+)}(r,\theta,d/2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{in}(d/2)\,\psi_{0n}^{(+)}(r,\theta,d/2) \tag{36}$$

と書ける。これより $z=-d/2$ の界が(34)式で表わされるとき $z=d/2$ の界は

$$U(r,\theta,d/2)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i(-d/2)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{in}(d/2)\,\psi_{0n}^{(+)}(r,\theta,d/2)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{in}(d/2)\,a_i(-d/2)\,\psi_{0n}^{(+)}(r,\theta,d/2) \tag{37}$$

となり(35)，(37)式より次の関係を得る。

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j(d/2)\psi_{0j}^{(+)}(r,\theta,d/2)=\sum_{i=n'=0}^{\infty}\sum^{\infty}\alpha_{in'}(d/2)a_i(-d/2)\psi_{0n'}^{(+)}(r,\theta,d/2) \quad (38)$$

(38)式で $j=n$ とおき(15)式の直交関係を用いると

$$b_n(d/2)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(d/2)a_m(-d/2) \quad (39)$$

となる。

ここで次のベクトルA,B及び展開係数マトリクス$\alpha$を定義する。

$$A=\begin{bmatrix} a_0(-d/2) \\ a_1(-d/2) \\ a_2(-d/2) \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} b_0(d/2) \\ b_1(d/2) \\ b_2(d/2) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\alpha=\begin{bmatrix} \alpha_{00}(d/2) & \alpha_{10}(d/2) & \alpha_{20}(d/2) & \\ \alpha_{01}(d/2) & \alpha_{11}(d/2) & \alpha_{21}(d/2) & \cdots \\ \alpha_{02}(d/2) & \alpha_{12}(d/2) & \alpha_{22}(d/2) & \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \quad (41)$$

(39)式は$n$の各々の値について成立するので(40), (41)式を用いると(39)式は次の様に書くことができる。

$$B=\alpha A \quad (42)$$

図5の導波系でくり返し波が存在するときは$\lambda$を定数として

$$B=\lambda A \quad (43)$$

の関係が成立するときであると考えられる。言い換えれば $z=d/2$ の界は振巾を除いて $z=-d/2$ の界に等しいということである。(42), (43)式より固有方程式

$$\alpha A_n = \lambda_m A_n \tag{44}$$

の固有値 $\lambda_m$ に属する固有ベクトル $A_n$ すなわち

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{n0} \\ a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{45}$$

の成分 $a_{nm}$ $(m=0,1,2\cdots)$ を用いてビーム導波系のレンズ半径の有限性を考慮した場合の固有モードは $z=d/2$ において

$$\Psi_n(r,\theta,d/2) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\, \psi_m^{(+)}(r,\theta,d/2) \tag{46}$$

と書くことができる。

(44)式のマトリックス $\alpha$ はやや複雑な形をしているのでこれより固有値及び固有関数を正確に既知関数によって表わすことは困難であるのでここでは量子力学のシュレーディンガー方程式の解法にしばしば用いられる摂動法を用いて(44)式の固有値，固有ベクトルを近似的に求める。まずマトリックス $\alpha$ を(47)式のように無摂動の状態の展開係数マトリックス $\alpha^{(0)}$ を用いて次の様に表わす。[4]

$$\alpha = \alpha^{(0)} + \varepsilon \alpha^{(1)} \tag{47}$$

ここで摂動の基準となる無摂動マトリックス $\alpha^{(0)}$ はレンズ半径が無限大すなわち回折損失のない場合の展開係数マトリックス

を意味し，$\varepsilon\alpha^{(1)}$ はレンズ半径が無限大の場合からの偏差である。摂動項 $\varepsilon\alpha^{(1)}$ は無摂動項 $\alpha^{(0)}$ に比べて非常に小さく $\varepsilon$ はここでは仮想的に導入した因数で $\varepsilon=1$ に対する結果がここでは物理的に意味を持つ。$\alpha^{(0)}$ の要素 $\alpha^{(0)}_{mn}(d/2)$ は(33)式より

$$\alpha^{(0)}_{mn}(d/2) = \delta_{mn}\cdot\exp\left\{2j\left[-k\frac{d}{2}+(m+n+1)\arg P_0\right]\right\} \tag{48}$$

であり無摂動状態の固有方程式；

$$\alpha^{(0)}A^{(0)}_n = \lambda^{(0)}_n A^{(0)}_n \tag{49}$$

の固有値 $\lambda^{(0)}_n$ 及び $\lambda^{(0)}_n$ に属する固有ベクトル $A^{(0)}_n$ の要素 $a^{(0)}_{nm}$ は

$$\lambda^{(0)}_n = \exp\left\{2j\left[-k\frac{d}{2}+(2n+1)\arg P_0\right]\right\} \tag{50}$$

$$a^{(0)}_{nm} = \delta_{nm} \tag{51}$$

である。ここで $\lambda^{(0)}_n$ には固有値の重なり(縮退)がないと仮定すれば(44)式の固有値及び固有ベクトルを次の様に $\varepsilon$ のベキで展開できる。

$$\lambda_n = \lambda^{(0)}_n + \varepsilon\lambda^{(1)}_n + \varepsilon^2\lambda^{(2)}_n + \cdots \tag{52}$$

$$A_n = A^{(0)}_n + \varepsilon A^{(1)}_n + \varepsilon^2\lambda^{(2)}_n + \cdots \tag{53}$$

これらを(44)式に代入して $\varepsilon$, $\varepsilon^2$ などの項を取り出して各次数についての関係式を求る。

$\varepsilon$ の項　$(\alpha^{(0)}-\lambda^{(0)}_n)A^{(1)}_n = \lambda^{(1)}_n A^{(0)}_n - \alpha^{(1)}A^{(0)}_n$ (54)

$\varepsilon^2$ の項　$(\alpha^{(0)}-\lambda^{(0)}_n)A^{(2)}_n = \lambda^{(2)}_n A^{(0)}_n + \lambda^{(1)}_n A^{(1)}_n - \alpha A^{(1)}_n$ (55)

(54)式より固有値，固有ベクトルの1次変化，(55)式より2次変

化が求まり各々を2次までで近似すれば

$$\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)}$$
$$= \lambda_n^{(0)} + \alpha_{nm}^{(1)}(d/2) - \sum{}' \frac{[\alpha_{mn}^{(1)}(d/2)]^2}{\lambda_m^{(0)} - \lambda_n^{(0)}} \tag{56}$$

$$A_n = A_n^{(0)} + A_n^{(1)} + A_n^{(2)}$$
$$= A_n^{(0)} - \sum_m{}' \frac{\alpha_{mn}^{(1)}(d/2)}{\lambda_m^{(0)} - \lambda_n^{(0)}} + \sum_m h_m A_m^{(0)} \tag{57}$$

$$h_m = \sum_{(k\neq n)}{}' \frac{\alpha_{mk}^{(1)}(d/2)\alpha_{kn}^{(1)}(d/2)}{(\lambda_m^{(0)} - \lambda_n^{(0)})(\lambda_k^{(0)} - \lambda_n^{(0)})} - \frac{\alpha_{nn}^{(1)}(d/2)\alpha_{mn}^{(1)}(d/2)}{\lambda_m^{(0)} - \lambda_n^{(0)}} \quad (m\neq n)$$
$$h_n = -\frac{1}{2}\sum_{(\ell\neq n)}{}' \frac{\alpha_{\ell n}^{(1)}(d/2)}{(\lambda_\ell^{(0)} - \lambda_n^{(0)})^2} \qquad (m=n) \tag{58}$$

となる。

固有値の1次変化(33), (48)式より

$$\lambda_n^{(1)} = \alpha_{nn}^{(1)}(d/2) = \alpha_{nn}(d/2) - \alpha_{nn}^{(0)}(d/2)$$
$$= \exp\left\{2j\left[-k\frac{d}{2} + (2n+1)\arg P_0\right]\right\}\left\{\int_0^A L_n(x)^2 e^{-x}dx - 1\right\}, \quad A = \frac{a^2}{W_0^2} \tag{59}$$

と書け2次変化は

$$\lambda_n^{(2)} = -e^{-jkd}\sum_m{}' \frac{\left\{\int_0^A L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx\right\}^2}{\exp\{-2j(2n+1)\arg P_0\} - \exp\{-2j(2m+1)\arg P_0\}} \tag{60}$$

となる。(50), (59), (60)式より固有値 $\lambda_n$ は

$$\lambda_n = \exp\left\{-2j\left[k\frac{d}{2} - (2n+1)\arg P_0\right]\right\}\cdot\left\{\int_0^A L_n(x)^2 e^{-x}dx\right.$$
$$\left. - e^{-2j(2n+1)\arg P_0}\sum_m{}' \frac{\left\{\int_0^A L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx\right\}^2}{\exp\{-2j(2n+1)\arg P_0\} - \exp\{-2j(2m+1)\arg P_0\}}\right\}$$

$$= \exp\left\{-2j\left[k\frac{d}{2}-(2n+1)\arg P_0\right]\right\}\left\{\int_0^A L_n(x)^2 e^{-x}dx - \frac{1}{2}\sum_m{}'\left[\int_0^A L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx\right]^2\right.$$

$$\left. + j\frac{1}{2}\sum_m{}'\cot[2(m-n)\arg P_0]\left[\int_0^A L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx\right]^2\right\} \qquad (61)$$

とおう。ここで

$$\int_0^A L_n(x)L_m(x)e^{-x}\,dx \equiv Q_{nm} \qquad (62)$$

と書けば固有値の大きさは

$$|\lambda_n| = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \qquad (63)$$

$$\left.\begin{aligned} X_n &= Q_{nn} - \frac{1}{2}\sum_m{}' Q_{nm}^2 \\ Y_n &= \frac{1}{2}\sum_m{}'\cot[2(m-n)\arg P_0]\cdot Q_{nm}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

と書ける。図6～図18に(63)式より求めた数値例を示す。これらはすべて$|\lambda_0|$に関するもののみである。

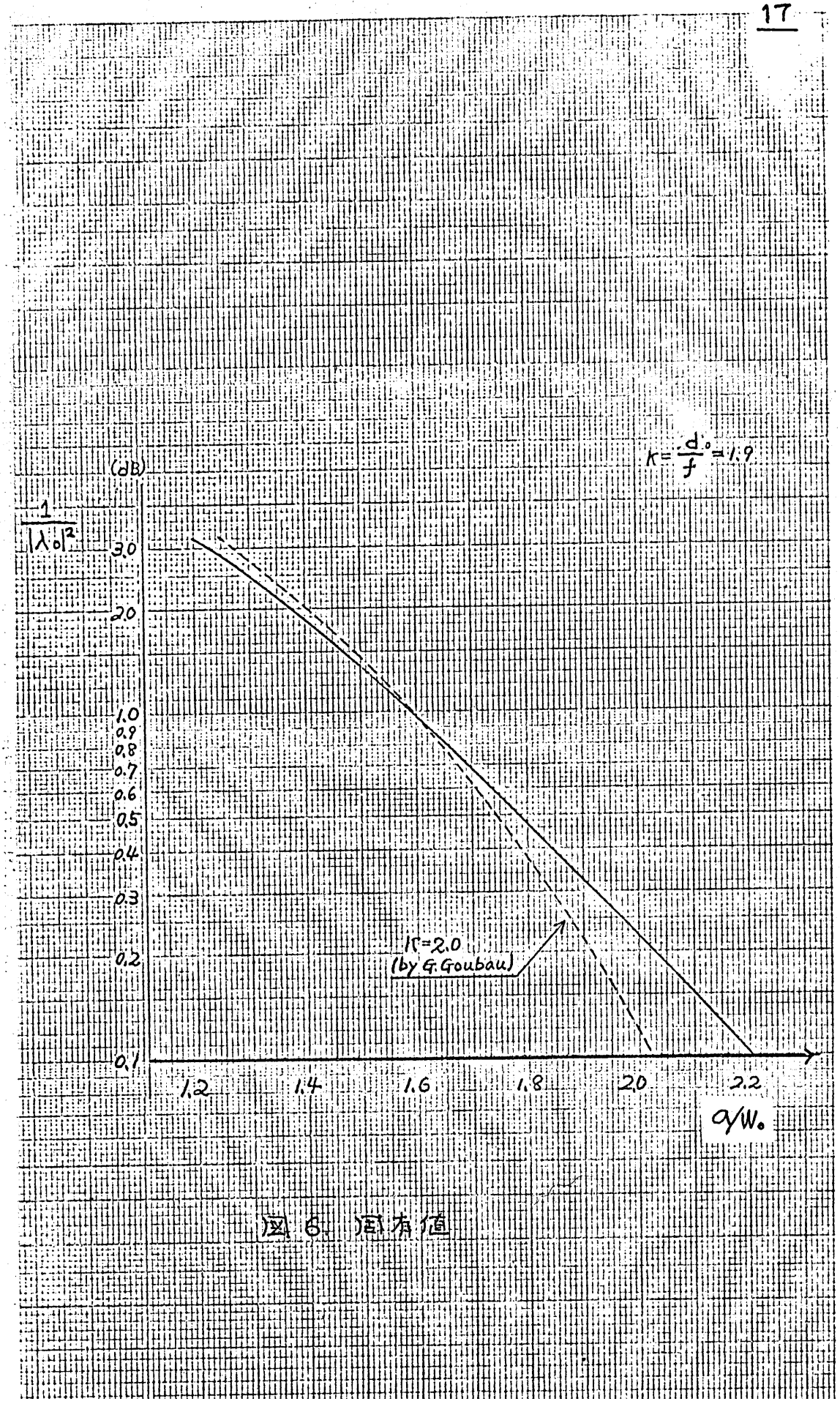

$K=\frac{d^\circ}{f}=1.9$
(dB)
$\frac{1}{|\lambda_0|^2}$
3.0
2.0
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
K=2.0
(by G. Goubau)
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
$q/W_0$

図 6. 固有値

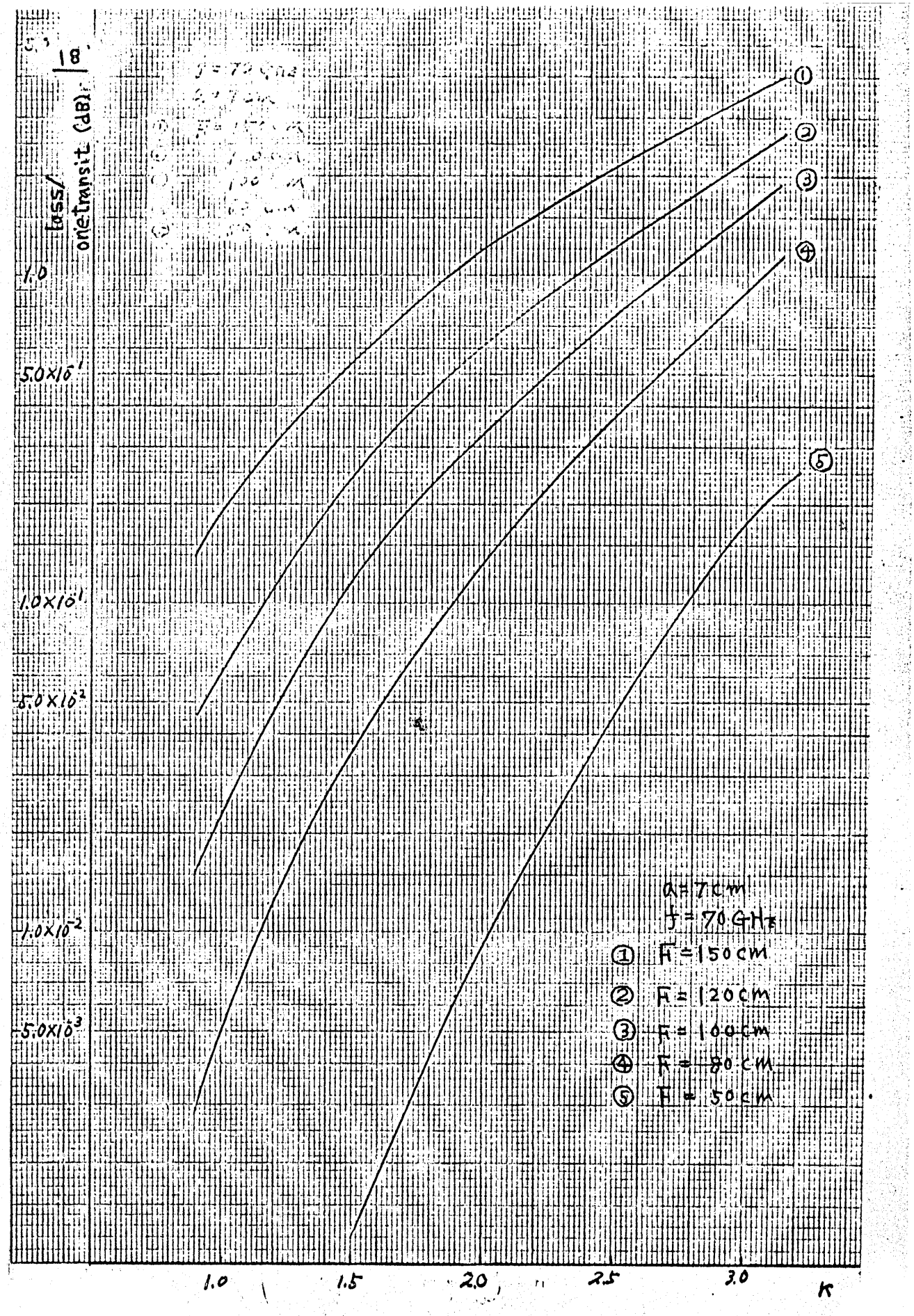



図7. 焦点距離一定に対する損失(基本波)

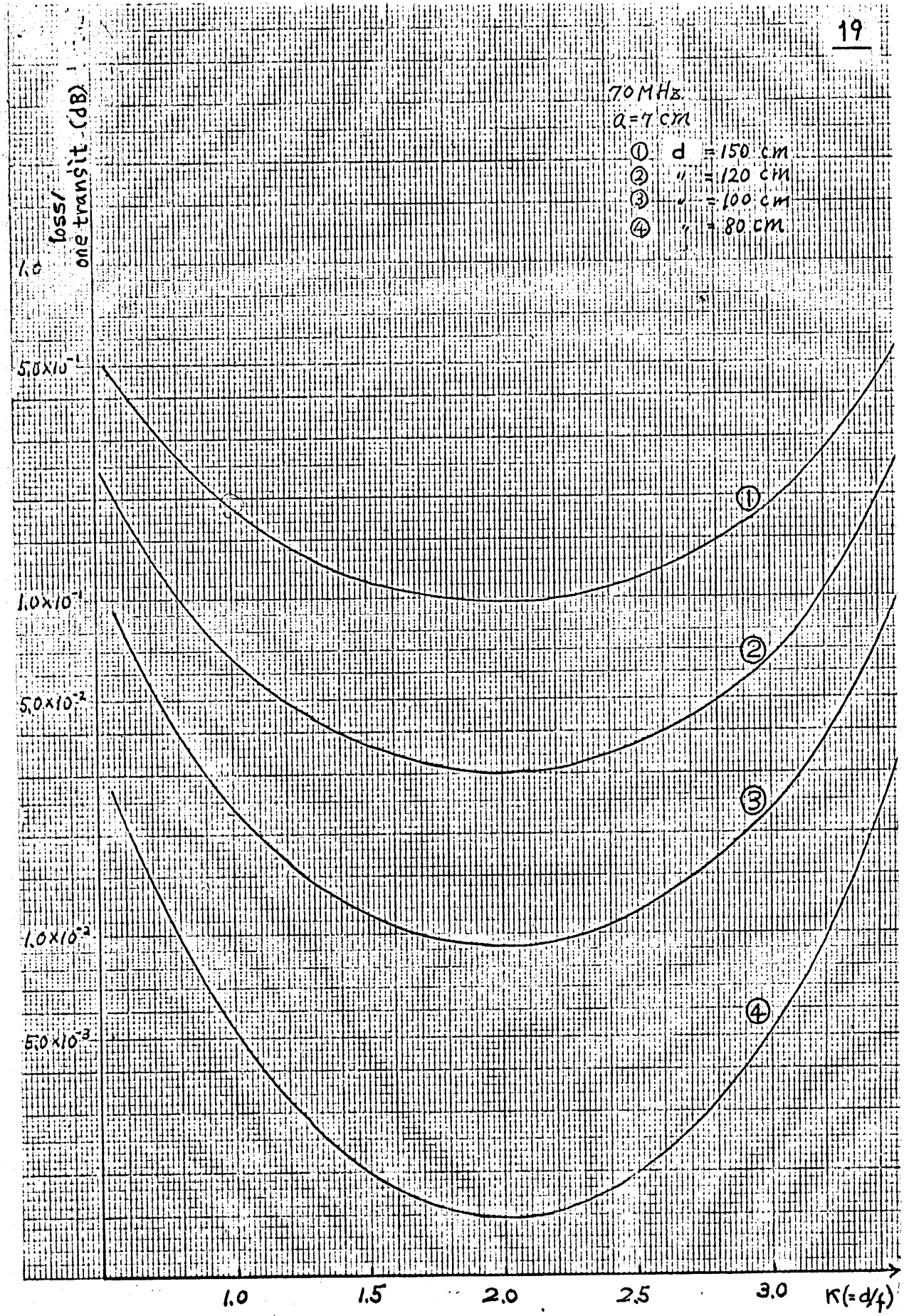



図. 8. レンズ間隔一定に対する損失(基本波)

## § あとがき

レンズ列ビーム導波系(非共焦点系)の回折損失と透過係数を含むモード変換係数を用いて解析を行った。第1節ではモード分離の大きさを示す展開係数(透過係数，変換係数を求めたが，これを用いると例えば単一モード励振の際における各区間内の高次モードの発生状態を数値的に求めることが可能である。第2節では非共焦点系の回折損失を第1節の展開係数より求めたが，レンズ間隔一定のとき共焦点の近傍では回折損失に大きな差は生じないことが明らかとなった。

## 参考文献


[1] G.Goubau and F.Schwering：IRE Trans. AP-9，P248 (May 1961)

[2] J.Beyer and E.H.Scheibe：IEEE Trans. MTT-11，NO.1 P.18 (Jan. 1963)

[3] A.Erdely；"Tables of Integral Transforms"，vol.2 P.43，McGraw-Hill Book Co (1954)

[4] 例えば 小谷正雄『量子力学I』岩波全書 (1965)

# 周期的に開口を設けた漏洩導波管の放射指向性

同志社大学工学部
繁沢宏，滝山敬

昭和44年2月

輻射科学研究会資料

# 周期的に開口を設けた漏洩導波管の放射指向性

繁沢宏，滝山敬
同志社大学工学部

## 1. はじめに

現在漏洩導波管として用いられている代表的なものに矩形或いは円形導波管の管壁に周期的に漏洩孔を設けたものと，[1] 本来が開放構造である導波管を使用するものとがある。[2],[3]

この様な導波管からの放射の問題を厳密に取り扱うには導波管の内部の電磁界と外部のそれとを与えられた境界条件のもとに正しく関連づけねばならず一般的には非常に困難な問題である。そこでこれを近似的に解決する方法として，漏洩孔上の界分布を仮定して導波管内部と外部における問題を切り離して取り扱っていく方法が従来からとられている。[4],[5] また伝送電力の一部が放射によって失われるため，仮定した界分布の強度は伝送軸に沿って必らずしも一様でないが，わずかの電力しか漏洩しないものについては伝送軸に垂直な断面内の指向性については一様な分布を仮定してもよい結

果が得られる事がわかっている。[5] 本文でもこの様な仮定のもとに管壁上に全く任意な形状を有する漏洩孔が周期的に伝送軸に沿って設けられている導波管からの放射指向性を考察してみた。この時導波管断面が特別な形状を有している場合を除いては放射指向性に完全導体である管壁の影響を考慮するのは、特に矩形断面を有している場合には非常に困難となる。そこでこれに対する近似的解決法として筆者らが以前に提案した方法[6],[7]つまり矩形断面を適当に近似した楕円断面で置き換える方法を導入して矩形導波管にスロット列を設けた場合の放射指向性を解析し、実験結果とよい一致をみたのでここに御報告する次第である。

## 2. 楕円筒上の周期的漏洩孔による放射指向性

ここでは先ず任意形状の漏洩孔が周期的に伝送軸に沿って設けられている導波管からの放射指向性の一般的な解析法を示す為に楕円筒導波管を例にして述べる事にする。その後この結果を用いて楕円断面近似によって矩形導波管に対する近似放射指向性を導出する事にする。図1に示す様に楕円筒座標系$(\xi, \eta, z)$において、任意な形状の漏洩孔が間隔$c$で$z$軸に沿って周期的に

$\xi=\xi_0$ で示せる筒上に設けられているものについて考える。

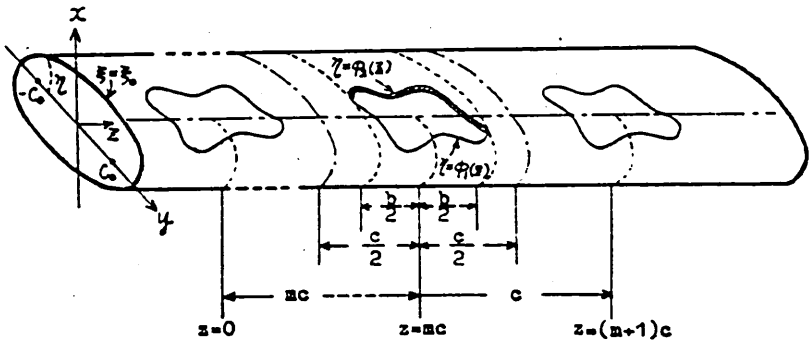



図 1　楕円筒上に周期的に配列された任意形状開口

一つの漏洩孔は $z$ 軸に沿って $|z-nc|\leqq b/2$ ($n$:整数) の間に存在し，その間の $z$ に対し孔の形状が $\phi_1(z)\leqq\eta\leqq\phi_2(z)$ で定められ，これらの孔が $e^{-jhz}$ なる位相変化をする管内進行波で励振されているとする。この時前述した様に $z=0$ を中心として設けてある孔 ($n=0$) における電界成分 $E_z$, $E_\eta$ が各々 $e_z(\eta,z)$, $e_\eta(\eta,z)$ で与えられたと仮定し，又さらに $n$ 番目の孔 ($z=nc$) では，それらの位相のみが $n=0$ のものに対して一様に $e^{-jhnc}$ だけ遅れているものと仮定する。この様にすると $|z-nc|\leqq c/2$ の間の管壁上の電界成分は次の様に示す事が出来る。

$$E_{\alpha n}=\begin{cases} e_\alpha(\eta,z)e^{-jhnc}, & [\phi_1(z)\leqq\eta\leqq\phi_2(z),\ |z-nc|\leqq b/2\ ] \\ 0, & [|z-nc|\leqq c/2 \text{ の間で上記以外の } \eta,z \text{ 領域}] \end{cases} \quad (1)$$

但し，$\alpha$ は $\eta$ 或いは $z$ 成分を示すものとする。

従って筒上で与えられる電界成分は $z$ 方向に無限長の導波管を仮定して

$$E_\alpha(\eta,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_\alpha(\eta,z)e^{-jhnc}, \quad [\phi_1(z)\leqq\eta\leqq\phi_2(z), |z-nc|\leqq b/2] \tag{2}$$

として与えられる。この様な界分布は $\eta, z$ 両方向に部分的にしか連続でないから，今 $|z-nc|\leqq b/2$ の間の任意の $z$ 上で界 $e_\alpha(\eta,z)$ を Mathieu 角関数 $Se_{,on}(\eta)$ で次の様に展開しておく。

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_\alpha(\xi_0,\eta)e_\alpha(\eta,z), & [\phi_1\leqq\eta\leqq\phi_2] \\ 0 & [\text{その他の}\eta\text{領域}] \end{array}\right\}=\sum_{m=0}^{\infty} f_{\alpha,m}^{e,o}(z)Se_{,om}(\eta) \tag{3}$$

但し，$\varepsilon_\alpha(\xi_0,\eta)$ は $\alpha$ が $z$ 成分を示す場合は 1，$\eta$ 成分を示す場合は測度係数 $t(\xi_0,\eta)=c_0[\cosh^2\xi_0-\cos^2\eta]^{1/2}$ （$c_0$ は楕円面の焦点距離）を示す関数とし，$\eta$ 成分に対してはこの様に $te_\eta$ を展開するのが便利である。ここで $Se_{,om}(\eta)$ の直交性を用いると (3) 式より $f_{\alpha,m}^{e,o}$ は次式の様に求まる。

$$f_{\alpha,m}^{e,o}(z)=\frac{1}{N_m^{e,o}}\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}\varepsilon_\alpha(\xi_0,\eta)e_\alpha(\eta,z)Se_{,om}(\eta)d\eta \tag{4}$$

但し，$N_m^{e,o}$ は $Se_{,om}(\eta)$ の正規化因数である。

(4) 式を用いれば (2) 式は次の様になる。

$$\mathcal{E}_\alpha(\xi_0,\eta)E_\alpha(\eta,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_{\alpha,m}^{e,o}(z)e^{-jhnc}\right]S_{e,om}(\eta) \tag{5}$$

但し, $|z-nc|\leqq b/2$

次に(5)式のzに関する項については, その周期性を考えて次の様に空間高調波成分で展開する.

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_{\alpha,m}^{e,o}(z)e^{-jhnc}, \quad [|z-nc|\leqq b/2] \\ 0 \quad , \quad [b/2\leqq|z-nc|\leqq c/2]\end{array}\right\}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}A_{\alpha,p}^{e,o}\cdot e^{-j(h+p\frac{2\pi}{c})z} \tag{6}$$

但し $A_{\alpha,p}^{e,o}$ は未知係数である. (6)式の両辺に $e^{j(h+p\frac{2\pi}{c})z}$ をかけてzの一周期にわたって積分すると

$$A_{\alpha,p}^{e,o}=\frac{1}{c}\int_{-b/2}^{b/2}f_{\alpha,m}^{e,o}(z)e^{j(h+p\frac{2\pi}{c})z}\,dz \tag{7}$$

を得るからこれに(4)式を代入すると次式を得る.

$$A_{\alpha,p}^{e,o}=\frac{1}{N_m^{e,o}\cdot c}\int_{-b/2}^{b/2}dz'\int_{\phi_1(z')}^{\phi_2(z')}\mathcal{E}_\alpha(\xi_0,\eta')e_\alpha(\eta',z')S_{e,om}(\eta')e^{j(h+p\frac{2\pi}{c})z'}\,d\eta' \tag{8}$$

但し, 後の複雑化をさける為(8)式の変数に(′)をつけておいた. 従って(6),(8)式を用いて(5)式より $E_\alpha(\eta,z)$ を簡上で連続的な関数によって示すことができ次の様になる.

$$\mathcal{E}_\alpha(\xi,\eta)E_\alpha(\eta,z)=\frac{1}{c}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-b/2}^{b/2}dz'\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z')}\mathcal{E}_\alpha(\xi_0,\eta')e_\alpha(\eta',z')\cdot S_{e,om}(\eta')\cdot S_{e,om}(\eta)\cdot e^{-j(h+p\frac{2\pi}{c})(z-z')}\,d\eta' \tag{9}$$

on $\xi=\xi_0$

この様に $\xi=\xi_0$ 上での $E_z, E_\eta$ 両成分が表示出来たから次に楕円筒座標系において筒外の一般界表示を行ない，そのEzおよびEη成分が $\xi=\xi_0$ 上で夫々(9)式の対応するものと等しくなるべき事より一般界表示式中に含まれる未知係数を決定すれば良い事になる。この一般界表示式としては今考えている導波管の構造がz方向に周期性を有している事から，界を空間高調波成分の集合として示すのが便利であるから $E_z, H_z$ 両成分を次の様に示す事にする。

$$E_z(\xi,\eta,z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\zeta_p^2\,a_{p,m}^{e,o}\cdot Se,om(\eta)\cdot He,om^{(2)}(\xi)\right]e^{-jh_pz} \qquad (10)$$

$$H_z(\xi,\eta,z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\zeta_p^2\,b_{p,m}^{e,o}\cdot Se,om(\eta)\cdot He,om(\xi)\right]e^{-jh_pz} \qquad (11)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} h_p &= h+p\frac{2\pi}{c} \qquad (h_0=h\ \text{とする}) \\ K_0^2-h_p^2 &= \zeta_p^2 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ここで $a_{p,m}^{e,o}$ , $b_{p,m}^{e,o}$ は未知振巾係数である。
(10),(11)式より他の界成分が求まり，例えばEη成分は次の様になる事は明らかである。

$$t(\xi,\eta)\cdot E_\eta(\xi,\eta,z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[-jh_p\,a_{p,m}^{e,o}\frac{\partial Se,om}{\partial\eta}\cdot He,om^{(2)}\right.$$
$$\left.+j\omega\mu_0\,b_{p,m}^{e,o}\cdot Se,om\cdot\frac{\partial He,om^{(2)}}{\partial\xi}\right]e^{-jh_pz} \qquad (13)$$

従って $\xi=\xi_0$ 上で (10),(13) 式が夫々 (9) 式の対応する成分と一致すべき事より $a_{p,m}^{e,0}$, $b_{p,m}^{e,0}$ が次の様に求まる。

$$a_{p,m}^{e,0}=\frac{1}{\zeta_p^2\cdot C\cdot N_m^{e,0}\cdot He_{,om}^{(2)}(\xi_0)}\int_{-b/2}^{b/2}dz'\int_{\phi_1(z')}^{\phi_2(z')}e_z(\eta',z')\cdot Se,om(\eta')e^{jh_pz'}d\eta' \tag{14}$$

$$b_{p,m}^{e,0}=\frac{1}{j\omega\mu_0 C\cdot N_m^{e,0}\cdot He,om^{(2)\prime}}\left[\int_{-b/2}^{b/2}dz'\int_{\phi_1(z')}^{\phi_2(z')}t(\xi_0,\eta')e_\eta(\eta',z')\cdot Se,om(\eta')\cdot e^{jh_pz'}d\eta'+j\frac{h_p}{\zeta_p^2}\int_{-b/2}^{b/2}dz'\int_{\phi_1(z')}^{\phi_2(z')}e_z(\eta',z')\frac{\partial Se,om(\eta')}{\partial\eta'}\cdot e^{jh_pz'}d\eta'\right] \tag{15}$$

この様に上式で求まった係数を用いて (10),(11),(13) 式などの界成分を求めれば筒外の電磁界が得られ、任意の $\xi$ 上で $\eta$ に関する指向性が求められる。

今筒面から波長に比して充分遠方の領域では漸近展開式が径 Mathieu 関数に対して適用出来、さらに楕円筒系における $\xi,\eta$ 及び $z$ 成分が円筒系の $\rho,\phi$ 及び $z$ 成分と一致する事より遠方における $E_z$ 及び $E_\phi$ 成分は

$$E_z(\rho,\phi,z)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\zeta_p^2\cdot a_{p,m}^{e,0}\cdot Se,om(\phi)\frac{e^{j\frac{m\pi}{2}}}{\sqrt{\zeta_p}}\right]\cdot e^{-j(\zeta_p\rho+h_pz-\frac{\pi}{4})} \tag{16}$$

$$E_\phi(\rho,\phi,z)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}j\omega\mu_0\cdot b_{p,m}^{e,o}\cdot S_{e,om}(\phi)\frac{\sqrt{\zeta_p}}{2}\cdot e^{j\frac{m\pi}{2}}\right]\cdot e^{-j(\zeta_p\rho+h_pz+\frac{\pi}{4})} \tag{17}$$

の様に求まる。従って各界成分の指向性関数はφのみならずρ,zの関数になり,それぞれを$F_z(\rho,\phi,z)$, $F_\phi(\rho,\phi,z)$とすると次式で示す事が出来る。

$$F_z(\rho,\phi,z)=\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\zeta_p^{\frac{3}{2}}\cdot a_{p,m}^{e,o}\cdot S_{e,om}(\phi)e^{j\frac{m\pi}{2}}\right]e^{-j(\zeta_p\rho+h_pz)}\right| \tag{18}$$

$$F_\phi(\rho,\phi,z)=\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\zeta_p}\cdot b_{p,m}^{e,o}\cdot S_{e,om}(\phi)e^{j\frac{m\pi}{2}}\right]e^{-j(\zeta_p\rho+h_pz)}\right| \tag{19}$$

## 3. スロット列を設けた矩形導波管の指向性

前節で示した解析法が実際の漏洩導波管の解析に有効である事を示す為に,矩形導波管を取り上げ,管壁に任意形状の開口を周期配列した場合を検討してみる。
なお矩形導波管に対しては筆者が提案した楕円近似法を導入して楕円導波管の問題に変換出来るから前節の結果がそのまま適用出来る。
ここで任意形状の開口と云ったが,特に複雑な場合について検討しなくとも前節の結果の妥当性を示すには充分であり,又,実際に用いられるのは簡単なスロット列の場合が殆んど

である事から，今図2に示す様に矩形導波管の一方のE面の $x=x_s$ にz軸に沿う長さがb，幅無限小の線状スロットが間隔c（>b）で設けてある場合を考え，スロットが管内進行波の $TE_{10}$ 姿態で励振されているとする。

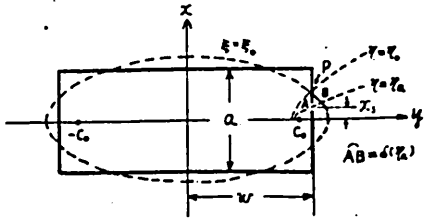



図2　片側のE面にスロット列を設けた漏洩矩形導波管

かかる時にはスロット上の電界成分は $E_x$ 成分のみと考えられ，さらにわづかな電力しか漏洩する必要がないとするとスロット長bは使用波長に対し短かく非共振状態であるとしてよい。この時 $z=0$ を中心にして設けられているスロット上の電界成分は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} e_y(x,w,z) &= \delta(x-x_s)\cos\frac{\pi}{b}z \\ e_z(x,w,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{on } y=w \qquad (20)$$

但し，$\delta$ はDiracのデルタ関数である。

この分布から近似楕円筒 $\xi=\xi_0$ 上のスロットの界分布を求める為，位相補償項を導入して

$$e_\eta(\xi_0,\eta,z)=\delta(\eta-\eta_s)\cos\frac{\pi}{b}\cdot e^{-jD(\eta_s)} \qquad (21)$$

を得る。ここで$\eta_s$は楕円筒上に移したスロットを通る$\eta$座標で座標間の関係より

$$x_s^2=W^2\tan^2\eta_s-C_0^2\sin^2\eta_s \qquad (22)$$

で定まるものである。

(21)式を(14),(15)式に代入すると$a_{p,m}^{e,o}$, $b_{p,m}^{e,o}$が次式の様に求まる。

$$b_{p,m}^{e,}=\frac{t(\xi_0,\eta_s)Sem(\eta_s)e^{-jD(\eta_s)}}{j\omega\mu_0 C N_m^e\cdot He_m^{(2)\prime}(\xi_0)}\int_{-b/2}^{b/2}\cos\frac{\pi}{b}z'\cdot e^{jh_pz'}dz'$$

$$=\frac{t(\xi_0,\eta_s)Sem(\eta_s)e^{-jD(\eta_s)}}{j\omega\mu_0 C N_m^e\cdot He_m^{(2)\prime}(\xi_0)}\cdot\frac{2(\frac{\pi}{b})}{[(\frac{\pi}{b})^2-h_p^2]}\cos\frac{h_pb}{2} \qquad (23)$$

$$a_{p,m}^{e,o}=b_{p,m}^{o}=0 \qquad (24)$$

ここで(23),(24)式より指向性関数を求めるために(12)式で示したp次空間高調波の位相定数$h_p$について検討してみる。

進行波からの放射はz方向に関してFast Waveとなるものに限られるから(16),(17)式などで示される無限個の空間高調波のうち放射に寄与する成分はFast Waveとなるもので

$$\left|\frac{K_0}{h_p}\right|=\left|\frac{\lambda_p}{\lambda_0}\right|>1 \qquad (25)$$

なる条件を満足するものである。

ここで $\lambda_p$ は p 次空間高調波の伝送波長で(12)式より

$$\lambda_p = \frac{\lambda_g}{1+\frac{p}{c}\lambda_g} \qquad (26)$$

で与えられる．但し，$\lambda_g$ は $p=0$ の基本波の管内波長で $\lambda_g > \lambda_0$ を満足している．今 $\lambda_g$ が矩形導波管 $TE_{10}$ 姿態の管内波長とすれば $\lambda_g$ は $\lambda_0$ よりも若干長いだけだから(25)式を満足する空間高調波はスロット間隔 c が比較的大きい場合には低次のものに限られてくる。この様な検討から(23)式を振り返ってみると $b \ll \lambda_g$ の場合には

$$b^e_{p,m} \cong \frac{t(\xi_0,\eta_s)\,Sem(\eta_s)\,e^{-jD(\eta_s)}}{j\omega\mu_0 c\, N^e_m \cdot H^{(2)\prime}_{em}(\xi_0)} \cdot \frac{2b}{\pi} \qquad (27)$$

となる。この結果はスロットの長さ b を無視し，(20)式で与えた $e_y(x,w,z)$ の代りに

$$e_y(x,w,z) = \delta(x-x_s)\cdot\delta(z) \qquad (28)$$

なる開口分布を仮定して求めたもの，つまり

$$b^e_{p,m} = \frac{t(\xi_0,\eta_s)\,Sem(\eta_s)\,e^{-jD(\eta_s)}}{j\omega\mu_0 c\, N^e_m \cdot H^{(2)\prime}_{em}(\xi_0)} \qquad (29)$$

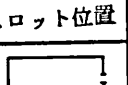
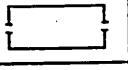
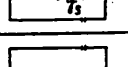
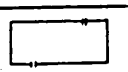
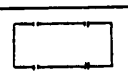
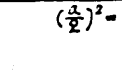
に対してその大きさが m, p に関係なく $\frac{2b}{\pi}$ 倍されているに過ぎず，(27)式は大きさの無視出来る微小開口列の場

合の結果と開口の励振強度の違いを除けば同等であり、従って指向性には何んらの影響も現われない事になる。従って $b^{e}_{p,m}$ として(29)式を用い、これを(18),(19)式に代入すれば $E_z$ 成分は放射されず、$E_\phi$ 成分の近似放射指向性関数として

$$F_\phi(\rho,\phi,z)=\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}{}^{*}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\xi_p}\,\frac{S_{em}(\gamma_s)S_{em}(\phi)\,e^{j\frac{m\pi}{2}}}{N^{e}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{em}(\xi_0)}\right]e^{-j(\xi_p\rho+h_pz)}\right| \tag{30}$$

が導ける。ここで $\sum_p^{*}$ は(25)式の条件を満足するpのみに関する和を示すものとする。この結果より任意の壁面に微小スロット列を設けた場合の指向性関数が求められ、これをまとめると表1の様に示せる。

表1　スロット列を有する各種漏洩矩形導波管の指向性関数

| | スロット位置 | 指向性関数 $F_\phi(\rho,\phi,z)$ : | |
|---|---|---|---|
| a |  | $\left\lvert\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sqrt{\xi_p}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{S_{em}(\phi)\exp(jm\pi/2)}{N^{e}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{em}(\xi_0)}\right]e^{jD_p}\right\rvert$ | (31) |
| b |  | $\left\lvert\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sqrt{\xi_p}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{S_{em}(\phi)\exp(jm\pi/2)}{N^{e}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{em}(\xi_0)}\right]e^{jD_p}\right\rvert$ | (32) |
| c |  | $\left\lvert\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sqrt{\xi_p}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{S_{em}(\gamma_s)\cdot S_{em}(\phi)\exp(jm\pi/2)}{N^{e}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{em}(\xi_0)}\right]e^{jD_p}\right\rvert$ | (33) |
| d |  | $\left\lvert\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sqrt{\xi_p}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{S_{e,om}(\gamma_s)\cdot S_{e,om}(\phi)\exp(jm\pi/2)}{N^{e,o}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{e,om}(\xi_0)}\right]e^{jD_p}\right\rvert$ | (34) |
| e |  | $\left\lvert\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sqrt{\xi_p}\left[\sum_{m=1}^{\infty}{}^{*}\frac{S_{e,om}(\gamma_s)\cdot S_{e,om}(\phi)\exp(jm\pi/2)}{N^{e,o}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{e,om}(\xi_0)}\right]e^{jD_p}\right\rvert$ | (35) |
| f |  | $\left\lvert\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sqrt{\xi_p}\left[\sum_{m=1}^{\infty}{}^{**}\frac{S_{em}(\gamma_s)\cdot S_{em}(\phi)\exp(jm\pi/2)}{N^{e}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{em}(\xi_0)}+\sum_{m=2}^{\infty}{}^{**}\frac{S_{om}(\gamma_s)\cdot S_{om}(\phi)\exp(jm\pi/2)}{N^{o}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{om}(\xi_0)}\right]e^{jD_p}\right\rvert$ | (36) |
| g |  | $\left\lvert\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sqrt{\xi_p}\left[\sum_{m=1}^{\infty}{}^{*}\frac{S_{em}(\gamma_s)\cdot S_{em}(\phi)\exp(jm\pi/2)}{N^{e}_{m}\cdot H^{(2)\prime}_{em}(\xi_0)}\right]e^{jD_p}\right\rvert$ | (37) |

$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\gamma_s^2\tan^2\gamma_s-C_0^2\sin\gamma_s$

## 4. 実験

お節までに述べてきた結果を実験的に確かめるため数種の導波管について測定を行なった。表1の(31)～(37)式で示した指向性はスロット間隔cを適当に選んでやれば(26)式からわかる様にp=0の基本波のみをFast Waveにした時のものを示す事にもなり，これは以前に示した線状スリットの場合の指向性と一致するので省略する。次に空間高調波もFast Waveになる場合を確かめる為，導波管($a=1.2\,cm$, $w=1.1\,cm$, 楕円近似では$c_0=1.077\,cm$, $\tanh\xi_0=0.6$)の一方のH面中央にz軸に沿う辺の長さが0.3 cm，他辺が0.2 cmのスロットを間隔$c=2.5\,cm$で設け，$f=9.38\,GC$にて実験を行なう事とした。この時p=0の基本波とp=-1の高調波成分のみがFast Waveとなり，遠方での放射界に寄与する事になる。この場合の指向性は表1，(31)式で与えられ，簡単な計算によってz方向に$d_z=2.5\,cm$の又，φ方向に$d_\varphi=39.9\,cm$の周期で同一指向性が繰り返す事がわかり，その指向性の変化を示したのが図(3)である。又，空間の各φ，zに対する界強度も変化し，図(4)の実線で示す様になり，微小スロットの場合には，この様に

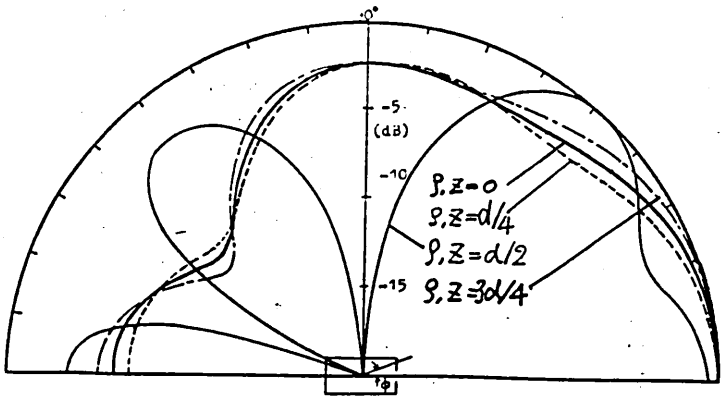
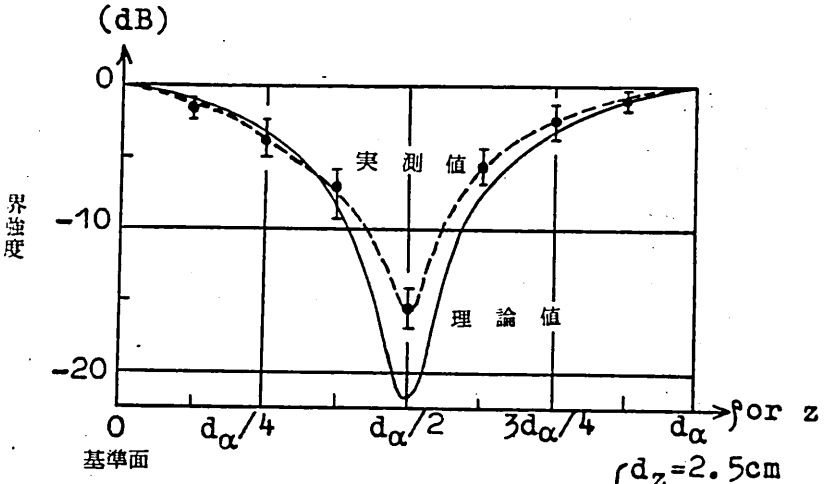



図3　片側E面中央にスロット列を設けた漏洩矩形導波管の放射指向性




$d_z = 2.5\text{cm}$
$d_\rho = 39.9\text{cm}$

図4　空間における界強度の変化
（点線はz軸に沿う界強度変化の実測値）

大きな界強度変化が周期的に生ずる事になる。今、全長3mの導波管を用い、その終端に無反射端(V.S.W.R≒1.1)を取りつけ、導波管中心から100cm離れた矣で指向性を測定した結果が図(5)に示すものである。なおここでは観測矣がz=0の基準面とそれからz=d²/λ=1.25cm離れた面内の2つのものについて示している。又、微小ダイポールアンテナをz軸に沿って移動させて界強度の変化を測定したのが図(4)の矣線にて示したものである。

これらの結果から明らかな様に本論文で述べた解析法による指向性の計算値と実測値とは良く一致する事がわかった。なお実測値と計算値との差異は断面形状の置換を行ったためによる違い、及びそれによる界の回折の様子の変化、さらにはCorner effectの影響などによるものと考えられる。本文では微小スロット列について検討したが、実測などによって開口上の界分布が与えられることを前提とすれば、開口の形状によって各空間高調波成分の強度が制御出来ることから興味ある応用面が考えられることにもなろう。

また当然本文の解析法は他の断面形状の導波管の場合にも応用でき、さらに連続的であるが周期的に開口の形状を変化させた様な場合にも広く応用できるもので

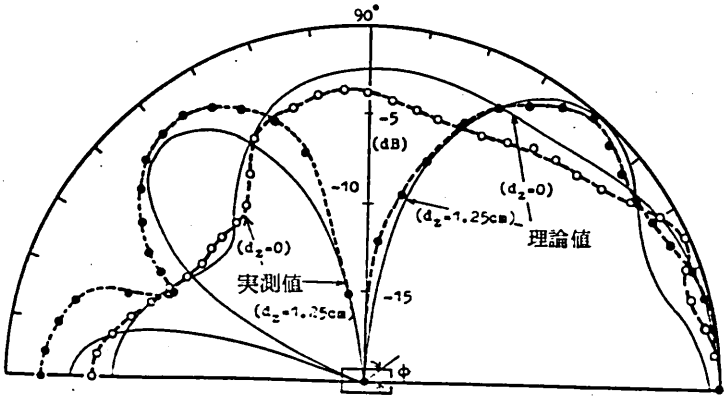



図5　片側E面中央にスロット列を設けた漏洩短形導波管の指向性の実測結果

先に発表した近似法と同様漏洩導波管の指向性の検討に対する一つの有効な手段になるものと考えられる。

なおこれ等の解析法を応用すれば漏洩導波管の複素伝ぱん定数の解析が容易に行なえるが、その解析結果については稿を改め次回に御報告するつもりである。

最後に実験、計算に関して御協力頂いた森本君(現三菱電機)及び本学院生藤山君に感謝します。

# 参考文献


(1) 例えば 中原, 倉内, 木谷: "円形漏洩導波管", 信学会マイクロ波研資, (昭43-01).

(2) 富田, 中原, 他: "漏洩導波管アンテナ", 信学会アンテナ研資, (昭40-07).

(3) 滝山, 繁沢: "漏洩Hーガイドのふく射特性", 信学誌 50, 2, P.181, (昭42-02).

(4) S. Silver, W.K. Saunders: "The external field produced by a slot in an infinite circular cylinder", J.A.P., 21, P.153, (Feb., 1950).

(5) R.F. Harrington: "Propagation along a slotted cylinder", J.A.P., 24, P.1366, (Nov., 1953).

(6) 繁沢, 森本, 滝山: "漏洩導波管の指向性の近似解法", 信学会マイクロ波研資, (昭42-11).

(7) 同上: "近似解法による各種漏洩導波管指向特性の検討", 電研資料, (昭43-02).

輻射科学研究会資料

# He－Neレーザの0.63μ，3.39μ間競合出力の定量化

永井治彦　　谷口一郎

冨島一成　　宮沢淑子

（三菱電機　中央研究所）

1969年2月28日

（於　三菱電機株式会社　中央研究所）

## 1. まえがき

He－Neガスレーザの6328Å線（Ne；$3s_2 \rightarrow 2p_4$）と3.39$\mu$線（Ne；$3s_2 \rightarrow 3p_4$）は上位準位を共有するので，3.39$\mu$線の発振により6328Å線の利得が著しく低減される。3.39$\mu$線の利得は6328Å線のそれより約2桁大きく，従って3.39$\mu$に対するレーザ共振器のQが低くても容易に発振し，6328Å線と3.39$\mu$線の発振競合状態が生ずる。3.39$\mu$線の発振はA．L．Bloomらによって最初に確認され[1]，その後E．I．Gordon，A．D．White，J．D．Rigdenによって利得の計算[2]，測定[3]，および6328Å線に対する影響について部分的に論じられている[4]。また最近Lambの理論を拡張して上位準位を共有する2遷移発振について理論的解析がおこなわれたり[5]，6328Å線と3.39$\mu$線の同時発振出力についての実験の報告もあるが[6][7]，6328Å出力に対する3.39$\mu$発振の影響について定量的に解析を進め，実験結果の説明を試みた報告はない。

我々は6328Å，3.39$\mu$がそれぞれ単独に発振している時の出力の計算を同時発振の場合に拡張し，両遷移とも単一モードで発振している時の3.39$\mu$発振出力に対する6328Å発振出力の変化を，5準位に対する定常状態の rate equation より定量的に解析し，実験結果と計算の一致をみた。

## 2. 同時発振時の6328Å線の利得の計算

He－Neレーザの6328Å，3.39$\mu$両線の発振はそれぞれNeの$3s_2 \rightarrow 2p_4$，$3s_2 \rightarrow 3p_4$ 間の分布反転によって達成される。

計算に考慮した5準位の間の遷移を図2.1に示す。

Cp ： Heの$2^1S$準位からNeの$3s_2$準位への衝突によるエネルギー伝達の遷移確率

Fmn ： 電子との衝突によるm準位からn準位への遷移確率

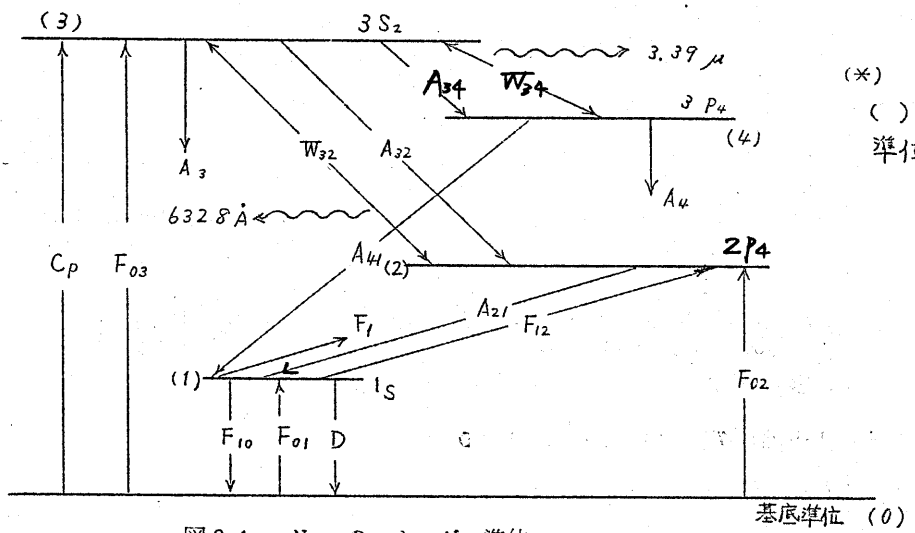
Amn ： m準位からn準位への自然放出の遷移確率

D ： 拡散による1s準位から基底準位への decay rate

Wmn ： m準位からn準位への誘導放出の遷移確率

$F_1$ ： 1s準位から2p準位への電子との衝突による遷移確率

Am ： m準位からの自然放出の全遷移確率




(※) ( ) の中の数字は準位の番号を示す

図2.1 Ne のエネルギー準位

5準位の定常状態のrate equation を解くと、$3S_2 \rightarrow 2P_4$間の分布反転数が得られ (1)式になる。

$$n_3 - n_2 = \frac{K_3}{K_1 + K_2 W_{32}} n_0 \qquad (1)$$

ただし　$K_1 = k_1 + k_3 W_{34}$ , $K_2 = k_2 + k_4 W_{34}$

$K_3 = k_5 + k_6 W_{34}$　　ni:i 準位のNe原子密度

ki= 遷移確率の関数

周波数$V_1^c$，強度$I_1(V_1^c)$の光がレーザ媒質内を通過したときの1 pass 当り，単位周波数当りの利得$g(V_1^c)$は

$$g(V_1^c) = \frac{h V_1^c}{I(V_1^c)} (n_3 - n_2) \cdot W_{32} \qquad (2)$$

とかける。

誘導放出の遷移確率 $W_{32}$ , $W_{34}$ はローレンツ型で表わされ,[2] スペクトル線がドップラー巾をもつことを考慮すると同時発振時の6328Å線の利得 $G(V_1^c)$ が(1), (2)より求められ(3)式になる。

$$G(V_1^c) \simeq \frac{g(b + I_2(V_2^c))/S_{21}}{\sqrt{(1+I_1(V_1^c)/S_{11})(b+I_2(V_2^c)/S_{22})\left(b + \frac{1+I_1(V_1^c)/S_{12}}{1+I_1(V_1^c)/S_{11}} I_2(V_2^c)/S_{22}\right)}} \qquad (3)$$

ただし，　$g = p(k_5/k_1) = \frac{h V_1^c B_{32} n_0}{\sqrt{\pi} C \Delta V_{D1}} \sqrt{\ln 2}\,(k_5/k_1) \exp\left[-\left(\frac{V_1^c - V_1^o}{\Delta V_{D1}}\right)^2 \ln 2\right]$

$b = 1 + \left[(V_2^c - V_2^o)/\Delta V_2\right]^2$

ここで，　$S_{11} = \pi C \Delta V_1 / B_{32}\,(k_2/k_1)$, $S_{12} = \pi C \Delta V_1 / B_{32}\,(k_4/k_3)$

$S_{22} = \pi C \Delta V_2 / B_{34}\,(k_3/k_1)$, $S_{21} = \pi C \Delta V_2 / B_{34}\,(k_6/k_5)$

$V_1^c$, $V_2^c$：6328 Å, 3.39 $\mu$ 線内の入射光周波数

$I_1(V_1^c)$, $I_2(V_2^c)$：$V_1^c$, $V_2^c$における光強度（発振状態では共振器内光強度）

C　：光速

$V_1'$ , $V_2'$ ：6328 Å, 3.39 $\mu$ 線内の周波数（ドップラー周波数）

$2\Delta V_1$ , $2\Delta V_2$ ：　6328 Å, 3.39 $\mu$ 線内のホールの半値巾

$V_1^o$, $V_2^o$　：　6328 Å, 3.39 $\mu$ 線の中心周波数

$S_{11}$, $S_{22}$はそれぞれ6328 Å, 3.39 $\mu$ に対する saturation parameter であり，gは6328Åの単位長当りの不飽和利得である。1 pass 当りの利得$G\ell$（$\ell$：有効放電長）が共振器の全損失$f$に等しいとき発振が定常状態に達することを考慮すると，スペクトル線の中心での6328 Å単一モード発振出力$P_0$は(3)式より

$$P_0 = t \cdot S_{11} \left[\left(\frac{g_0 l}{f}\right)^2 \frac{(b + I_2(V_2^c)/S_{21})^2}{b + I_2(V_2^c)/S_{22}} - (b + I_2(V_2^c)/S_{22})\right] \Big/ (b + I_2((V_2^c) S_{11}/S_{22} S_{12}) \qquad (4)$$

ただし，　t：鏡の透過率 , $g_0 = g(V_1^c = V_1^o)$

3.39 $\mu$ が発振していない場合は(4)において$I(V_2^c) = 0$とすると

$$P_0 = t \cdot S_{11} \left[(g_0 l / f)^2 - 1\right] \qquad (5)$$

となり，6328 Åの発振のみに得られた出力式[8]と全く同等になる。

## 3. 実験結果と計算値の比較

実験に用いたレーザ管は全圧力2.15 torr（He ： Ne ＝ 6：1），$\ell$＝11 cm，共振器長18 cm，管の内径1 mmφで，共振器の反射鏡は6328 Åに対して公称値100（%）－99.5（%）の反射率を有し，3.39 $\mu$に対して反射率約15（%），透過率3（%）を有する。

各放電々流に対する不飽和利得と同時発振出力を測定した。放電々流 i＝8（mA）における同時発振時の6328 Å出力を図3.1に×印で示す。一方、各遷移確率を計算し，(4)式より求めた同時発振時の6328 Å出力の計算値を図3.1に実線で示す。その際 $I_2(V_2^c)$ には測定値を用いた。

図3.1より同時発振時の6328 Å競合出力の傾向が(4)式で非常によく説明されることがわかる。

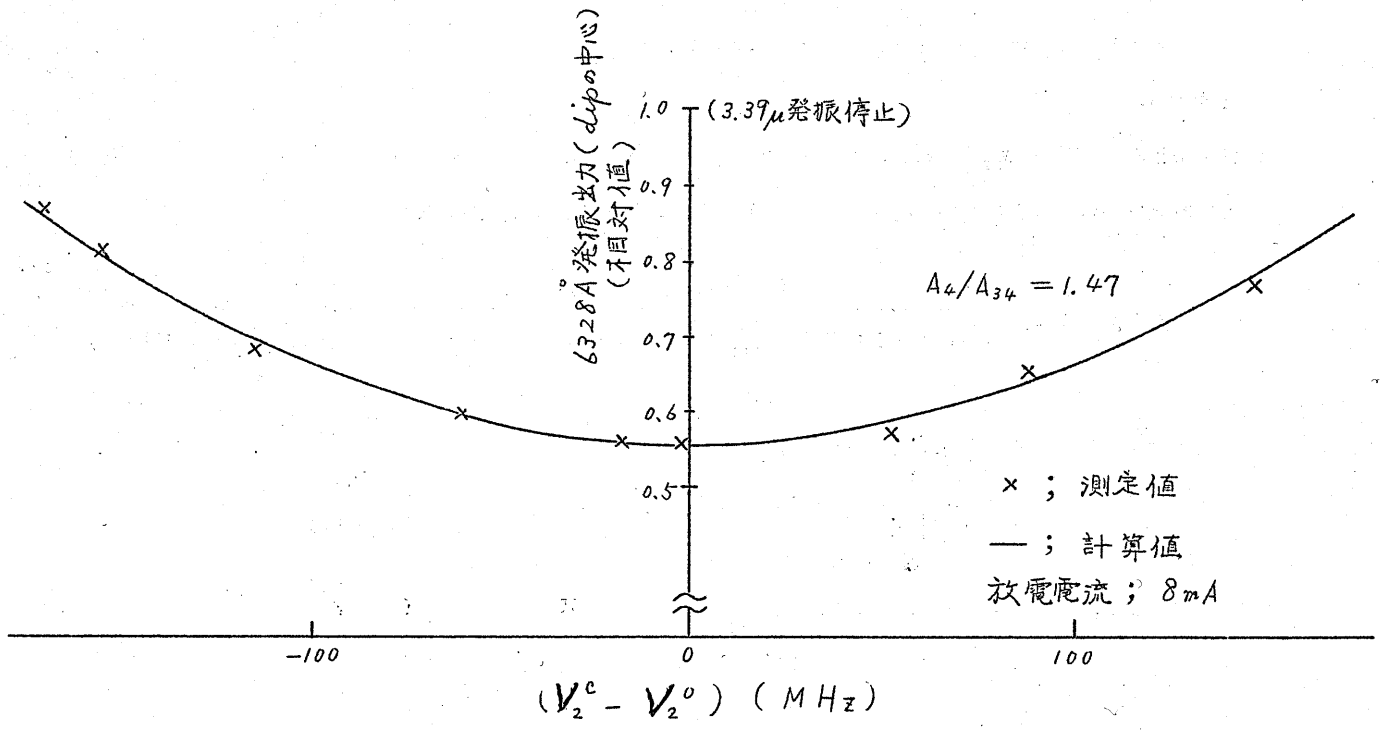



図 3.1　同時発振時の6328 Å出力（dipの中心）と3.39 $\mu$の共振器周波数変動との関係

## 4. 検　　討

電流を変えた場合の同時発振時6328 Å出力の測定値と計算値を比較した結果，（$A_4/A_{34}$）≃1.4 の時の計算値が測定誤差の範囲内で測定値と一致した。この結果，同時発振時の6328 Å出力の計算式の妥当性が示された。

なお，同時発振時の6328 Å線の利得の計算は $\triangle V_{D_1} >> \triangle V_1$ の近似でおこなったのであるが，3.39 $\mu$線の場合本報告のレーザ管の放電条件のもとでは $\triangle V_{D_2} >> \triangle V_2$ の近似が成立しないために解析的には計算できない。しかし，$\triangle V_{D_2} >> \triangle V_2$ の近似が成立しなくても，6328 Å，3.39 $\mu$両波長に対する共振器の損失を与えて数値計算をおこなえば，任意の放電条件（全ガス圧，管の内径，有効放電長，放電々流）のもとにおける両線の同時発振出力を得ることができる。

## 5. 結　　論

従来報告されている He－Ne ガスレーザの6328 Å，3.39 $\mu$線の利得の計算を同時発振の場合に拡張し，6328 Å，3.39 $\mu$がそれぞれ単一モードで発振しているときの両線の競合出力を rate equation よ

り定量的に解析した。

本報告では解析的に演算が可能な同時発振時の６３２８Å出力についてのみ出力計算をおこない，測定値と比較した結果良い一致が得られた。その計算の際3.３９μ発振出力には測定値を用いたが，これは本報告のレーザ管の放電条件のもとでは解析的にはとけないためである。しかし本質的には同時発振時の両線の出力の計算が可能であり，今後の課題である。

## 参 考 文 献


〔1〕 A.L.Bloom , W.E.Bell , R.C.Rempel : Appl.Optics , 2 , 317 (1963)

〔2〕 E.I.Gordon , A.D.White , J.D.Rigden : Proc.Symposium on Optical Masers , VolXIII , 309((1963)

〔3〕 A.D.White , E.I.Gordon : Appl.phys.Lett., 3, 197 (1963)

〔4〕 A.D.White , J.D.Rigden : Appl.Phys.Lett., 2, 211 (1962)

〔5〕 山岸、稲場 : 電子通信学会量子エレクトロニクス研究会資料 QE 68−5 (1968−05)

〔6〕 Л.Ф.Велликок, А.Э.Фомиади и С.А.ФриДрихоВ : ЖурНАЛ ТехНиуеской физики, XXXVII , 1127 (1967)

〔7〕 Yu.M.Golubev , V.E.Privalov : Opt.Spectro., 22〔3〕, 271 (1967)

〔8〕 T.Sakurai ~~他~~ et al. : IEEE.J.Q.E., QE−4 , 65 (1968)